Metode omologice în studiul algebrelor necomutative

Adrian Manea

Coordonator: Prof. univ. Dr. Dragoş Ştefan

CUPRINS

INTRODUCERE

Vom prezenta, în această lucrare, metode (co)omologice în studiul algebrelor necomutative, în principal (co)omologia Hochschild. Introdusă în 1945 de către Gerhard Hochschild (1915-2010) în articolul său *"On the Cohomology Groups of an Associative Algebra", Annals of Math. Second Series, vol. 46, 58-67*, teoria şi-a găsit numeroase aplicaţii în toate ramurile matematicii care folosesc instrumente omologice. Aici vom prezenta metoda "directă", calculatorie de introducere a grupurilor de (co)omologie Hochschild ale unei algebre cu coeficienţi într-un bimodul, iar în anexă se poate găsi şi metoda categorială, mai potrivită pentru generalizări. Aceasta din urmă foloseşte obiectele (co)simpliciale dintr-o categorie şi arată cum oricărui obiect (co)simplicial i se asociază un complex, a cărui (co)omologie poate fi numită, în general, (co)omologia Hochschild. Prezentarea va urmări foarte buna expunere din [Weibel], cap. 8, p. 254-259.

În esenţă, lucrarea de faţă conţine trei părţi. Prima parte, alcătuită din primul capitol, prezintă definiţia grupurilor de (co)omologie Hochschild ale unei algebre cu coeficienţi într-un bimodul. Prezentarea cuprinde, aşa cum am spus, abordarea directă asupra conceptului, care considerăm că este şi mai naturală şi uşor de înţeles.

Partea a doua a lucrării, alcătuită din al doilea şi al treilea capitol, definesc noţiunea de dimensiune, în contextul teoriei de (co)omologie Hochschild. Prezentăm primele cazuri, ale algebrelor de dimensiune Hochschild zero şi unu, numite algebre separabile, respectiv formal netede. După definirea şi introducerea conceptelor, dăm cîte o teoremă de caracterizare pentru fiecare caz, cuprinzînd proprietăţi esenţiale ale acestor tipuri de algebre. În finalul celui de-al treilea capitol, arătăm că algebrele "uzuale" (algebra tensorială a unui bimodul, produsul liber de algebre şi produsul tensorial de algebre) sînt exemple simple de algebre formal netede.

Partea a treia şi cea mai importantă a lucrării cuprinde ultimul capitol şi dă o aplicaţie foarte interesantă şi nouă a coomologiei Hochschild. Introducem (conform [JPŞ1]) conceptele de *perechi (aproape) Koszul*, alcătuite dintr-o algebră

(R-inel) şi un coinel, cu o anumită legătură între ele. Generalizăm apoi rezoluţia bar obişnuită a unei algebre, dînd rezoluţii pentru cei doi membri ai perechii (aproape) Koszul. Deşi aceste rezoluţii conţin obiecte din categorii diferite (comodule stîngi, comodule drepte, respectiv bicomodule), vom vedea că există o legătură foarte strînsă între ele, anume că, în cazul în care perechea este Koszul, atunci dacă un complex este exact, atunci şi celelalte sunt exacte. De asemenea, terminologia nu este întîmplătoare şi vom arăta că o pereche Koszul înseamnă, de fapt, un inel Koszul, în sensul prezentat în [BGS], împreună cu un coinel, iar cele două sînt legate într-un anumit fel. Adaptăm apoi conceptul de coomologie Hochschild în acest context. Date acele rezoluţii în cele trei categorii, vom aplica functorii derivaţi Tor şi Ext pentru a vedea ce înseamnă coomologia Hochschild a unei perechi Koszul.

Lucrarea presupune un minimum de cunoştinţe de algebră generală şi algebră omologică, de tipul celor acumulate în perioada de studii de licenţă şi masterat. Astfel, apreciem că poate fi parcursă şi înţeleasă de orice absolvent, iar pentru noţiunile speciale se poate consulta anexa.

1

COOMOLOGIA HOCHSCHILD

În toată această lucrare, dacă nu se specifică altfel, vom fixa k un corp comutativ, algebră va însemna k-algebră, (sub)spaţiu va însemna k-(sub)spaţiu vectorial, iar $\otimes$ va însemna $\otimes_k$.

De asemenea, categoria de R-module stîngi o vom nota ${}_R\mathcal{M}$, similar la dreapta şi pentru bimodule. Un obiect X din categoria ${}_R\mathcal{M}$ îl vom mai nota şi ${}_RX$. Similar la dreapta sau bimodule.

1.1. Algebre, bimodule şi algebra anvelopantă

Pentru a defini coomologia Hochschild a unei algebre necomutative, avem nevoie de functori derivaţi, folosiţi într-o categorie de module. De aceea, vom descrie cum unui bimodul peste o algebră îi asociem un modul.

Definiţie 1.1.1. Fie R o k-algebră. Algebra anvelopantă a lui R, notată R^e este $R^e := R \otimes R^{op}$, unde R^{op} este algebra opusă. Înmulţirea se face după formula:

$$(x \otimes y) \cdot (a \otimes b) = (xa) \otimes (by),\ \forall a, b, x, y \in R.$$

În continuare, vom arăta cum categoria de R-bimodule este izomorfă cu o categorie de module stîngi (sau drepte) peste R^e.

Propoziţie 1.1.1. Fie R o algebră. Atunci categoriile ${}_R\mathcal{M}_R$, $\mathcal{M}_{R^e}$ şi ${}_{R^e}\mathcal{M}$ sînt izomorfe.

Demonstraţie: Fie functorii:

$$\mathfrak{F} :_R \mathcal{M}_R \to_{R^e} \mathcal{M},\ \mathfrak{F}(X) = X,\ \forall_R X_R \text{ şi}$$
$$\mathfrak{G} :_{R^e} \mathcal{M} \to_R \mathcal{M}_R,\ \mathfrak{G}(Y) = Y,\ \forall_{R^e} Y.$$

Aceşti functori asociază unui obiect cu o anumită structură aceeaşi mulţime subiacentă, dar cu o altă structură. Mai precis:

Dacă $X \in {}_R\mathcal{M}_R$, atunci $\mathfrak{F}(X)$ devine R^e-modul stîng cu operaţia

$$(r \otimes r') \cdot x = rxr', \ \forall r, r' \in R, \ \forall x \in X.$$

Invers, pentru $Y \in {}_{R^e}\mathcal{M}$, $\mathfrak{G}(Y)$ devine $R-R$-bimodul cu

$$r \cdot y = (r \otimes 1) \cdot y \text{ şi } y \cdot r = (1 \otimes r) \cdot y.$$

Se vede că functorii sînt inverşi, unul celuilalt şi deci am obţinut izomorfismul ${}_R\mathcal{M}_R$ cu ${}_{R^e}\mathcal{M}$. Similar şi celălalt izomorfism. ■

Observaţie 1.1.1. Rezultă de aici că în categoria bimodulelor există suficiente obiecte proiective şi suficiente obiecte injective, deoarece într-o categorie de module există.

Fie V un spaţiu vectorial. Atunci $R \otimes V \otimes R$ este R-bimodul, cu acţiunea:

$$a \cdot (b \otimes v \otimes c) = (ab) \otimes v \otimes c \text{ şi}$$
$$(a \otimes v \otimes b) \cdot c = a \otimes v \otimes (bc), \ \forall a, b, c \in R, \ v \in V.$$

Pentru acest exemplu, folosind izomorfismul de categorii din Prop. 1.1.1, $R \otimes V \otimes R \simeq R^e \otimes V$, ca R^e-module şi, folosind şi adjuncţia dintre functorii Hom şi $\otimes$, avem izomorfismele:

$$\mathrm{Hom}_{R^e}(R \otimes V \otimes R, M) \simeq \mathrm{Hom}_{R^e}(R^e \otimes V, M) \simeq \mathrm{Hom}_k(V, M) \tag{1.1.1}$$

1.2. Rezoluţia standard a unei algebre

Pasul următor în definirea (co)omologiei Hochschild este să construim o rezoluţie proiectivă (standard) a unei algebre R în categoria ${}_R\mathcal{M}_R$. Dar, folosind izomorfismul din Prop. 1.1.1, va fi suficient să o facem într-o categorie de module şi vom lucra în categoria ${}_{R^e}\mathcal{M}$.

Pentru $n \geq 0$, notăm $P_n = R \otimes R^{\otimes n} \otimes R$ (am notat, pentru simplitate $R^{\otimes n} = R \otimes R \otimes \cdots \otimes R$, produsul tensorial avînd n factori). Reamintim convenţia uzuală $R^{\otimes 0} = k$ şi $R^{\otimes q} = 0$, $\forall q < 0$. Ştim că $P_n \in {}_R\mathcal{M}_R$, $\forall n$, pentru că $R^{\otimes n}$ e spaţiu vectorial şi putem folosi exemplul de mai sus. Privind P_n în ${}_{R^e}\mathcal{M}$, el se identifică cu $R^e \otimes R^{\otimes n}$, deci este R^e-modul liber (pentru că R^e şi $R^{\otimes n}$ sînt). În particular, este proiectiv.

Vom folosi aceste P_n ca obiecte în rezoluţie. Definim acum aplicaţiile.

Fie $d_0 : R \otimes R \to R$, $d_0(x \otimes y) = xy$ (produsul de algebră).

Pentru $n \geq 1$ şi $0 \leq i \leq n$, definim $d_n^i : P_n \to P_{n-1}$ prin:

$$d_n^i(x_0 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+1}) = x_0 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_{i-1} \otimes x_i x_{i+1} \otimes x_{i+2} \otimes \cdots \otimes x_{n+1}. \tag{1.2.1}$$

Fie acum $d_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_n^i$. Cu acestea, avem următoarea:

Teoremă 1.2.1. Fie R o k-algebră. Atunci $(P_\bullet, d_\bullet)$ este o rezoluţie proiectivă a lui R în categoria ${}_R\mathcal{M}_R$, numită rezoluţia standard.

Demonstraţie: Deoarece d_0 este surjectivă (din definiţie) şi P_n sînt proiective, pentru orice n, din structura de R-bimodul rezultă că d_n sînt morfisme de bimodul, pentru orice n, adică are loc $d_n^i(r \cdot (x_0 \otimes \cdots \otimes x_{n+1}) \cdot q) = r \cdot d_n^i(x_0 \otimes \cdots \otimes x_{n+1}) \cdot q$, $\forall r, q \in R$.

De asemenea, un calcul simplu arată că $d_n \circ d_{n+1} = 0$, $\forall n \geq 0$.

Aşadar, avem un complex de colanţuri în ${}_R\mathcal{M}_R$.

Pentru a-i arăta exactitatea, construim o omotopie $(s_n)_n$ între identitate şi aplicaţia nulă.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d_{n+2}"] & P_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, equal] & P_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, equal] \arrow[dl, dotted, "s_n"'] & P_{n-1} \cdots \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, equal] \arrow[dl, dotted, "s_{n-1}"'] & P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, equal] \arrow[dl, dotted, "s_0"'] & R \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dl, dotted, "s_{-1}"'] & 0 \\
\cdots \arrow[r, "d_{n+2}"] & P_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] & P_n \arrow[r, "d_n"] & P_{n-1} \cdots \arrow[r, "d_{n-1}"] & P_0 \arrow[r, "d_0"] & R \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Definim aşadar, pentru $n \geq 1$, $s_n : P_n \to P_{n+1}$, $s_n(x) = (-1)^{n+1} x \otimes 1$, definind, pentru convenienţă $P_{-1} = R$. Iar pentru $n < -1$, definim $s_n = 0$.

Cu aceste definiţii, se verifică imediat că $d_0 \circ s_{-1} = Id_R$ şi $s_{n-1} \circ d_n + d_{n+1} \circ s_n = Id_{P_n}$, $\forall n \geq 0$. ■

1.3. Definiţia (co)omologiei Hochschild

Lucrăm în continuare cu R o k-algebră.

Odată construită rezoluţia proiectivă, ca în Teorema 1.2.1, o putem folosi pentru calculul grupurilor $\mathrm{Ext}^\bullet_{R^e}(R, M)$ şi $\mathrm{Tor}^{R^e}_\bullet(R, M)$, pentru orice ${}_RM_R$ (care, conform Prop. 1.1.1, poate fi privit şi ca R^e-modul stîng sau drept).

Definiţie 1.3.1. În condiţiile şi cu notaţiile de mai sus, pentru R,

1. Al n-lea grup de coomologie Hochschild cu coeficienţi în M este $HH^n(R, M) = \mathrm{Ext}^\bullet_{R^e}(R, M)$.

2. Al n-lea grup de omologie Hochschild cu coeficienţi în M este $HH_n(R, M) = \mathrm{Tor}^{R^e}_\bullet(R, M)$.

Detaliem această definiţie. Fie diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{R^e}(R \otimes R^{\otimes n} \otimes R, M) \arrow[r, "\phi(R^{\otimes n}, M)"] & \mathrm{Hom}_k(R^{\otimes n}, M) \\
\mathrm{Hom}_{R^e}(R \otimes R^{\otimes n-1} \otimes R, M) \arrow[u, "d_n^*"] & \mathrm{Hom}_k(R^{\otimes n-1}, M) \arrow[l, "\psi(R^{\otimes n-1}, M)"] \arrow[u, dotted, "b^{n-1}"']
\end{tikzcd}$$

Aplicaţiile ϕ şi ψ sînt izomorfismele rezultate din adjuncţia functorilor Hom şi $\otimes$ (ec. 1.1.1), iar $d_n^* = \mathrm{Hom}_{R^e}(d_n, M)$ este aplicaţia indusă de d_n. Vrem să definim aplicaţiile b^n, care să facă diagrama comutativă. Punem simplu

$b^{n-1} = \phi(R^{\otimes n}, M) \circ d_n^* \circ \psi(R^{\otimes n-1}, M)$, ca în diagramă.

Detaliem această construcţie. Pentru $n = 1$, folosind $R^{\otimes 0} = k$ şi izomorfismul $\mathrm{Hom}_k(k, M) \simeq M$, avem $b^0 : M \to \mathrm{Hom}_k(R, M)$. Obţinem $b^0(m)(r) = rm - mr$, $\forall m \in M$, $r \in R$.

Mai departe, definim $b_i^n : \mathrm{Hom}_k(R^{\otimes n}, M) \to \mathrm{Hom}_k(R^{\otimes n+1}, M)$ pentru orice $f \in \mathrm{Hom}_k(R^{\otimes n}, M)$, $\forall r_i \in R$ $\forall i = 1, \dots, n$ prin următoarele ecuaţii:

$$b_i^n(f)(r_1 \otimes \cdots \otimes r_{n+1}) = \begin{cases} r_1 \cdot f(r_2 \otimes \dots r_{n+1}), & i = 0 \\ f(r_1 \otimes \cdots \otimes r_{i-1} \otimes r_i r_{i+1} \otimes r_{i+2} \otimes \cdots \otimes r_{n+1}, & i = 1, \dots, n \\ f(r_1 \otimes \dots r_n) \cdots r_{n+1}, & i = n+1 \end{cases}$$

Definim acum $b^n(f) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i b_i^n(f)$.

Conform acestor definiţii şi modului în care au fost obţinute obiectele şi morfismele, am demonstrat:

Teoremă 1.3.1. Coomologia Hochschild a unei algebre R cu coeficienţi într-un bimodul M este coomologia complexului $(C^\bullet(R, M), b^\bullet)$, cu $C^0(R, M) = M$ şi $C^n(R, M) = \mathrm{Hom}_k(R^{\otimes n}, M)$, pentru $n > 0$, iar diferenţialele $b^\bullet$ date conform construcţiei de mai sus.■

Complexul astfel definit se numeşte *complexul standard*.

Întru totul similar, omologia se dovedeşte a fi omologia complexului $(C_\bullet(R, M), b_\bullet)$, în care termenii sînt $C_0(R, M) = M$ şi $C_n(R, M) = M \otimes R^{\otimes n}$, iar diferenţialele, $b_n = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i b_n^i$, unde

$$b_n^i(m \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_n) = \begin{cases} m r_1 \otimes r_2 \otimes r_3 \otimes \cdots \otimes r_n, & i = 0 \\ m \otimes r_1 \otimes r_2 \otimes \cdots \otimes r_{i-1} \otimes r_i r_{i+1} \otimes r_{i+2} \otimes \dots r_n, & 1 \le i \le n-1 \\ r_n m \otimes r_1 \otimes r_2 \otimes \cdots \otimes r_n, & i = n \end{cases}$$

Să vedem acum cîteva exemple de grupuri de (co)omologie, în dimensiune mică.

Pentru $n = 0$, avem $HH^0(R, M) = \mathrm{Ker} b^0 = \{m \in M \mid rm = mr, \forall r \in R\}$. Acest grup se notează uzual cu M^R şi se numeşte *centralizatorul* lui R în M, fiind alcătuit din elemente din bimodulul M care comută cu toate elementele din R.

De asemenea, cum $b_1(m \otimes r) = mr - rm$, avem că $HH_0(R, M) = \dfrac{M}{Imb_1} = \dfrac{M}{[M, R]}$.

Pentru $n = 1$, avem $f \in \mathrm{Ker} b^1 \Leftrightarrow f(xy) = xf(y) + f(x)y,\ \forall x, y \in R$. Spunem, în acest caz, că f este o *derivare* a lui R pe M şi scriem $f \in Der(R, M)$.

De asemenea, $f \in Imb^0 \Leftrightarrow \exists m \in M$ a.î. $f(r) = rm - mr$. Spunem, în acest caz, că f este derivare interioară şi scriem $f \in Der_{int}(R, M)$. Atunci $HH^1(R, M) = \dfrac{Der(R, M)}{Der_{int}}$. Numim acest spaţiu spaţiul derivărilor exterioare pe M, notat cu $Der_{ext}(R, M)$.

Ca o remarcă la finalul acestui capitol, menţionăm că se poate face o descriere categorială, mai generală, a complexului standard asociat unui obiect (co)simplicial într-o categorie. În acest context, (co)omologia Hochschild se defineşte cu aplicabilitate mai generală. Prezentăm această alternativă în anexa lucrării.

2

ALGEBRE SEPARABILE

2.1. Definiţii. Proprietăţi

Vom prezenta acum conceptul de *dimensiune*, relativ la contextul prezentat, precum şi primele cazuri, anume de algebre de dimensiune zero şi unu.

Definiţie 2.1.1. Dimensiunea Hochschild a unei algebre R este cel mai mic număr natural n astfel încît $HH^m(R, M) = 0$, $\forall m > n$, $\forall M \in_R \mathcal{M}_R$ (iar $HH^n(R, M) \neq 0$). O vom nota HdimR.

Ne vor interesa, în acest capitol, algebrele de dimensiune Hochschild 0. Cînd nu există pericol de confuzie, dacă nu se specifică altfel, "dimensiune" va însemna "dimensiune Hochschild".

Să facem mai întîi observaţia următoare: $HH^1(R, M) = Ext^1_{R^e}(R, M) \Rightarrow HdimR = 0 \Leftrightarrow Ext^1_{R^e}(R, M) = 0$, $\forall M \in_R \mathcal{M}_R$. Adică R este proiectiv în categoria ${}_{R^e}\mathcal{M}$ sau, echivalent (conform Prop. 1.1.1), proiectiv în categoria ${}_R\mathcal{M}_R$.

Definiţie 2.1.2. O algebră de dimensiune Hochschild 0 se numeşte separabilă.

Avem următoarea teoremă de caracterizare a algebrelor separabile:

Teoremă 2.1.1. Fie R o k-algebră. Următoarele afirmaţii sînt echivalente:

1. R este separabilă;
2. $\exists a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in R$a.î. $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 1$ şi $\sum_{i=1}^{n} r a_i \otimes b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i r$, $\forall r \in R$;
3. HdimR=0;
4. $Der(R, M) = Der_{int}(R, M)$, $\forall_R M_R$;
5. $HH^n(R, M) = 0$, $\forall_R M_R$, $\forall n \geq 1$.

Demonstraţie: 1 $\Leftrightarrow$ 3 şi 3 $\Leftrightarrow$ 4 sînt clare, conform definiţiei, respectiv calculelor din finalul capitolului precedent.
1 $\Rightarrow$ 2: Presupunem R separabilă, deci ${}_RR_R$ este proiectiv. Fie $m : R \otimes R \to R$ înmulţirea de algebră. Cum R este proiectiv, există $\sigma : R \to R \otimes R$ secţiune a lui m. Notăm $\sigma(1) = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i$.

Cum $1 = (m \circ \sigma)(1) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ şi $r \cdot \sigma(1) = \sigma(r) = \sigma(1) \cdot r$, deoarece σ e morfism de bimodule, avem relaţiile de la 2.
2 $\Rightarrow$ 1: Definim $\sigma : R \to R \otimes R$, $\sigma(r) = \sum_{i=1}^{n} ra_i \otimes b_i$. Cum produsul tensorial este k-balansat, iar R este k-algebră, σ este morfism de bimodule.
Fie $m : R \otimes R \to R$, înmulţirea de algebră. Atunci

$$(m \circ \sigma)(r) = m(\sum_{i=1}^{n} ra_i \otimes b_i) = \sum_{i=1}^{n} ra_i b_i = r \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = r.$$

Deci σ e secţiune a lui m ceea ce implică R sumand direct în $R \otimes R$, care este proiectiv (ca R-bimodul), de unde R e proiectiv.
5 $\Rightarrow$ 3: evident.
3 $\Rightarrow$ 5: Presupunem $HdimR = 0 \Rightarrow HH^1(R, M) = 0$, $\forall {}_RM_R$.
Demonstrăm prin inducţie după n. Pasul de verificare e cuprins în ipoteză. Pasul de inducţie: Presupunem $HH^n(R, N) = 0$, $\forall {}_RN_R$. Fie ${}_RM_R$ oarecare.

Considerăm şirul exact $0 \to M \xrightarrow{i} I \xrightarrow{p} Q \to 0$, cu I injectiv (există, conform Obs. 1.1.1), iar $Q = I/Imi$.

Din şirul lung pentru $Ext^{\bullet}_{R^e}(R, -)$, avem:

$$\cdots \to Ext^{n}_{R^e}(R, Q) \to Ext^{n+1}_{R^e}(R, M) \to Ext^{n+1}_{R^e}(R, I) \to \dots \tag{2.1.1}$$

Dar, din ipoteza de inducţie $Ext^{n}_{R^e}(R, Q) = 0$, iar $Ext^{n+1}_{R^e}(R, I) = 0$, pentru că I e injectiv. Deci $Ext^{n+1}_{R^e}(R, M) = 0$. ■

Definiţie 2.1.3. Un element $z = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i$ ca în teoremă se numeşte idempotent de separabilitate.

Corolar 2.1.1.
1. $M_n(k)$ este separabilă;
2. Dacă $z \in R^e$ este idempotent de separabilitate, atunci $z^2 = z$ (ceea ce explică numele).

Demonstraţie: 1. Fie E_{ij} unităţile matriceale, adică acele matrice din $M_n(k)$ care au 1 la intersecţia liniei i cu coloana j şi zero în rest. Un calcul simplu arată că $z = \sum_{i=1}^{n} E_{i1} \otimes E_{1i}$ este idempotent de separabilitate.

2. Fie $z = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \in R^e$ idempotent de separabilitate, i.e. care respectă 2.1.1.2.

Atunci:

$$z^2 = z \cdot z = (\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \otimes b_i^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i^2 \cdot a_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i \otimes b_i) \cdot (a_i b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i = z$$

■

Prezentăm, în continuare, cîteva proprietăţi ale algebrelor separabile.

Teoremă 2.1.2. (Zelinsky-Villamayor)
Orice algebră separabilă este spaţiu vectorial de dimensiune finită.

Demonstraţie: Fie R o algebră separabilă. Atunci există $z = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \in R^e$ idempotent de separabilitate. Putem alege n minim în scrierea lui z şi astfel, $\{b_i\}_i$ sînt liniar independenţi. Completăm acest set la o bază a ${}_kR$ şi fie $\{\alpha_i\}_i$ baza duală (amintim, $\alpha_i(b_j) = \delta_{ij}$).

Ştim $\sum_{i=1}^{n} ra_i \otimes b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i r$ (cf. Prop. 2.1.1.2). Aplicăm acestei egalităţi $Id_R \otimes \alpha_j$ şi obţinem: $\sum_{i=1}^{n} ra_i \otimes \alpha_j(b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes \alpha_j(b_i r)$. Conform definiţiei bazei duale, rămîne: $ra_j = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes \alpha_j(b_i r)$.

Fie $I = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, subspaţiul generat de aceşti $a_i \in R$. Se vede că $I \leq_R R$ şi, în plus, $dim_k I < \infty$. Atunci $dim_k(End_k(I)) < \infty$. Vom identifica R cu un subspaţiu al $End_k(I)$ (printr-o scufundare de spaţii vectoriale) şi aceasta va finaliza demonstraţia.

Fie $\phi : R \to End_k(I)$, $\phi(r) = f_r$, unde $f_r(x) = rx$. Se vede că ϕ este morfism de spaţii vectoriale. Arătăm că e injectiv. Dacă $r \in Ker\phi$, atunci $f_r = 0 \Rightarrow f_r(x) = 0$, $\forall x \in R$. Dacă luăm, în particular, $x = 1$, obţinem contradicţia $1 = 0$.

Aşadar, $R \simeq \phi(R) \leq End_k(I)$, care este spaţiu vectorial finit dimensional. ■

Propoziţie 2.1.1. Orice algebră separabilă este semisimplă (şi la stînga, şi la dreapta).

Demonstraţie: Arătăm la stînga, un argument întru totul similar funcţionînd la dreapta.

Fie diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(R \otimes_k R) \otimes_R M \arrow[d, "u"', "\simeq"] \arrow[r, shift right, "m \otimes_R M"'] & R \otimes_R M \arrow[l, shift right, "\sigma \otimes_R M"'] \arrow[d, "v", "\simeq"'] \\
R \otimes_k M \arrow[r, shift right, "\mu_M"'] & M \arrow[l, dotted, shift right, "\sigma'"']
\end{tikzcd}$$

Fie σ secţiune a înmulţirii $R \otimes R \xrightarrow{m} R$. Pentru orice ${}_RM$, în diagrama de mai sus, aplicaţiile sînt: $u((x \otimes_k y) \otimes_R m) = x \otimes ym$, $v(x \otimes_R m) = xm$ şi μ_M

defineşte structura de modul stîng.

Definim $\sigma' = u \circ (\sigma \otimes_R M) \circ v^{-1}$. Deoarece toate aplicaţiile implicate sînt morfisme de R-module stîngi, şi σ' este. În plus, deoarece σ este secţiune pentru m, rezultă că σ' este secţiune pentru μ_M. Atunci M este sumand direct în $R \otimes_k M$, care este R-modul stîng liber, deci M e proiectiv. ■

2.2. Extinderile Hochschild ale unei algebre

Vrem să dăm o interpretare celui de-al doilea grup de coomologie Hochschild al unei algebre şi vom proceda într-o manieră similară cu cea a introducerii functorilor Ext în [McLHom], de exemplu. Pentru aceasta, vom introduce noţiunea de extindere Hochschild a unei algebre, după cum urmează.

Fie R o k-algebră şi $p : E \to R$ un morfism surjectiv de algebre, astfel încît $(Kerp)^2 = 0 \Leftrightarrow x \cdot y = 0$, $\forall x, y \in Kerp$. Cum aplicaţia p este surjectivă şi liniară, rezultă că există $\sigma : R \to E$, liniară, aşa încît $p \circ \sigma = Id_R$. Vom pune o structură de R-bimodul pe $Kerp$, cu ajutorul lui σ.

Fie $x \in Kerp$ şi $y \in R$. Definim $r \cdot x = \sigma(r) \cdot x$ şi $x \cdot r = x \cdot \sigma(r)$.

Folosind faptul că σ este morfism de algebre, avem $r(r'x) - (rr')x = [\sigma(r)\sigma(r') - \sigma(rr')]x \in Kerp$ şi cum $(Kerp)^2 = 0$, rezultă că am definit o structură de R-modul stîng pe $Kerp$. Similar la dreapta.

Arătăm acum că structura este corect definită, i.e. că nu depinde de alegerea secţiunii σ. Într-adevăr, dacă $\sigma' : R \to E$ este o altă secţiune k-liniară a lui p, atunci $\sigma(r) - \sigma'(r') \in Kerp$ şi $[\sigma(r) - \sigma'(r')]x = x[\sigma(r) - \sigma'(r')] = 0$, deci structura depinde doar de p.

Am arătat, deci, că există o structură de R-bimodul pe $Kerp$, în condiţiile de mai sus. Facem acum legătura cu extinderile Hochschild.

Definiţie 2.2.1. Fie $M \in_R \mathcal{M}_R$. Un morfism surjectiv de algebre $p : E \to R$ astfel încît $(Kerp)^2 = 0$ împreună cu un izomorfism de R-bimodule $u : M \to Kerp$ se numeşte extindere Hochschild a lui R cu nucleu M.

Vom nota scurt extinderea conform acestei definiţii cu (E, p, M, u), subînţelegîndu-se ce este fiecare. O caracterizare echivalentă şi imediată este următoarea:

Observaţie 2.2.1. Fie (E, p, M, u) ca mai sus. Atunci avem şirul exact:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "u", "\simeq"'] & E \arrow[r, "p"] & R \arrow[r] & 0 \\ & & Kerp \arrow[u, hook, "j"'] & & \end{tikzcd}$$

Deci a da o extindere Hochschild a lui R cu nucleu M este echivalent cu a da un şir exact de forma $0 \to M \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} R \to 0$ astfel încît p e morfism de algebre cu $(Kerp)^2 = 0$, iar $i : M \to Kerp$ este izomorfism de R-bimodule.

Definiţie 2.2.2. Două extinderi Hochschild ale unei algebre sînt echivalente, dacă, în diagrama de mai jos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d, dotted, "f"] & R \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & E' \arrow[r] & R \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

există aplicaţia f care face pătratele comutative.

Vom nota $Ext(R, M)$ mulţimea extinderilor Hochschild ale lui R cu nucleu M, factorizată la relaţia de echivalenţă de mai sus. Clasa de echivalenţă a extinderii $E \in Ext(R, M)$ o vom nota $\widehat{E}$.

Rezultatul principal al acestei secţiuni este că extinderile Hochschild ale lui R cu nucleu M sînt în corespondenţă bijectivă cu clasele de coomologie din $HH^2(R, M)$. Enunţăm acest rezultat şi arătăm care este corespondenţa, fără o demonstraţie detaliată, însă. Pentru demonstraţia întreagă, se poate consulta [DŞ], p. 64-66.

Teoremă 2.2.1. $Ext(R, M) \simeq HH^2(R, M)$.

Demonstraţie: (Schiţă) Să notăm $\phi : Ext(R, M) \to HH^2(R, M)$ acest izomorfism. El funcţionează astfel:

Fie $\widehat{E} \in Ext(R, M)$. Alegem $\sigma : R \to E$ secţiune k-liniară a lui $p : E \to R$. Definim aplicaţia $\omega_E : R \otimes R \to R$, $\omega_E(x \otimes y) = \sigma(xy) - \sigma(x)\sigma(y)$. Deoarece p este morfism de algebre şi $p \circ \sigma = Id$, $p\omega_E(x \otimes y) = 0 \Rightarrow Im\omega_E \subseteq Kerp = Imi = i(M) \simeq M$. Deci putem considera $\omega_E : R \otimes R \to M$, k-liniară.

Acum, ω_E este 2-cociclu, i.e. $b^2(\omega_E) = 0$, deoarece

$$x \cdot \omega_E(y \otimes z) - \omega_E(xy \otimes z) + \omega_E(x \otimes yz) - \omega_E(x \otimes y) \cdot z = 0,\ \forall x, y, z \in R,$$

ceea ce este adevărat, din structura de algebră pe $M \subseteq I$, dată via σ.

Similar cu independenţa extinderii de alegerea secţiunii σ se arată şi că, alegînd un ω'_E corespunzător unei secţiuni σ', obţinem $\omega_E \equiv \omega'_E \ mod\ Imb^1$.

Putem, atunci, defini $\phi : Ext(R, M) \to HH^2(R, M)$, $\phi(\widehat{E}) = [\omega_E] \in HH^2(R, M)$ şi se arată că este bijectivă. ■

Din cele de mai sus, rezultă imediat următorul:

Corolar 2.2.1. În condiţiile de mai sus, clasa de coomologie a unei extinderi $\widehat{E}$ a lui R cu nucleu M este zero (extinderea este trivială) dacă şi numai dacă există $\sigma : R \to E$ secţiune a lui p, care este morfism de algebre. ■

3

ALGEBRE FORMAL NETEDE

3.1. Definiţii. Proprietăţi

Definiţie 3.1.1. Algebra R se numeşte formal netedă dacă HdimR ≤ 1.
Echivalent, $HH^2(R, M) = 0$, $\forall {}_R M_R$, sau, cf. Cor. 2.2.1, Ext(R,M)=0.

Similar cu teorema de caracterizare a algebrelor separabile pe care am prezentat-o (Teorema 2.1.1), avem şi un rezultat pentru algebrele formal netede.

Teoremă 3.1.1. Fie R o algebră. Următoarele afirmaţii sînt echivalente:

1. R este formal netedă;
2. Pentru orice $p : E \to S$ morfism surjectiv de algebre, cu $(Kerp)^2 = 0$ şi orice $f : R \to S$ morfism de algebre, există $g : R \to E$ morfism de algebre, astfel încît pg=f;
3. Pentru orice $p : E \to S$ morfism surjectiv de algebre cu nucleu nilpotent şi orice $f : R \to S$ morfism de algebre, există $g : R \to E$ morfism de algebre, astfel încît pg=f.

Demonstraţie: $1 \Rightarrow 2$: Fie diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] & E \arrow[r, "p"] & S \arrow[r] & 0 \\ & & & R \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, dotted, "g"] & \end{tikzcd}$$

Rîndul de sus este o extindere Hochschild a lui S, cu nucleu M, iar R este algebra presupusă formal netedă şi fie $f : R \to S$ un morfism de algebre. Vrem să completăm diagrama cu $g : R \to E$, morfism de algebre, cu $pg = f$.

Considerăm $E \times_S R = \{(e, r) \in E \times R \mid p(e) = f(r)\}$, pull-back-ul (produsul fibrat) al aplicaţiilor p şi f. E uşor de văzut că $E \times_S R$ este subalgebră a produsului direct de algebre $E \times R$, cu adunarea şi înmulţirea pe componente.

Proiecţia a doua $p_2 : E \times R \to R$ induce morfismul $p' : E \times_S R \to R$, surjectiv, deoarece şi p_2 este. Fie $M' = Kerp'$ şi notăm $M' \overset{i'}{\hookrightarrow} E \times_S R$. Atunci avem şirul exact (rîndul de sus):

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, dotted, "u'"] & E \times_S R \arrow[r, "p'"] \arrow[d, dotted, "u"] & R \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] & E \arrow[r, "p"] & S \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Definim $u : E \times_S R \to E$, prin $u(e,r) = e$, $\forall (e,r) \in E \times_S R$ şi $u' = u_{|M'}$.

Acum, pentru $(e,r) \in E \times_S R$, $fp'(e,r) = f(r)$ şi $pu(e,r) = p(e)$, deci $pu = fp'$ şi pătratul din dreapta diagramei este comutativ.

Fie $(e,r) \in M' = Kerp' \Rightarrow p'(e,r) = 0 \Rightarrow r = 0$. Dar $(e,r) \in E \times_S R$ şi $f(r) = p(e)$, deci $p(e) = 0 \Rightarrow e \in i(M)$. Atunci $M' = \{(e,0) \mid e \in i(M)\}$. Dar $i(M) = Kerp' \Rightarrow (i(M))^2 = 0 \Rightarrow (M')^2 = 0$. Putem defini acum o structură de R-bimodul pe M', iar şirul de sus al diagramei anterioare se află în $Ext(R, M')$. Dar cum R e formal netedă, $Ext(R, M') = 0$, deci cele două extinderi din diagramă au aceeaşi clasă, nulă. Fie atunci σ' o secţiune a lui p', σ' fiind morfism de algebre. Punem $g = u \circ \sigma'$ şi am terminat.
$2 \Rightarrow 1$: Dacă afirmaţia din 2. este adevărată, atunci diagrama de mai jos este comutativă:

$$\begin{tikzcd}
 & R \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "f"] & \\
E \arrow[r, "p"] & S \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Luînd, în particular, $f = Id_R$, avem că orice extindere Hochschild e trivială (cu notaţiile de mai devreme, $pg = f \Rightarrow g = \sigma$).
$1 \Rightarrow 3$: Fie $p : E \to S$ morfism surjectiv de algebre şi $n \in \mathbb{N}$ indicele de nilpotenţă al $Kerp$. Notăm $Kerp = I$. Atunci $p : E \to S$ poate fi descompus:

$$E = E/I^n \overset{p_{n-1}}{\to} E/I^{n-1} \overset{p_{n-2}}{\to} E/I^{n-2} \overset{p_{n-3}}{\to} \cdots \overset{p_2}{\to} E/I^2 \overset{p_1}{\to} E/I \simeq S$$

Morfismele $(p_i)_i$ sînt surjective, fiind induse de proiecţii canonice. Ele au nuclee de forma I^k/I^{k+1}, $k \geq 2$. Luînd $\widehat{x} \in I^{k-1}/I^k$, avem că $\widehat{x}^2 = \widehat{x^2} = \widehat{0}$. (Întradevăr, punînd $x = \alpha + \beta$, cu $\alpha \in I^{k-1}$ şi $\beta \in I^k$, atunci $(\alpha+\beta)^2 = (\alpha^2 + \beta^2 \in I^{2k-2}) + (\alpha\beta + \beta\alpha \in I^{2k-1}) \in I^k$, deoarece şirul $(I^k)_k$ e descrescător, iar $2k-2$, $2k-1$, $2k \geq k$, pentru $k \geq 2$.)

Fie $g_0 = f$. Inductiv, construim pe baza morfismelor (p_k) morfismele $g_k : R \to E/I^{k+1}$, astfel încît $p_k \circ g_k = g_{k-1}$. Atunci $g = g_{n-1}$ e morfismul căutat. ■

3.2. Exemple de algebre formal netede

Vom prezenta aici cîteva exemple de algebre des întîlnite (algebra tensorială, produsul liber de algebre şi produsul tensorial de algebre) şi vom demonstra că ele sînt, de fapt, algebre formal netede, în sensul secţiunii anterioare.

3.2.1. Algebra tensorială a unui bimodul

Amintim construcţia algebrei tensoriale. Fie R o algebră şi M un R-bimodul. Definim $T_R^0(M) = R$, $T_R^n(M) = M \otimes_R M \otimes_R \cdots \otimes_R M \overset{not}{=} M^{\otimes_R n}$. Atunci $T_R(M) = \bigoplus\limits_{n \in \mathbb{N}} T_R^n(M)$.

Structura de algebră este dată de:

$$\begin{gathered} r \cdot (m_1 \otimes_R \cdots \otimes_R m_k) = (rm_1) \otimes_R m_2 \otimes_R \cdots \otimes_R m_k; \\ (m_1 \otimes_R \cdots \otimes_R m_k) \cdot r = m_1 \otimes_R \cdots \otimes_R (m_k r); \\ (m_1 \otimes_R \cdots \otimes_R m_k) \cdot (m_{k+1} \otimes_R \cdots \otimes_R m_{k+p}) = m_1 \otimes_R \cdots \otimes_R m_{k+p}. \end{gathered}$$

Se poate observa cu uşurinţă că $R = T_R^0(M)$ este subalgebră a $T_R(M)$ şi $M = T_R^1(M)$ este subbimodul al $T_R(M)$.

De asemenea, se poate arăta că structura de algebră definită ca mai sus este unică şi algebra tensorială $T_R(M)$ are următoarea proprietate de universalitate:

Teoremă 3.2.1. Fie R, M ca mai sus. Fie S o algebră şi $f_0 : R \to S$ morfism de algebre, $f_1 : M \to S$ morfism de R-bimodule (structura de R-bimodul pe S este via f_0). Atunci există şi este unic $f : T_R(M) \to S$ morfism de algebre astfel încît $f\mid_{T_R^0(M)} = f_0$ şi $f\mid_{T_R^1(M)} = f_1$. ■

Conform acestei proprietăţi, pentru a da o aplicaţie de algebre de la algebra tensorială a unui bimodul la o altă algebră, este suficient să dăm un morfism de algebră între algebra "de bază" (R, aici) şi algebra cea nouă, precum şi un morfism de bimodule de la bimodulul al cărei algebră tensorială se consideră la algebra nouă (pe care se pune o structură de bimodul via prima aplicaţie).

În aceste condiţii, avem următoarea:

Teoremă 3.2.2. Fie R o algebră formal netedă şi M un R-bimodul proiectiv (echivalent, R^e-modul proiectiv, conform Prop.1.1.1).

Atunci $T_R(M)$ este formal netedă. În particular, rezultatul are loc pentru orice algebră R separabilă.

Demonstraţie: Fie $p : E \to S$ un morfism surjectiv de algebre, cu nucleu nilpotent. Vrem să folosim Prop. 2.1.1.3, adică $\forall f : T_R(M) \to S$, $\exists g : T_R(M) \to E$ a.î. $pg = f$.

Fie incluziunea canonică $i : R \hookrightarrow T_R(M)$. Cum R e formal netedă, rezultă din Prop. 2.1.1 că există $g_0 : R \to E$ morfism de algebre, cu $pg_0 = fi$. Putem face E R-bimodul via g_0 şi S devine R-bimodul, via $f \circ i$.

Să mai facem observaţia şi că p este epimorfism de bimodule. Fie $j : M \hookrightarrow T_R(M)$. Cum M e proiectiv şi $f \circ j$ este morfism de R-bimodule, rezultă că există $g_1 : M \to E$, cu $pg_1 = f \circ j$.

Acum, din proprietatea de universalitate a algebrei tensoriale (Teorema 3.2.1) rezultă că există $g : T_R(M) \to E$, astfel încât $g\mid_R = g_0$, $g\mid_M = g_1$. Atunci $pg = fi$ pe R şi $pg = fj$ pe M şi, din partea de unicitate a Teoremei 3.2.1, $pg = f$. ■

Observaţie 3.2.1. Ca un caz particular, fie $R = k$ şi V un k-spaţiu vectorial. Atunci $T_k(V)$ este formal netedă şi k e separabilă. Dar $T_k(V)$ nu poate fi finit dimensională, deoarece toate componentele $T_k^n(V)$ sînt nenule, $\forall n$. Atunci $T_k(V)$ nu e separabilă (ar contrazice Teorema 2.1.2), deci $HdimT_k(V) = 1$.

3.2.2. Produsul liber de algebre

Fie R, S două $k-$algebre. Vom defini produsul liber al lor, notat $R * S$, care devine k-algebră, din însuşi modul în care va fi definită şi va avea o proprietate de universalitate similară cu cea a algebrei tensoriale. Să detaliem construcţia.

Fie $V = k^{(R)} \oplus k^{(S)}$ spaţiul vectorial de bază $\{(e_r, f_s) \mid r \in R,\ s \in S\}$. Fie aplicaţiile $j_r : R \to T_k(V)$, $j_R(r) = e_r$ şi $j_S : S \to T_k(V)$, $j_S(s) = f_s$.

Considerăm acum I idealul lui $T_k(V)$ generat de toate elementele de forma:

$$\begin{array}{cccc} e_{r+r'} - e_r - e_{r'} & e_{rr'} - e_r \cdot e_{r'} & e_{\alpha r} - \alpha e_r & e_{1_R} - 1_k \\ f_{s+s'} - f_s - f_{s'} & f_{ss'} - f_s \cdot f_{s'} & f_{\alpha s} - \alpha f_s & f_{1_S} - 1_k \end{array}$$

pentru orice $r,\ r' \in R,\ s,\ s' \in S,\ \alpha \in k$.

Definim $R * S = T_k(V)/I$. Fie $i_R = \pi \circ j_R$, $i_S = \pi \circ j_S$, unde π este proiecţia canonică $T_k(V) \to R * S$. Se vede că i_R şi i_S sînt morfisme de algebră. Avem atunci următoarea proprietate de universalitate:

Teoremă 3.2.3. Fie R, S două algebre. Produsul lor liber $R * S$ este o algebră, împreună cu două morfisme de algebră $i_R : R \to R * S$, $i_S : S \to R * S$ astfel încît pentru orice algebră T şi orice morfisme de algebră $u : R \to T$, $v : S \to T$, există un unic morfism de algebre $w : R * S \to T$, astfel încît $wi_R = u$ şi $wi_S = v$. ■

Cînd nu există riscul de confuzie, vom numi cele două aplicaţii i_R şi i_S *incluziuni*.

Cu această construcţie, care are proprietatea de universalitate de mai sus, demonstrăm următoarea:

Teoremă 3.2.4. Fie R, S două algebre formal netede. Atunci produsul lor liber, $R * S$, este o algebră formal netedă.

Demonstraţie: Fie $p : E \to T$ morfism surjectiv de algebre, cu nucleu nilpotent şi fie un morfism de algebre $f : R * S \to T$. Vrem să folosim din nou Prop. 2.1.1.3, adică să existe $g : R * S \to R$ un morfism de algebre, astfel încît $pg = f$.

Fie i_R şi i_S incluziunile de mai sus. Cum R e formal netedă, există $u : R \to E$, $pu = fi_R$. La fel, cum S e formal netedă, există $v : S \to E$, $pv = fi_S$. Atunci, din proprietatea de universalitate a produsului liber de algebre, Teorema 3.2.3, există şi este unic $g : R * S \to E$, astfel încît $gi_R = u$ şi $gi_S = v$.

Dar acum, $(pg)i_R = fi_R$ şi $(pg)i_S = fi_S$ şi, din partea de unicitate, $pg = f$. ■

3.2.3. Produsul tensorial de algebre

Fie R, S două k algebre şi $S \otimes R = S \otimes_k R$. Structura de algebră este dată "pe componente", i.e. $(s \otimes r) \cdot (s' \otimes r') = ss' \otimes rr'$.

Cu aceasta, avem următoarea:

Teoremă 3.2.5. Fie R, S două k-algebre. Dacă S este separabilă şi R e formal netedă, atunci $S \otimes R$ este o algebră formal netedă.

Demonstraţie: Fie $p : E \to S \otimes R$ un morfism surjectiv algebre, cu $(Kerp)^2 = 0$. Vrem să folosim Prop. 2.1.1.2 şi Cor. 2.2.1, adică vrem să găsim o secţiune a lui p, care să fie morfism de algebre.

Cum S e separabilă, în particular, e formal netedă, deci există $u : S \to E$ astfel încît $pu = i_S$, unde $i_S : S \hookrightarrow S \otimes R$, $i_S(s) = s \otimes 1_R$. Acum, E este S-bimodul via u şi $S \otimes R$ devine S-bimodul, cu $s \cdot (s' \otimes r) = (ss') \otimes r$, $(s' \otimes r) \cdot s = (s's) \otimes r$. Atunci avem şirul exact:

$$0 \to Kerp \to E \to S \otimes R \to 0 \text{ în } {}_R\mathcal{M}_R.$$

Dar $HH^1(S, Kerp) = 0$, deoarece S e separabilă, atunci în coomologie, şirul de mai sus devine:

$$0 \to HH^0(S, Kerp) \to HH^0(S, E) \to HH^0(S, S \otimes R) \to 0.$$

Dar ştim că primul grup de coomologie Hochschild este grupul invarianţilor la acţiunea "coeficientului" (cf. calculelor de la finalul secţiunii 2.3). Atunci şirul devine:

$$0 \to (Kerp)^S \to E^S \to (S \otimes R)^S \to 0.$$

Dar $((Kerp)^S)^2 \subseteq (Kerp)^2 = 0$, deci şirul este o extindere din $Ext((S \otimes R)^S, (Kerp)^S)$. Fie $i_R : R \to S \otimes R$, $i_R(R) = 1_S \otimes r$. Dar $i_R(R) \subseteq (S \otimes R)^S$ şi cum R e formal netedă, rezultă că există $v : R \to E^S$, cu $pv = i_R$. Deoarece $v(R) \subseteq E^S \Rightarrow v(r)u(s) = u(s)v(r)$ şi, din Teorema 3.2.1 există un unic $f : S \otimes R \to E$ astfel încît $fi_R = v$, $fi_S = u$. Atunci, din $(pf)i_R = i_R$ şi $(pf)i_S = i_S$, rezultă că $pf = Id_{S \otimes R}$. ■

4

PERECHI KOSZUL

În acest capitol, vom studia (co)omologia unor obiecte noi, anume coinele graduate. Vom face acest lucru prin intermediul unor perechi pe care le vom numi aproape Koszul, formate dintr-o algebră şi o coalgebră, ambele graduate, şi cu o anumită proprietate de legătură între ele. Prezentînd apoi ce înseamnă o rezoluţie a unui coinel graduat într-o categorie de comodule, vom putea calcula grupurile de omologie. Adăugînd o proprietate suplimentară (de natură omologică) perechilor aproape Koszul, vom defini perechile Koszul şi vom regăsi cu ajutorul lor algebrele Koszul (pătratice) din [BGS] sau [PP]. Prezentarea urmăreşte îndeaproape abordarea din [JPŞ1] şi [BGS].

4.1. Preliminarii

Începem prezentarea prin a aminti definiţiile şi proprietăţile elementare ale obiectelor pe care le vom studia în continuare: R-inele, R-coinele (pe cazul graduat, dar şi negraduat), unde R este un inel semisimplu, C-comodule (unde C este o R-coalgebră) ş.a.

A se observa faptul că vom lucra peste un inel (necomutativ) semisimplu, R, pe care îl considerăm fixat. Această prezentare extinde, deci, cazul structurilor peste corpuri comutative (aşa cum s-a procedat în capitolele anterioare).

Ca notaţii, vom nota aplicaţia identică a unui obiect X prin I_X. Produsul tensorial neindexat va însemna $\otimes_R$.

Definiţie 4.1.1. Un R-inel este o algebră asociativă şi unitară în categoria R-bimodulelor, ${}_R\mathcal{M}_R$.

Pentru a clarifica şi mai mult definiţia, amintim exemplul cel mai des întîlnit, anume din categoria k-spaţiilor vectoriale (k-corp comutativ, vezi, de ex. foarte buna prezentare din [DNR], Cap. 1.). O algebră în categoria k-spaţiilor vectoriale, (monoidală faţă de un produs tensorial $\otimes$) $\mathcal{C}$ este un triplet (A, M, u), cu A

obiect în $\mathcal{C}$, M un morfism $A \otimes A \to A$, iar u este un morfism $A \to k$, astfel încît diagramele sînt comutative ($\otimes = \otimes_k$):

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "M \otimes I_A"] \arrow[d, "I_A \otimes M"] & A \otimes A \arrow[d, "M"] \\
A \otimes A \arrow[r, "M"] & A
\end{tikzcd}$$

Această proprietate este numită proprietatea de *asociativitate* a algebrei, iar

$$\begin{tikzcd}
 & A \otimes A \arrow[dd, "M"'] & \\
k \otimes A \arrow[ur, "u \otimes I_A"] \arrow[dr, "\simeq"'] & & A \otimes k \arrow[ul, "I_A \otimes u"'] \arrow[dl, "\simeq"] \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

diagramă care reprezintă *proprietatea unităţii* a morfismului u (i.e. faptul că el joacă rol de unitate, atît la stînga, cît şi la dreapta).

Vedem, deci, că un R-inel înseamnă un inel A, care este, în acelaşi timp şi R-bimodul, astfel încît structurile să fie compatibile.

Definiţie 4.1.2. Un R-inel A se numeşte graduat (sau $\mathbb{N}$-graduat) dacă admite o descompunere de forma $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A^n$ în sumă directă de R-bimodule şi înmulţirea inelului A, $m : A \otimes A \to A$ duce $A^p \otimes A^q$ în A^{p+q}, $\forall p, q \in \mathbb{N}$.

Astfel definit, se vede că morfismul m induce, la nivel de componente, o aplicaţie R-biliniară $m^{p,q} : A^p \otimes A^q \to A^{p+q}$, $\forall p, q \in \mathbb{N}$. Dacă aplicaţiile $m^{p,q}$ sînt surjective, numim R-inelul *tare graduat*. A se observa că, dacă pe cazul graduat puteam scrie $A^m \cdot A^n \subseteq A^{m+n}$, în cazul tare graduat, incluziunea se transformă în egalitate.

Definiţie 4.1.3. Un R-inel A se numeşte conex dacă este graduat şi $A^0 = R$.

Vom nota idealul generat de componentele omogene nenule prin $\overline{A} = \bigoplus_{n>0} A^n$. Avem că înmulţirea m de pe A induce o aplicaţie de bimodul $\overline{m} : \overline{A} \otimes \overline{A} \to \overline{A}$. De asemenea, vom nota proiecţia $A \to A^n$ prin π_A^n.

O construcţie similară se poate face şi peste R^{op}, inelul opus, iar A devine şi un R^{op}-inel (cu altă structură, desigur, dată de compunerea structurii de R-inel cu o aplicaţie de forma $\tau_{V,W} : V \otimes_{R^{op}} W \to W \otimes_R V$, definită pentru orice R-bimodule V, W). Mulţimea A înzestrată cu această structură o vom nota A^{op} şi o vom numi *opusul R^{op}-inelului A*.

Dualizînd, obţinem următoarele:

Definiţie 4.1.4. Un R-coinel este o coalgebră coasociativă şi counitară, în categoria ${}_R\mathcal{M}_R$.

Pentru clarificare, amintim definiţia coalgebrei în categoria k-spaţiilor vectoriale, care se obţine dualizînd construcţia din ${}_k\mathcal{M}$ ce a urmat definiţiei 4.1.1. Aşadar, o *coalgebră* în categoria k-spaţiilor vectoriale, este un triplet (C, Δ, ε), format dintr-un k-spaţiu vectorial C, un morfism de spaţii vectoriale $\Delta : C \to C \otimes_k C$ (numit *comultiplicare*) şi un morfism de k-spaţii vectoriale $\varepsilon : C \to k$, astfel încît diagramele de mai jos sînt comutative:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"] & C \otimes_k C \arrow[d, "\Delta \otimes_k I_C"] \\ C \otimes_k C \arrow[r, "I_C \otimes_k \Delta"] & C \otimes_k C \otimes_k C \end{tikzcd}$$

(comutativitatea acestei diagrame se mai numeşte *coasociativitatea* coalgebrei C) şi

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\simeq"'] \arrow[dr, "\simeq"] \arrow[dd, "\Delta"] & \\ k \otimes_k C & & C \otimes_k C \\ & C \otimes_k C \arrow[ul, "\varepsilon \otimes_k I_C"] \arrow[ur, "I_C \otimes \varepsilon"'] & \end{tikzcd}$$

(comutativitatea celor două triunghiuri se cheamă *proprietatea counităţii* ε).

Notaţia consacrată pentru imaginea unui element $c \in C$ prin comultiplicarea Δ este notaţia sigma, a lui Sweedler, anume $\Delta(c) = \sum c_1 \otimes_k c_2$. Cu această notaţie, coasociativitatea se scrie $\sum c_{1_1} \otimes_k c_{1_2} \otimes_k c_2 = \sum c_1 \otimes_k c_{2_1} \otimes_k c_{2_2}$, iar proprietatea counităţii: $\sum \varepsilon(c_1)c_2 = \sum c_1 \varepsilon(c_2) = c$.

În aceasta categorie, morfismele sînt următoarele: Dacă $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ şi $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ sînt două k-coalgebre (i.e. coalgebre în categoria ${}_k\mathcal{M}$), iar $f : C \to D$ este un morfism k-liniar, atunci el este morfism de coalgebre, dacă şi numai dacă face următoarea diagramă comutativă:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes_k C \arrow[r, "f \otimes_k f"] & D \otimes_k D \end{tikzcd}$$

Definiţie 4.1.5. Un R-coinel (C, Δ, ε) se numeşte graduat dacă $\varepsilon\,|_{C_m} = 0$, $\forall m > 0$ şi comultiplicarea $\Delta(C_n) \subseteq \bigoplus_{p=0}^{n} C_p \otimes_k C_{n-p}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dacă, în plus, $C_0 = R$, spunem că avem un coinel conex.

Similar cu cazul dual, vom nota proiecţia lui C pe C_n prin π_n^C.

Dacă avem un R-coinel graduat, atunci comultiplicarea sa este formată dintr-o familie de aplicaţii de R-bimodul $\Delta_{p,q} : C_{p+q} \to C_p \otimes_k C_q$ şi, luînd în calcul faptul că notaţia sigma introduce indici suplimentari, se impune adaptarea ei la acest caz. Vom nota, deci $\Delta_{p,q}(c) = \sum c_{1,p} \otimes_k c_{2,q}$, înţelegînd că prima componentă a diagonalizării provine din C_p, iar a doua, din C_q. Proprietatea de coasociativitate a unui R-coinel graduat se scrie, atunci (pentru toţi $p, q, r \in \mathbb{N}$ şi $c \in C_{p+q+r}$):

$$\sum c_{1,p+q_{1,p}} \otimes c_{1,p+q_{2,q}} \otimes c_{2,r} = \sum c_{1,p} \otimes c_{2,q+r_{1,q}} \otimes c_{2,q+r_{2,r}} = \sum c_{1,p} \otimes c_{2,q} \otimes c_{3,r}.$$

De asemenea, proprietatea counităţii, în cazul graduat se scrie:

$$\sum \varepsilon(c_{1,0}) c_{2,n} = \sum c_{1,n} \varepsilon(c_{2,0}) = c, \ \forall c \in C_n.$$

Ca şi în celălalt caz, putem defini o structură opusă de R^{op}-coinel, cu aceeaşi counitate, dar cu comultiplicarea compusă cu inversa aplicaţiei (în notaţiile de mai sus) $\tau_{C,C}^{-1}$. Structura aceasta se va nota cu C^{op}.

Vom mai folosi, de asemenea, şi noţiunea de comodule, peste un R-coinel C. Avem următoarele:

Definiţie 4.1.6. Un C-comodul stîng M este o pereche $(M, {}^M\rho)$ formată dintr-un R-modul stîng M şi un morfism de module stîngi ${}^M\rho : M \to C \otimes M$ astfel încît diagramele următoare să fie comutative:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "{}^M\rho"'] \arrow[d, "{}^M\rho"] & C \otimes M \arrow[d, "\Delta\otimes I_M"] \\ C \otimes M \arrow[r, "I_C\otimes {}^M\rho"'] & C \otimes C \otimes M \end{tikzcd} \quad \text{şi} \quad \begin{tikzcd} M \arrow[rd, "\simeq"] \arrow[d, "{}^M\rho"] & \\ C \otimes M \arrow[r, "\varepsilon\otimes I_M"'] & R \otimes M \end{tikzcd}$$

Notaţia sigma pentru comodule stîngi este ${}^M\rho(m) = \sum m_{-1} \otimes m_0$.

Similar se defineşte şi conceptul de C-comodul drept, ca fiind o pereche (M, ρ^M), care satisface proprietăţile corespunzătoare. Notaţia sigma pentru comodule drepte este $\rho^M(m) = \sum m_0 \otimes m_1$.

În categoria comodulelor drepte (de exemplu), un morfism între (M, ρ^M) şi

(N, ρ^N) este o aplicaţie R-liniară $g : M \to N$ care face diagrama comutativă:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\rho^M"'] & N \arrow[d, "\rho^N"] \\ M \otimes C \arrow[r, "g \otimes I_C"] & N \otimes C \end{tikzcd} \tag{4.1.1}$$

Un $C-$ *bicomodul* M înseamnă o mulţime pe care s-a dat o structură de C-comodul drept (notată ρ^M), o structură de C-comodul stîng (notată ${}^M\rho$) şi între ele există relaţia de compatibilitate $({}^M\rho \otimes I_C) \circ \rho^M = (I_C \otimes \rho^M) \circ {}^M\rho$.

Considerăm cunoscut faptul că în categoria (bi)comodulelor, epimorfism înseamnă morfism surjectiv, monomorfism înseamnă morfism injectiv, deci izomorfism înseamnă morfism bijectiv.

Vom nota categoriile de C-module stîngi, drepte şi C-comodule prin ${}^C\mathcal{M}$, $\mathcal{M}^C$, respectiv ${}^C\mathcal{M}^C$.

4.2. Perechi aproape Koszul

În cele ce urmează, vom introduce noţiunea de perechi aproape Koszul, formate dintr-un R-inel şi un R-coinel, cu o anumită legătură între ele. Apoi vom arăta că, dat un R-inel, există (şi chiar "la îndemînă") un R-coinel, care să întregească perechea aproape Koszul, precum şi construcţia duală. Vom caracteriza omologic aceste perechi, prin intermediul rezoluţiilor în diverse categorii (de module, comodule, bimodule şi bicomodule), iar în finalul secţiunii, vom realiza o legătură între toate rezoluţiile asociate.

Definiţie 4.2.1. Spunem că o pereche (A, C) se numeşte aproape Koszul, dacă A este un R-inel conex, C este un R-coinel conex şi există un izomorfism R-biliniar $\theta_{C,A} : C_1 \to A^1$, astfel încît morfismul format din compunerea de mai jos să fie nul:

$$C_2 \xrightarrow{\Delta_{1,1}} C_1 \otimes C_1 \xrightarrow{\theta_{C,A} \otimes \theta_{C,A}} A^1 \otimes A^1 \xrightarrow{m^{1,1}} A^2. \tag{4.2.1}$$

Cu ajutorul notaţiei sigma pentru cazul graduat, nulitatea morfismului de mai sus se poate scrie şi:

$$\sum \theta_{C,A}(c_{1,1})\theta_{C,A}(c_{2,1}) = 0, \ \forall c \in C_2. \tag{4.2.2}$$

Desigur, dată o pereche aproape Koszul (A, C), i se asociază canonic o pereche aproape Koszul (A^{op}, C^{op}) (de obiecte considerate cu structuri peste R^{op}), iar izomorfismul din definiţie este $\theta_{C^{op}, A^{op}}$.

În continuare, vom folosi rezoluţia bar (normalizată) a lui R în categoria $\mathcal{M}_A$. Pentru a reaminti construcţia acestei rezoluţii, indicăm [Rotman], p. 528 pentru o construcţie "naturală", calculatorie, în categoria grupurilor, [Weibel], p. 283 pentru o abordare categorială folosind (co)monade, aplicată în categoria grupurilor şi modulelor sau [McLCat], p. 137, 180, pentru construcţia categorială, cea mai generală. De asemenea, vom prezenta un rezumat cuprinzător al principalelor construcţii şi rezultate necesare în anexă. Scopul este să arătăm că, dat un R-inel A, conex, tare graduat, există un R-coinel C care face ca perechea (A, C) să fie aproape Koszul.

Folosind rezultatele din secţiunea a treia a anexei, avem că rezoluţia bar normalizată a lui R în categoria $\mathcal{M}_A$, notată $(\overline{\beta}^r_\bullet(A), \overline{\delta}_\bullet)$ este formată din şirul exact următor:

$$0 \leftarrow R \overset{\overline{\delta_0}}{\leftarrow} A \overset{\overline{\delta}_1}{\leftarrow} \overline{A} \otimes A \leftarrow \cdots \leftarrow \overline{A}^{\otimes(n-1)} \otimes A \overset{\overline{\delta}_n}{\leftarrow} \overline{A}^{\otimes n} \otimes A \leftarrow \ldots \tag{4.2.3}$$

iar diferenţialele sînt $\overline{\delta_0} = \pi^0_A$ şi $\overline{\delta}_n(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}$.

De asemenea, conform [Weibel], p. 283 (redat şi în anexă), şirul $\overline{\beta}^r_\bullet$ este exact şi formează o rezoluţie proiectivă a lui R. Aceasta deoarece am pornit cu R inel semisimplu, deci $\overline{A}^{\otimes\bullet}$ este proiectiv în $\mathcal{M}_R$, deci şi $\overline{A}^{\otimes\bullet} \otimes A$ este proiectiv, în $\mathcal{M}_A$. Atunci omologia (Hochschild a) complexului bar normalizat asociat este dată de aplicarea functorului $Tor^A_\bullet(R, R)$. Aşadar, după tensorizare la dreapta cu R şi făcînd identificările naturale, obţinem complexul $(\Omega_\bullet(A), \partial_\bullet)$, unde $\Omega_n(A) = \overline{A}^{\otimes n}$ (cu convenţia $\overline{A}^{\otimes 0} = R$). Aplicaţiile sînt: $\partial_1 = 0$, iar $\partial_n = \overline{\delta}_{n-1}\,|_{\Omega_n(A)}$. Se observă, de asemenea, că $\Omega_\bullet(A) = \overline{\beta}^r_\bullet(A)/A$.

Vom folosi notaţiile $T_n(A) = H_n(\Omega_\bullet(A)) = Tor^A_\bullet(R, R)$ şi $T(A) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} T_n(A)$. Clasa de omologie a lui $x \in \overline{A}$ în $T_1(A)$ o vom nota $[x]$.

Similar, avem şi rezoluţia normalizată bar la stînga, definită prin $\overline{\beta}^l_\bullet(A) = \overline{\beta}^r_\bullet(A^{op})$.

Vom arăta acum că, dat un R-inel, în putem găsi "perechea", în sens aproape Koszul. Amintim din secţiunea 3.2.1 că, dat un bimodul, putem construi algebra tensorială asociată, care are o structură de algebră într-adevăr. Mai mult, dat un R-bimodul V, notăm $T^c_R(V) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} V^{\otimes n}$ algebra tensorială în sensul dezvoltat în secţiunea 3.2.1. Indicele superior c apare deoarece dăm o structură de coalgebră (sau de R-coinel graduat) graduată pe algebra tensorială. Fie $\Delta_{p,q}$ izomorfismul obişnuit $V^{\otimes(p+q)} \xrightarrow{\simeq} V^{\otimes p} \otimes V^{\otimes q}$. Aceasta va fi comultiplicarea, iar counitatea este proiecţia lui $T^c_R(V)$ pe R, care este componenta omogenă de grad zero. E uşor de verificat că într-adevăr am definit o structură de coalgebră, i.e. că avem o comultiplicare coasociativă şi că este respectată proprietatea counităţii. Pregătim acum rezultatul anunţat.

Lemă 4.2.1. Există o structură canonică de R-coinel-lanţ (adică de R-coinel în categoria complexelor de lanţuri de coinele) pe $\Omega(A) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \overline{A}^{\otimes n}$. În particular, T(A) este R-coinel conex, iar $T_1(A) = Coker(\overline{m} : \Omega_2(A) \to \Omega_1(A))$.

Demonstraţie: Demonstraţia este oarecum tehnică, aşa că vom prezenta raţionamentul principal, indicînd ca referinţe, pentru detalii, [JPŞ1], Lema 1.7, p. 4

sau [PP], Capitolul 1.1.

Să observăm că $\Omega(A) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}}$ şi $T_R^c(\overline{A})$ au aceleaşi componente omogene, deci constituie acelaşi R-bimodul. Deci şi $\Omega(A)$ este un R-coinel conex, graduat, cu structura de pe $T_R^c(V)$ de mai sus, cu $V = \overline{A}$.

Pentru a arăta că $\Omega(A)$ este chiar R-coinel-lanţ, să amintim că avem o categorie monoidală, aceea a complexelor de lanţuri de R-bimodule, cu produsul tensorial obişnuit. Astfel, produsul tensorial al două complexe de laţuri de bimodule $(C_\bullet, d_\bullet^C)$ şi $(D_\bullet, d_\bullet^D)$ este lanţul $(K_\bullet, d_\bullet)$, care are componentele $K_n = \bigoplus_{p=0}^{n} C_p \otimes D_{n-p}$ şi $d_n = d_p^C \otimes D_{n-p} + (-1)^p C_p \otimes d_{n-p}^D$. Astfel, comultiplicarea $\Delta_{p,q}$ de pe $\Omega(A)$, care este aceeaşi cu cea de pe $T_R^c(\overline{A})$ este chiar un morfism de complexe de lanţuri. Counitatea $\varepsilon : \Omega(A) \to R$, care este proiecţia pe componenta zero, este şi ea morfism de complexe, putînd-o privi ca zero pe componentele de grad nenul, unde R este un complex concentrat în grad zero.

Deci $\Omega(A)$ este coinel-lanţ. Iar bimodulele de omologie formează un coinel graduat, de unde $T(A)$ este R-coinel graduat, conex. ■

Avem acum rezultatul anunţat:

Propoziţie 4.2.1. Dat A un R-inel conex, tare graduat, atunci (cu notaţiile de mai sus) perechea $(A, T(A))$ este aproape Koszul.

Demonstraţie: Să reamintim complexul:

$$\Omega_\bullet(A) : \quad 0 \leftarrow R \xleftarrow{\partial_1 = 0} \overline{A} \xleftarrow{\partial_2} \overline{A} \otimes \overline{A} \xleftarrow{\partial_3} \dots .$$

Atunci, conform definiţiei, $T_1(A) = H_1(\Omega_\bullet(A)) = \dfrac{Ker\partial_1}{Im\partial_2}$. Avem evident $Ker\partial_1 = Ker0 = \overline{A}$. Din nou conform definiţiei, $\partial_2 = \overline{\delta}_1 \mid_{\Omega_2(A)}$, deci $\partial_2(a_1 \otimes a_2) = -a_1a_2 = -m^{1,1}$, $\forall a_{1,2} \in \overline{A}$. Cum $\overline{A} = \bigoplus_{n\geq 1} A^n$, obţinem că $m^{1,1}(\overline{A} \otimes \overline{A}) = \{xy \mid x, y \in \overline{A}\} = \langle xy \mid x \in A^p,\ y \in A^q,\ p,q \in \mathbb{N}^*\rangle$. Deoarece A e tare graduată, avem egalitatea $A^p \cdot A^q = A^{p+q}$, $\forall p,q \in \mathbb{N}$, deci acoperirea R-liniară de mai sus poate fi scrisă şi $\langle xy \mid x \in A^p,\ y \in A^q,\ p,q > 0\rangle = A^2 \oplus A^3 \oplus A^4 \oplus \dots = \overline{A}/A^1$, de unde $T_1(A) = A^1$.

Mai mult, avem că proiecţia canonică $\pi_A^1 : A \to A/A^1$ induce un izomorfism de R-bimodule $\theta_{(T(A),A)} : T_1(A) \to A^1$. De asemenea, dacă $\omega \in T_2(A)$, atunci există $\zeta \in Ker\overline{m}$, cu $[\zeta] = \omega$, de unde $\zeta = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$, pentru nişte $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \overline{A}$ şi astfel încît $m(\zeta) = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i = 0$. Prin definiţie, $\Delta_{1,1}(\omega) = \sum_{i=1}^{n}[x_i] \otimes [y_i]$. Dar, deoarece $x_iy_i - \pi_A^1(x_i)\pi_A^1(y_i) \in \sum_{n>2} A^n$, avem că:

$$\sum_{i=1}^{n}\theta_{T(A),A}([x_i])\theta_{T(A),A}([y_i]) = \sum_{i=1}^{n}\pi_A^1(x_i)\pi_A^1(y_i) = \pi_A^2(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i) = 0.$$

şi astfel $\theta_{T(A),A}$ verifică ecuaţia de legătură a perechii aproape Koszul. ■

În continuare, vom asocia unei perechi aproape Koszul (A, C) trei complexe de colanţuri, în categorii diferite: unul de C-comodule stîngi graduate, unul de C-comodule drepte graduate, iar combinîndu-le pe cele două, obţinem unul de C-bicomodule graduate. Avem nevoie de următoarea:

Lemă 4.2.2. Fie V un R-modul drept. Atunci $V \otimes C$ este un C-comodul drept injectiv. Similar şi pentru C-comodule stîngi.

Demonstraţie: Fie transformarea naturală $\vartheta_{M,V} : Hom_R(M, V) \to Hom^C(M, V \otimes C)$, definită prin $\vartheta_{M,V}(f) = (f \otimes I_C) \circ \rho^M, \forall f \in Hom_R(M, V)$, unde ρ^M este structura de C-comodul drept a lui M. Considerăm şi aplicaţia $\varphi : Hom^C(M, V \otimes C) \to Hom_R(M, V)$, definită prin $\varphi(g) = (V \otimes \varepsilon) \circ g$, $\forall g \in Hom^C(M, V \otimes C)$, unde ε este counitatea lui C. Arătăm că aplicaţiile acestea sînt inverse. Pentru simplitate, vom omite indicii aplicaţiei $\vartheta_{M,V}$. Avem, deci (pentru $m \in M$):

$$\begin{aligned}
(\varphi\vartheta)(f)(m) &= \varphi((f \otimes I_C) \circ \rho^M)(m)\\
&= (V \otimes \varepsilon) \circ [(f \otimes I_C) \circ \rho^M](m)\\
&= (V \otimes \varepsilon) \circ (f \otimes I_C)(\sum m_0 \otimes m_1)\\
&= (V \otimes \varepsilon)(\sum f(m_0) \otimes m_1)\\
&= \sum f(m_0) \otimes \varepsilon(m_1)\\
&= \sum f(\varepsilon(m_1)m_0)\\
&= f(m).
\end{aligned}$$

Pentru penultima egalitate am folosit R-balansarea produsului tensorial şi pentru ultima, proprietatea counităţii. Cealaltă compunere este:

$$\begin{aligned}
(\vartheta\varphi)(g)(m) &= \vartheta((V \otimes \varepsilon) \circ g)(m)\\
&= [((V \otimes \varepsilon) \circ g) \otimes I_C]\rho^M(m)\\
&= (((V \otimes \varepsilon) \circ g) \otimes I_C)(\sum m_0 \otimes m_1)\\
&= \sum((V \otimes \varepsilon) \circ g)(m_0) \otimes m_1\\
&= \sum(V \otimes \varepsilon)(g(m_0)) \otimes m_1.
\end{aligned}$$

Folosind faptul că g este morfism de comodule, adică face diagrama următoare comutativă:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\rho^M"'] & V \otimes C \arrow[d, "I_V \otimes \Delta_C"] \\
M \otimes C \arrow[r, "g \otimes I_C"] & V \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}$$

avem că $(I_V \otimes \Delta_C)g = (g \otimes I_C)\rho^M$, deci următoarele relaţii trebuie să fie egale ($\forall m \in M$ şi pentru $g(m) = \sum_i v_i \otimes c_i,\ v_i \in V,\ c_i \in C$):

$$(I_V \otimes \Delta_C)(g)(m) = (I_V \otimes \Delta_C)(\sum_i v_i \otimes c_i) = \sum_i \sum v_i \otimes c_{i_1} \otimes c_{i_2};$$
$$(g \otimes I_C)\rho^M(m) = (g \otimes I_C)(\sum m_0 \otimes m_1) = \sum g(m_0) \otimes m_1.$$

Înlocuind mai sus, avem:

$$\begin{aligned}\sum (V \otimes \varepsilon)(g(m_0)) \otimes m_1 &= \sum_i \sum (V \otimes \varepsilon)(v_i \otimes c_{i_1} \otimes c_{i_2}) \\ &= \sum_i \sum v_i \otimes \varepsilon(c_{i_1}) \otimes c_{i_2} \\ &= \sum v_i \otimes c_i \\ &= g(m).\end{aligned}$$

unde la penultima egalitate am folosit din nou proprietatea counităţii.

Cum cele două transformări sînt izomorfisme, obţinem că functoriul $Hom^C(-, V \otimes C)$ şi cel obţinut din compunerea $Hom_R(-, V) \circ U$ de la $\mathcal{M}^C$ la categoria grupurilor abeliene sînt izomorfi (am notat cu U functorul uituc $\mathcal{M}^C \to \mathcal{M}_R$). Deoarece R este inel semisimplu, deducem că $Hom^C(-, V \otimes C)$ este exact, deoarece $Hom_R(M, V)$ este. ■

Asociem acum complexele de comodule astfel: fie (A, C) o pereche aproape Koszul. Punem $K_l^n(A, C) = C \otimes A^n$, care devine C-comodul stîng cu comultiplicarea evidentă $\Delta \otimes A^n$, unde Δ este şi structura de coalgebră pe C. Graduarea pe $K_l^n(A, C)$ este indusă de $\mathbb{N}$-graduarea de pe C, "neglijînd" pe A^n. Componenta omogenă de grad p este, deci, $(K_l^n)_p = C_{p-n} \otimes A^n$.

Fie diferenţiala $d_l^n : K_l^n(A, C) \to K_l^{n+1}(A, C)$ definită ca fiind zero pe componenta omogenă de grad zero, i.e. $C_0 \otimes A^n$, iar pentru $p > 0,\ c \otimes a \in C_p \otimes A^n$, definim:

$$d_l^n(c \otimes a) = \sum c_{1,p-1} \otimes \theta_{C,A}(c_{2,1})a,$$

unde $\theta_{C,A} : C_1 \to A^1$ amintim că este morfismul de legătură al perechii aproape Koszul (ec. 4.2.1). Se vede din definiţie că $d_l^n(C_p \otimes A^n) \subseteq C_{p-1} \otimes A^{n+1}$, deci d_l^n este un morfism graduat.

Pentru complexul drept, reamintim că, dată o pereche aproape Koszul (A, C), îi asociem canonic o pereche aproape Koszul opusă, (A^{op}, C^{op}), unde structurile sînt luate peste R^{op}. Putem considera atunci, prin definiţie, $K_r^\bullet(A, C) = K^\bullet(A^{op}, C^{op})$, iar, pe componente, folosind izomorfismul $C^{op} \otimes_{R^{op}} (A^{op})^n \simeq A^n \otimes_R C$, avem $K_r^n(A, C) = A^n \otimes_R C$. De asemenea, diferenţiala are drept componentă de grad n aplicaţia $d_r^n : A^n \otimes C \to A^{n+1} \otimes C$ care este nulă pe componenta omogenă de grad zero $A^n \otimes C_0$, iar pentru $p > 0,\ a \otimes c \in A^n \otimes C_p$,

$$d_r^n(a \otimes c) = \sum a\theta_{C,A}(c_{1,1}) \otimes c_{2,p-1}.$$

Se vede şi de data aceasta că avem de-a face cu un morfism graduat.

Toată această construcţie devine foarte utilă în virtutea rezultatului următor.

Propoziţie 4.2.2. Fie (A,C) o pereche aproape Koszul. Atunci, cu notaţiile de mai sus, $(K_l^\bullet(A,C), d_l^\bullet)$ şi $(K_r^\bullet(A,C), d_r^\bullet)$ sînt complexe de C-comodule stîngi, respectiv drepte, graduate.

Demonstraţie: Faptul că sînt complexe se vede astfel (demonstrăm pentru cel stîng, rezultatul la dreapta reieşind dintr-un argument simetric şi din legătura între cele două): putem presupune $p > 1$, deoarece în grad zero, morfismele sînt nule, iar în grad 1 este evident. Folosind ecuaţia 4.2.1, avem (pentru $c \otimes a \in C_p \otimes A^n$):

$$(d_l^{n+1} \circ d_l^n)(c \otimes a) = d_l^{n+1}(\sum c_{1,p-1} \otimes \theta_{C,A}(c_{2,1})a) = \sum c_{1,p-2} \otimes \theta_{C,A}(c_{1,p-1_{2,1}})\theta_{C,A}(c_{2,1})a.$$

Folosind acum coasociativitatea comultiplicării din C sub forma $\sum c_{1,p-1_{1,p-2}} \otimes c_{1,p-1_{2,1}} \otimes c_{2,1} = \sum c_{1,p-2} \otimes c_{2,2_{1,1}} \otimes c_{2,2_{2,1}}$, în egalitatea de mai sus, obţinem:

$$(d_l^{n+1} \circ d_l^n)(c \otimes a) = \sum c_{1,p-2} \otimes \theta_{C,A}(c_{2,2_{1,1}})\theta_{C,A}(c_{2,2_{2,1}})a = 0.$$

Pentru ultima egalitate am folosit ec. 4.2.1. Deci $K_l^\bullet(A,C)$ este complex.

Rămîne de arătat că diferenţialele sînt morfisme de comodule. Fie, deci, $\rho^n : C \otimes A^n \to C \otimes C \otimes A^n$ structura de C-comodul sîng a lui $K_l^n(A,C)$ (conform construcţiei definitorii a acestui comodul, $\rho^n = \Delta \otimes A^n$). Conform def. 4.1.1, trebuie verificată comutativitatea diagramei:

$$\begin{tikzcd} K_l^n(A,C) \arrow[r, "d_l^n"] \arrow[d, "\rho^n"'] & K_l^{n+1}(A,C) \arrow[d, "\rho^{n+1}"] \\ C \otimes K_l^n(A,C) \arrow[r, "C \otimes d^n"] & C \otimes K_l^{n+1}(A,C) \end{tikzcd}$$

Fie, deci $c \otimes a \in C_p \otimes A^n$. Atunci:

$$\begin{aligned}(C \otimes d_l^n)(\rho^n(c \otimes a)) &= \sum_{r=0}^{p} c_{1,r} \otimes d_l^n(c_{2,p-r} \otimes a) \\ &= \sum_{r=0}^{p} \sum c_{1,r} \otimes c_{2,p-r_{1,p-r-1}} \otimes \theta_{C,A}(c_{2,p-r_{1,1}})a.\end{aligned}$$

Cealaltă latură a pătratului înseamnă:

$$\begin{aligned}\rho^{n+1}(d_l^n(c \otimes a)) &= \rho^{n+1}(\sum c_{1,p-1} \otimes \theta_{C,A}(c_{2,1})a \\ &= \sum_{u=1}^{p-1} c_{1,p-1_{1,u}} \otimes c_{1,p-1_{2,p-1-u}} \otimes \theta_{C,A}(c_{2,1})a.\end{aligned}$$

Coasociativitatea lui $\rho^n = \Delta \otimes A^n$ asigură egalitatea celor două relaţii. ■

În continuare, vom combina cele două complexe de colanţuri pentru a obţine unul singur, din categoria C-bicomodulelor, pe care îl notăm $(K^\bullet(A,C), d^\bullet)$.

Prin definiţie, punem $K^n(A,C) = C \otimes A^n \otimes C$ şi $d^n = d_l^n \otimes C + (-1)^{n+1} C \otimes d_r^n$. Întrucît cele două componente sînt morfisme de comodule, obţinem că d^n este morfism de bicomodule. Din $0 = d_r^{n+1} \circ d_r^n = d_l^{n+1} \circ d_l^n$, avem şi următoarea:

$$d^{n+1} \circ d^n = (-1)^{n+1}[(d_r^{n+1} \otimes C) \circ (C \otimes d_r^n - (C \otimes d_r^{n+1}) \circ (d_l^n \otimes C)].$$

Din faptul că diferenţialele complexelor anterioare sînt morfisme de comodule stîngi, respectiv drepte şi împreună cu asociativitatea înmulţirii lui A, obţinem că $d^{n+1} \circ d^n = 0$, deci $(K^\bullet(A,C), d^\bullet)$ este complex de bicomodule.

Observaţie 4.2.1. Deoarece $d_l^n(C_{m-n} \otimes A^n) \subseteq C_{m-n-1} \otimes A^{n+1}$, $\forall m \in \mathbb{N}$, putem evidenţia un subcomplex al lui $K_l^\bullet(A,C)$, de forma $K_l^\bullet(A,C,m)$, cu componentele $K_l^n(A,C,m) = C_{m-n} \otimes A^n$ şi aceleaşi diferenţiale. Reciproc, putem recompune complexul iniţial din aceste componente prin $K_l^\bullet(A,C) = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} K_l^\bullet(A,C,m)$. Un rezultat similar avem şi pentru complexul drept.

Folosind observaţia anterioară, putem augmenta complexele, adăugînd diferenţiale în grad -1 astfel:

Fie $\overline{K}_l^\bullet(A,C)$ complexul $0 \to \overline{K}_l^{-1}(A,C) \xrightarrow{\overline{d}_l^{-1}} K_l^\bullet(A,C)$, unde componenta în grad -1 o definim $K_l^{-1}(A,C) = R$, iar diferenţiala să fie identitatea, $\overline{d}_l^{-1} = I_R$.

Reluînd construcţia pentru structurile opuse, obţinem augmentarea complexului drept, anume $\overline{K}_r^\bullet(A,C) = \overline{K}_l^\bullet(A^{op}, C^{op})$.

Mai mult, descompunerea în subcomplexe din observaţia anterioară are loc şi pentru complexele augmentate, augmentînd pentru $m = 0$ cu $R \xrightarrow{\simeq} C_0 \otimes A^m$.

Combinînd, putem augmenta şi complexul de bicomodule, punînd $\overline{K}^{-1}(A,C) = C$ şi $\overline{d}^{-1} = \Delta$.

Mai departe, vom dualiza rezultatele de pînă acum şi începem cu rezoluţia bar normalizată a lui R în categoria $\mathcal{M}^C$. Rezultatul principal va fi dual Propoziţiei 4.2.1, în sensul că vom porni cu un R-coinel tare graduat şi-i vom găsi perechea, în sens aproape Koszul.

Dacă C este un R-coinel conex, atunci R devine C-comodul drept cu acţiunea trivială, dată de $\rho^C(r) = r \otimes 1_C$. Dacă $\overline{C} = C/C_0$, atunci comultiplicarea lui C induce o unică aplicaţie $\overline{\Delta} : \overline{C} \to \overline{C} \otimes \overline{C}$, din proprietatea de universalitate a obiectelor factor, şi $\overline{\Delta} \circ p_C = (p_c \otimes p_C) \circ \Delta$, i.e. avem diagrama comutativă:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "p_C"] \arrow[d, "\Delta"] & \overline{C} = C/C_0 \arrow[d, dotted, "\overline{\Delta}"] \\ C \otimes C \arrow[r, "p_C \otimes p_C"] & \overline{C} \otimes \overline{C} \end{tikzcd}$$

Definim, de asemenea, $\tilde{\Delta} : C \xrightarrow{\Delta} C \otimes C \xrightarrow{p_C \otimes I_C} \overline{C} \otimes C$. Atunci rezoluţia bar normalizată la dreapta a lui R este şirul exact:

$$\overline{\beta}_r^\bullet(C) : \quad 0 \to R \hookrightarrow C \xrightarrow{\overline{\delta}^0} \overline{C} \otimes C \to \cdots \to \overline{C}^{\otimes n} \otimes C \xrightarrow{\overline{\delta}^n} \overline{C}^{\otimes (n+1)} \otimes C \to \ldots.$$

Aplicaţiile sînt $\overline{\delta}^n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \overline{C}^{\otimes (i-1)} \otimes \overline{\Delta} \otimes \overline{C}^{\otimes (n-i)} \otimes C + (-1)^n \overline{C}^{\otimes n} \otimes \tilde{\Delta}$. Similar se defineşte şi rezoluţia la stînga.

Putem aplica acum $Ext_C^\bullet(R, R)$, mai întîi considerînd $Hom^C(R, -)$ aplicat lui $\overline{\beta}_r^\bullet(C)$ şi folosind izomorfismul functorial $\theta_{R,-}$ din Lema 4.2.2. Se obţine complexul:

$$0 \to \Omega^0(C) \xrightarrow{\partial^0} \Omega^1(C) \xrightarrow{\partial^1} \cdots \to \Omega^n(C) \xrightarrow{\partial^n} \Omega^{n+1}(C) \to \ldots,$$

în care $\Omega^n(C) = \overline{C}^{\otimes n}$ (din nou, cu convenţia $\overline{C}^{\otimes 0} = R$. Diferenţialele sînt date de $\partial^0 = 0$, iar $\partial^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i-1} \overline{C}^{\otimes (i-1)} \otimes \overline{\Delta} \otimes \overline{C}^{\otimes (n-i)}$.

Vom folosi notaţiile $E^n(C) = H^n(\Omega^\bullet(C))$ şi $E(C) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} E^n(C)$.

Mai departe, structura de algebră a algebrei tensoriale asociate R-bimodulului V (notată $T_R^a(V)$) este indusă de înmulţirea $m^{p,q} : V^{\otimes p} \otimes V^{\otimes q} \xrightarrow{\simeq} V^{\otimes (p+q)}$, iar unitatea este incluziunea $R \hookrightarrow T_R^a(V)$. Cu acestea, duala Lemei 4.2.1 este:

Lemă 4.2.3. Există o structură canonică de R-inel de colanţuri pe $\Omega(C) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \overline{C}^{\otimes n}$. În particular, $E(C) = Ext_C^\bullet(R, R)$ este R-inel conex, iar $E^1(C) = Ker\overline{\Delta}$. ■

Să clarificăm acum noţiunea de *coinel tare graduat*. Dacă $\Delta_{p,q} : C_{p+1} \to C_p \otimes C_q$ sînt componentele comultiplicării unui coinel conex C, definim $\Delta(n) : C_n \to C_1^{\otimes n}$ inductiv, prin compunerea:

$$C_n \xrightarrow{\Delta_{1,n-1}} C_1 \otimes C_{n-1} \xrightarrow{I_{C_1} \otimes \Delta(n-1)} C_1^{\otimes n}. \tag{4.2.4}$$

Coasociativitatea componentelor comultiplicării $\Delta_{p,q}$ implică $\Delta(p+1) = (\Delta(p) \otimes \Delta(q)) \circ \Delta_{p,q}$.

Definiţie 4.2.2. Coinelul C se numeşte tare graduat dacă fiecare $\Delta(n)$ este injectiv.

Observaţie 4.2.2. Din relaţia de mai sus avem că $\Delta(n)$ este injectiv $\Leftrightarrow \Delta_{p,q}$ este injectiv, $\forall p,q$. Cum fiecare componentă a comultiplicării se poate descopune în una care are 1 pe prima sau pe a doua poziţie, echivalenţa poate continua cu $\Leftrightarrow \Delta_{1,n}$ injectivă, $\forall n \;\Leftrightarrow \Delta_{n,1}$ injectivă, $\forall n$.

Rezultatul dual Propoziţiei 4.2.1 este:

Propoziţie 4.2.3. Fie C un R-coinel tare graduat. Atunci perechea $(E(C), C)$ este aproape Koszul.

Demonstraţie: Ştim că $E^\bullet(C)$ este un R-inel conex. Notînd $\overline{C}_n = p_C(C_n)$, avem $\overline{C} = \bigoplus\limits_{n>0} \overline{C}_n$, iar p_C este injectivă pe toate $C_n,\ n > 0$. În particular, $\overline{C}_n \simeq C_n$.

Să notăm $\theta : C_1 \to \overline{C}_1$ restricţia lui p_C la C_1. Vom folosi acest morfism pentru a construi morfismul de legătură al perechii aproape Koszul. Deoarece $\Delta_{0,1}(c) = 1 \otimes c$ şi $\Delta_{1,0}(c) = c \otimes 1$, avem că $\overline{\Delta}(\theta(C_1)) = 0$, deci $E^1(C) = Ker\overline{\Delta} \supseteq \theta(C_1)$. Privind, deci, $\theta : C_1 \to E^1(C)$, arătăm că joacă rolul morfimsului de legătură $\theta_{C,E(C)}$, i.e. că respectă ec. 4.2.1.

Deoarece $\theta = p_C\mid_{C_1}$, iar $\overline{\Delta} \circ p_C = (p_C \otimes p_C) \circ \Delta$, pentru $c \in C_2$, şi $B^2 = Im(\partial^1 : \Omega^1(C) \to \Omega^2(C))$avem că:

$$\begin{aligned}\sum \theta(c_{1,1}) \cdot \theta(c_{2,1}) &= \sum p_C(c_{1,1}) \otimes p_C(c_{2,1}) + B^2(C)\\ &= \overline{\Delta}(p_C(c)) + B^2(C)\\ &= \partial^1(p_C(c)) + B^2(C) = 0.\end{aligned}$$

Am folosit definiţia morfismului $\theta : C \to E(C)$, precum şi aceea a diferenţialei $\partial^1 = \overline{\Delta}$.

Mai trebuie să arătăm că θ este bijectivă. Dacă $p_C(c) \in Ker\overline{\Delta}$, fie $c = \sum\limits_{n=0}^{d} c_n$, cu $c_n \in C_n$. Vrem $c_n = 0, \forall n \geq 2$. Să calculăm:

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{d}\sum_{r=1}^{n-1}(p_C \otimes p_C)(\Delta_{r,n-s}(c_n)) &= \sum_{n=0}^{d}\sum_{r=0}^{n}(p_C \otimes p_C)(\Delta_{r,n-r}(c_n))\\ &= (p_C \otimes p_C)(\Delta(c)) = \overline{\Delta}(p_C(c)) = 0.\end{aligned}$$

Pentru un $n \geq 2$ fixat, $(p_C \otimes p_C)(\Delta_{r,n-r}(c_n)) \in \overline{C}_r \otimes \overline{C}_{n-r}$, obţinem, conform calculelor de mai sus, că acest element este nul pentru $0 < r < n$, iar deoarece $p_C \otimes p_C : C_r \otimes C_{n-r} \xrightarrow{\sim} \overline{C}_r \otimes \overline{C}_{n-r}$, deducem că $\Delta_{r,n-r}(c_n) = 0$. Cum C e tare graduată, deci componentele comultiplicării sînt injective, avem că nucleul lui $\overline{\Delta}$ este inclus în $\overline{C}_1$, iar cealaltă incluziune este clară. ■

Să reamintim acum noţiunile elementare privitoare la produsul cotensorial. Pentru detalii, ne referim la [BrzW], p. 217-219.

Definiţie 4.2.3. Fie (N, ρ^N) şi $(M, {}^M\rho)$ două C-comodule. Produsul cotensorial $N\square_C M$ este definit ca nucleul aplicaţiei $\rho^n \otimes I_M - I_N \otimes {}^M\rho$.

De asemenea, dacă V este un R-modul, atunci $V \otimes C$ devine C-comodul drept cu acţiunea dată de $I_V \otimes \Delta_C$. Dacă M este un C-comodul stîng peste R-coinelul C, atunci avem un izomorfism:

$$\zeta : (V \otimes C)\Box_C M \to V \otimes M, \ \ \zeta(\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes c_i \otimes m_i) = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes \varepsilon(c_i) m_i. \tag{4.2.5}$$

Aplicaţia inversă trimite $v \otimes m \mapsto \sum v \otimes m_{-1} \otimes m_0$. În particular, avem că $C\Box_C M \simeq M$, ca R-bimodule.

În plus, dacă C este un R-coinel (conex), atunci R are structură de C-comodul stîng şi drept, trivială. În acest caz, $R\Box_C M \simeq M^{coC}$, unde $M^{coC} = \{m \in M \mid {}^M\rho(m) = 1 \otimes m\}$ este mulţimea coinvarianţilor comodulului stîng M faţă de coacţiunea ${}^M\rho$.

În continuare, construim complexele duale celor din categoriile de (bi)comodule de mai sus.

Fie complexul $(K^r_\bullet(A, C), d^r_\bullet)$, ale cărui componente sînt $K^r_n(A, C) = C_n \otimes A \in \mathcal{M}_R$, iar diferenţiala $d^r_n : C_n \otimes A \to C_{n-1} \otimes A$ dată de:

$$d^r_n(c \otimes a) = \sum c_{1,n-1} \otimes \theta_{C,A}(c_{2,1})a.$$

De asemenea, lucrînd peste structura opusă (A^{op}, C^{op}), avem şi complexul stîng $(K^l_\bullet(A, C), d^l_\bullet)$, de componente $K^l_n(A, C) = A \otimes C_n \in {}_A\mathcal{M}$, iar diferenţialele $d^n_l : A \otimes C_n \to A \otimes C_{n-1}$:

$$d^n_l(a \otimes c) = \sum a\theta_{C,A}(c_{1,1}) \otimes c_{2,n-1}.$$

Combinînd, avem complexul de A-bimodule $(K_\bullet(A, C), d_\bullet)$ dat de:

$$K_n(A, C) = A \otimes C_n \otimes A \in {}_A\mathcal{M}_A \text{ şi } d_n = d^l_n \otimes A + (-1)^n A \otimes d^r_n.$$

Observaţie 4.2.3. Ca în observaţia 4.2.1, avem subcomplexele $(K^r_\bullet(A, C, m), d^r_\bullet)$, cu aceleaşi diferenţiale şi componentele $K^r_n(A, C, m) = C_{m-n} \otimes A^n$. Similar pentru complexele stîngi. Se păstrează, de asemenea, descompunerea $K^r_\bullet(A, C) = \bigoplus_{m\in\mathbb{N}} K^r_n(A, C, m)$, precum şi cea corespunzătoare pentru complexul stîng.

Coaugmentînd aceste complexe, punem $\overline{K}^l_{-1}(A, C) = R$ şi $\overline{d}^l_0$ să fie proiecţia pe componenta $A^0 = R$. Similar pentru complexul drept, folosind din nou relaţia cu structura opusă, $\overline{K}^l_\bullet(A, C) = \overline{K}^l_\bullet(A^{op}, C^{op})$.

Pentru complexul de bimodule, punem $\overline{K}_{-1}(A, C) = C$, iar $\overline{d}_0 = m : A \otimes A \to A$, multiplicarea de algebră.

În continuare, vom prezenta rezultate de legătură între toate aceste complexe, totul culminînd cu o propoziţie care arată cum exactitatea unuia dintre ele implică exactitatea celorlalte 5. Primul rezultat, relativ simplu, este următorul.

Propoziţie 4.2.4. Fie (A,C) o pereche aproape Koszul. Atunci:

1. $K_\bullet(A,C) \otimes_A R \simeq K^l_\bullet(A,C)$ şi $R \otimes_A K_\bullet(A,C) \simeq K^r_\bullet(A,C)$, izomorfisme de complexe de A-module. Mai mult, au loc izomorfismele corespunzătoare şi pentru complexele coaugmentate.

2. $K^\bullet(A,C)\square_C R \simeq K^\bullet_l(A,C)$ şi $R\square_C K^\bullet(A,C) \simeq K^\bullet_r(A,C)$, izomorfisme de complexe de C-comodule. Din nou, au loc izomorfismele corespunzătoare şi pentru complexele augmentate.

Demonstraţie: Date fiind componentele structurilor, $K^l_n(A,C) = A \otimes C_n$, precum şi $K_n(A,C) = A \otimes C_n \otimes A$, definim $\xi_n : A \otimes C_n \to A \otimes C_n \otimes A \otimes_A R$ prin $\xi_n(a \otimes c) = a \otimes c \otimes 1_A \otimes_A 1_R$. Se vede că, la nivel de de A-module stîngi, $\xi_\bullet$ este un izomorfism.

Pentru a arăta că este morfism de complexe, să reamintim componentele diferenţialelor, anume $d^l_n(a \otimes c) = \sum a\theta_{C,A}(c_{1,1}) \otimes c_{2,n-1}$, $d^r_n(c \otimes a) = \sum c_{1,n-1} \otimes \theta_{C,A}(c_{2,1})a$ şi cea de bimodule, $d_n = d^l_n \otimes A + (-1)^n A \otimes d^r_n$. Atunci:

$$\begin{aligned}
[(d_n \otimes_A R) \circ \xi_n](a \otimes c) &= (d_n \otimes_A R)(a \otimes c \otimes 1_A \otimes_A 1_R) \\
&= [d^l_n(a \otimes c)] \otimes 1_A \otimes_A 1_R + (-1)^n a \otimes d^r_n(c \otimes 1_A) \otimes_A 1_R \\
&= \sum a\theta_{C,A}(c_{1,1} \otimes c_{2,n-1} \otimes 1_A \otimes_A 1_R + \\
&+ (-1)^n a \otimes \sum c_{1,n-1} \otimes \theta_{C,A}(c_{2,1}) 1_A \otimes_A 1_R.
\end{aligned}$$

Deoarece ultimul produs tensorial este peste A, iar $\theta_{C,A}(c_{2,1}) \in A^1 \subset A$, folosind A-balansarea, putem scrie ultima sumă ca $\sum(a \otimes c_{1,n-1} \otimes 1) \otimes_A \theta_{C,A}(c_{2,1}) \cdot 1_R$. Structura de A-modul a lui R este trivială, via π^A_0, însă, deci $a \cdot r = \pi^A_0(a)r$, $\forall a \in A$, $r \in R$, unde $\pi^A_0 : A \to A/A^0 = A/R$. Deducem că $\theta_{C,A}(c_{2,1}) \cdot 1_R = 0$, deoarece $\theta_{C,A}(c_{2,1}) \in A^1$, deci merge în $\hat{0}$ prin π^A_0.

Faptul că $\xi_\bullet$ este morfism de complexe reiese acum continuînd calculele de mai sus, deci obţinînd:

$$[(d_n \otimes_A R) \circ \xi_n](a \otimes c) = \sum(a\theta_{C,A}(c_{1,1}) \otimes c_{2,n-1} \otimes 1) \otimes_A \otimes 1 = (\xi_{n-1} \circ d^l_n)(a \otimes c).$$

Izomorfismul pentru complexele augmentate se obţine pornind de la $\overline{\xi}_{-1}(r) = 1_A \otimes_A r$, care defineşte o aplicaţie $\overline{\xi}_{-1} : R \to A \otimes_A R$. Luînd componentele pozitive ale morfismului $\overline{\xi}_\bullet = \xi_\bullet$, am obţinut ceea ce doream. Izomorfismul implicînd complexul drept se demonstrează la fel.

2. Vom proceda similar cu demonstraţia punctului 1., prin dualitate. Să definim, deci aplicaţiile $\xi^n : K^n_l(A,C) \to K^n(A,C)\square_C R$ prin $\xi^n(c \otimes a) = (c \otimes a \otimes 1) \otimes 1$. Se vede din definiţie că ξ^n este morfism de C-comodule, chiar izomorfism, conform ec. 4.2.5. Mai mult, obţinem prin calcul direct:

$$[(d^n \square_C R) \circ \xi^n](c \otimes a) = [d^n_l(c \otimes a) \otimes 1] \otimes 1 + (-1)^{n+1}[c \otimes d^n_r(a \otimes 1)] \otimes 1.$$

Al doilea termen al sumei este nul, deoarece $d^n_r(a \otimes 1) = 0$, prin definiţia diferenţialei, iar primul termen este chiar $(\xi^n \circ d^n_l)(c \otimes a)$. Deducem că $\xi^\bullet$ este izomorfism de complexe. Pentru a extinde la complexele augmentate, să observăm că $\overline{K}^{-1}(A,C)\Box_C R = C\Box_C R$, iar $\overline{K_l}^{-1}(A,C) = R$, deci putem defini $\overline{\xi}^{-1}(r) = 1 \otimes r$, $\forall r \in R$, iar în grad pozitiv să fie chiar $\xi^\bullet$. Şi aici, izomorfismul implicînd complexul drept reiese analog. ■

Propoziţie 4.2.5. Fie (A,C) o pereche aproape Koszul. Atunci:

1. Complexele $R \otimes_A K^l_\bullet(A,C)$ şi $K^r_\bullet(A,C) \otimes_A R$ sînt izomorfe cu complexul $(C_\bullet, 0)$.

2. Complexele $Hom^C(R, K^\bullet_l(A,C))$ şi $Hom^C(R, K^\bullet_r(A,C))$ sînt izomorfe cu complexul $(A^\bullet, 0)$.

Demonstraţie: 1. Să amintim că $K^l_n(A,C) = A \otimes C_n$ şi atunci avem izomorfismul canonic de A-module drepte $\psi_n : C_n \to R \otimes_A K^l_n(A,C)$, dat de $\psi_n(c) = 1_R \otimes_A (1_A \otimes c)$. Pentru a arăta că este izomorfism de complexe, mai trebuie verificat că $(I_R \otimes d^l_n) \circ \psi_n = 0$. Avem succesiv:

$$\begin{aligned}((I_R \otimes d^l_n) \circ \psi_n)(c) &= 1 \otimes_A d^l_n(1 \otimes c) \\ &= \sum \pi^0_A(\theta_{C,A}(c_{1,1}) \otimes_A (1 \otimes c_{2,n-1}) = 0.\end{aligned}$$

Egalităţile decurg cu argumentele din propoziţia anterioară, privitoare la structura trivială de A-modul a lui R, via π^A, precum şi A-balansarea produsului tensorial peste A. Izomorfismul pentru complexul drept este demonstrat analog.

2. Partea a doua decurge acum dual. Să definim $\psi^n : A^n \to Hom^C(R, C \otimes A^n)$ prin asocierea $\psi^n(a) = (f_a : 1 \mapsto 1 \otimes a)$, f_a fiind unicul morfism de comodule cu această proprietate. Din definiţie se vede că ψ este bijectivă. Pentru a arăta că $\psi^\bullet$ este morfism de complexe, să examinăm diagrama:

$$\begin{tikzcd} A^n \arrow[r, "\psi^n"] \arrow[d, "0"'] & Hom^C(R, C \otimes A^n) \arrow[d, "Hom^C(R, d^n_l)"] \\ A^{n-1} \arrow[r, "\psi^{n-1}"] & Hom^C(R, C \otimes A^{n-1}) \end{tikzcd}$$

Va fi suficient, deci, să arătăm că $Hom^C(R, d^n_l) \circ \psi^n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dar aceasta este evident, deoarece $d^n_l \psi^n(a) = d^n_l(f_a(1)) = d^n_l(1 \otimes a) = 0$, din chiar definiţia diferenţialei d^n_l. ■

Aceste legături relativ simple ne vor permite să tragem concluzii foarte interesante privitoare la exactitatea complexelor. Anticipînd, vom demonstra că exactitatea oricărui complex de forma $K^*_\bullet(C,A)$ implică şi exactitatea tuturor celorlalte, lucru care se demonstrează uşor de îndată ce am realizat legături de acest fel, care ne permit să transferăm proprietăţile pe complexe mult mai simple.

O altă legătură între complexele construite este următoarea:

Propoziţie 4.2.6. Fie (A,C) o pereche aproape Koszul. Fie $\overline{\pi}_1^C : \overline{C} \to C_1$ indusă de proiecţia canonică $\pi_1^C : C \to C_1$ ("neglijînd, practic, componenta $C_0 = R$). Fie $\overline{\theta} = \theta_{A,C} \circ \pi_1^C : \overline{C} \to C_1$.

1. Fie $\phi_{-1} = I_R$ şi $\phi_0 : A \otimes C_0 \xrightarrow{\simeq} A$. Pentru $n > 0$, definim $\phi_n : A \otimes C_n \to A \otimes \overline{A}^{\otimes n}$ prin

$$\phi_n(a \otimes c) = \sum a \otimes \theta(c_{1,1}) \otimes \theta(c_{2,1}) \otimes \dots \theta(c_{n,1}).$$

   Atunci $\phi_\bullet$ este morfism de complexe augmentate, de la $\overline{K}^l_\bullet(A, C)$ la $\overline{\beta}^l_\bullet(A)$.

2. Fie $\phi^{-1} = I_R$ şi $\phi^0 = C \xrightarrow{\simeq} A^0 \otimes C$. Pentru $n > 0$, definim $\phi^n : \overline{C}^{\otimes n} \otimes C \to A^n \otimes C$ prin

$$\phi^n(x^1 \otimes \dots x^n \otimes c) = \overline{\theta}(c^1)\overline{\theta}(c^2) \cdots \overline{\theta}(c^n) \otimes c,$$

   unde x^i este clasa lui $c^i \in C$ în $\overline{C}$. Atunci $\phi^\bullet$ este morfism de complexe, de la $\overline{\beta}_r^\bullet(C)$ la $(\overline{K}_r^\bullet, (-1)^\bullet \overline{d}_r^\bullet)$.

Demonstraţie: 1. Din chiar definiţia morfismului $\phi_\bullet$ şi din structurile implicate se vede că el este morfism de A-module stîngi. Rămîne, deci, să demonstrăm că este morfism de complexe, i.e. că $\phi_{n-1} \circ \overline{d}_n^l = \overline{\delta}_n \circ \phi_n$.

Pentru $n = 0$, egalitatea este evidentă, deoarece $\overline{d}_0^l$ este proiecţia pe R, $\overline{\delta}_0 = \pi_A^0$ şi ambii membri ai egalităţii înseamnă $A \otimes C_0 \xrightarrow{\simeq} A \to R$.

De asemenea, pentru $n = 1$, ambii membri ai egalităţii înseamnă $a \otimes c \mapsto a\theta(c)$.

Presupunem acum $n > 1$. Amintim că $\overline{d}_n^l(a \otimes c) = d_n^l(a \otimes c) = \sum a\theta_{C,A}(c_{1,1}) \otimes c_{2,n-1}$ şi atunci $\phi_{n-1}(\overline{d}_n^l(a \otimes c)) = \sum a\theta(c_{1,1}) \otimes \theta(c_{2,1} \otimes \dots \otimes \theta(c_{n,1})$.

Celălalt membru al egalităţii de demonstrat este, folosind diferenţiala (de tip Hochschild):

$$\overline{\delta}_n(a_1 \otimes \dots \otimes a_n \otimes a_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i a_1 \otimes \dots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_{n+1} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{\delta}_n(\phi_n(a \otimes c)) = \sum a\theta(c_{1,1}) \otimes \theta(c_{2,1}) \otimes \dots \otimes \theta(c_{n,1}) + \\ + \sum_{i=1}^{n-1} \sum (-1)^i a \otimes \theta(c_{1,1}) \otimes \dots \otimes \theta(c_{i,1})\theta(c_{i+1,1}) \otimes \dots \otimes \theta(c_{n,1})$$

Folosind acum ec. 4.2.1, precum şi coasociativitatea generalizată, avem că suma dublă este nulă şi obţinem egalitatea de demonstrat.

2. Se vede şi aici că ϕ^n este un morfism de C-comodule stîngi, deci rămîne de demonstrat doar compatibilitatea cu diferenţialele, i.e. $\phi^{n+1} \circ \overline{\delta}^n = (-1)^n \overline{d}_r^n \circ \phi^n$, $\forall n \geq -1$.

Fie $x \in \overline{C}$ clasa unui element $c \in C$. Atunci, cum $\Delta(c) = \sum_{u,v \geq 0} c_{1,u} \otimes c_{2,v}$, obţinem:

$$\sum \overline{\theta}(c_1)\overline{\theta}(c_2) = \sum_{u,v\geq 0} \sum \overline{\theta}(c_{1,u})\overline{\theta}(c_{2,v}) = \sum \theta(c_{2_{1,1}})\theta(c_{2_{2,1}}) = 0,$$

folosind din nou ec. 4.2.1.

Dacă $x^1, \ldots, x^n$ sînt clase de echivalenţă din $\overline{C}$, alegem, pentru fiecare i cîte un $c^i \in x^i$. Atunci, pentru $p > 0$, $c \in C^p$,

$$(\phi^{n+1} \circ \overline{\delta}^n)(x^1 \otimes \cdots \otimes x^n \otimes c) =$$
$$\sum_{i=1}^{n} \sum (-1)^{i-1} \overline{\theta}(c^1) \cdots \overline{\theta}(c^{i-1}) \overline{\theta}(c_1^i) \overline{\theta}(c_2^i) \overline{\theta}(c^{i+1}) \cdots \overline{\theta}(c^n) \otimes c +$$
$$+(-1)^n \sum \overline{\theta}(c^1) \cdots \overline{\theta}(c^n) \overline{\theta}(c_1) \otimes c_2).$$

Dar, din egalitatea precedentă, termenii de forma $\overline{\theta}(c_1)\overline{\theta}(c_2) = 0$, deci prima sumă este nulă. Apoi, deoarece $\Delta(c) = \sum_{u=0}^{p} c_{1,u} \otimes c_{2,p-u}$, avem că $\sum \overline{\theta}(c_1) \otimes c_2 = \sum \theta(c_{1,1}) \otimes c_{2,p-1}$. Înlocuind aceasta în ultimul factor al produsului din suma rămasă, avem că :

$$\phi^{n+1} \circ \overline{\delta}^n (x^1 \otimes \ldots x^n \otimes c) = (-1)^n (\overline{d}_r^n \circ \phi^n)(x^1 \otimes \cdots \otimes x^n \otimes c.$$

Particularizînd pentru $c \in C_0 = R$, avem că morfismele coincid şi pe componenta de grad -1, deci ϕ^n este, într-adevăr, un morfism de complexe augmentate. ■

4.3. Perechi Koszul

În această secţiune, vom continua prezentarea legăturilor între complexele construite mai sus, precum şi între (co)omologiile lor. Vom vedea, în sfîrşit, că exactitatea unuia dintre complexe implică exactitatea tuturor, într-un caz în care perechea aproape Koszul se va numi pereche Koszul. Deşi nu face subiectul lucrării, amintim că motivaţia numelui şi corespondenţa unor rezultate urmează noţiunilor definite în lucrarea [BGS]. În acest sens, o pereche Koszul (A, C) înseamnă un R-inel A şi un R-coinel C, ambele fiind Koszul, după definiţia 1.2.1 din [BGS].

Un prim rezultat este următorul:

Lemă 4.3.1. Fie (A,C) o pereche aproape Koszul. Au loc următoarele:

1. Dacă A este tare graduat, atunci $H_0(\overline{K}_\bullet(A, C)) = 0$.
2. Dacă C este tare graduat, atunci $H^0(\overline{K}^\bullet(A, C)) = 0$.

Demonstraţie: 1. Să notăm, pentru simplitate, $\theta_{C,A} = \theta$. Deoarece, din definiţia perechii aproape Koszul, C este conex, i.e. $C_0 \simeq R$, avem că $A \otimes C_0 \otimes A \simeq A \otimes A$. Atunci, deoarece $\overline{d}_n = \overline{d}^l_n \otimes A + (-1)^n A \otimes \overline{d}^r_n$, rezultă că $\overline{d}_0 = m : A \otimes A \to A$, chiar înmulţirea de algebră, iar $\overline{d}_1(a \otimes c \otimes b) = a\theta(c) \otimes b - a \otimes \theta(c)b$, $\forall a, b \in A$, $c \in C_1$.

Cu acestea consideraţii, să luăm $z = \sum_{i=1}^{d} a_i \otimes b_i \in Ker(m)$. Vrem să arătăm exactitatea în grad 0, i.e. $z \in Im\overline{d}_1$. Deoarece A e tare graduată (deci componentele înmulţirii, $m^{p,q} : A^p \otimes A^q \to A^{p+q}$ sînt surjective), rezultă că există $c^i_1, \ldots, c^i_{n_i} \in C_1$ astfel încît $b_i = \theta(c^i_1) \cdots \theta(c^i_{n_i})$. Fie acum următorul element:

$$\overline{K}^1(A,C) \ni x = -\sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{n_i} a_i\theta(c^i_1) \cdots \theta(c^i_{j-1}) \otimes c^i_j \otimes \theta(c^i_{j+1}) \cdots \theta(c^i_{n_i}).$$

Calculînd acum $\overline{d}_1(x)$, obţinem chiar z.

2. Pentru partea a doua a lemei, să considerăm $\nu : C \otimes C \to C \otimes C_1 \otimes C$ unicum morfism pentru care $\nu \mid_{C_p \otimes C_q} = \Delta_{p-1,1} \otimes C_q - C_p \otimes \Delta_{1,q-1}$ şi care face pătratul din dreapta comutativ:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C \arrow[r, "\overline{d}^1"] \arrow[d, equal] & C \otimes A^0 \otimes C \arrow[r, "\overline{d}^0"] & C \otimes A^1 \otimes C \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[r, "\nu"'] \arrow[u, "\simeq"] & C \otimes C_1 \otimes C \arrow[u, "I_C \otimes \theta \otimes C"']
\end{tikzcd}$$

Putem transfera, deci, exactitatea pe rîndul de jos, fiind astfel suficient să arătăm că avem egalitatea $Ker\nu = Im\Delta$. Să considerăm şirul $C \xrightarrow{\Delta} C \otimes C \xrightarrow{\mu} C \otimes C \otimes C$, unde $\mu = \Delta \otimes I_C - I_C \otimes \Delta$. E clar, din coasociativitatea lui Δ, că $Im\Delta \subseteq Ker\mu$. Pe de altă parte, dacă $s_{-1} = I_C \otimes \varepsilon$ şi $s_0 = I_C \otimes I_C \otimes \varepsilon$, avem că $-s_0\mu + \Delta s_{-1} = I_{C \otimes C}$, deci am găsit o omotopie între $I_{C \otimes C}$ şi aplicaţia nulă, văzută ca morfism trivial între şirul considerat şi el însuşi. Am demonstrat, deci, că $Im\Delta = Ker\nu$. Rămîne de arătat că $Ker\mu = Ker\nu$.

Fie $x \in C \otimes C$. Atunci există elementele $x_{p,q} \in C_p \otimes C_q$, astfel încît $x = \sum_{p,q \geq 0} x_{p,q}$, unde suma este de suport finit. Deoarece $C \otimes C \otimes C = \bigoplus_{u,v,w \geq 0} C_u \otimes C_v \otimes C_w$, calculînd $\mu(x)$ în aceşti termeni ai sumei directe, deducem că dacă $\mu(x) = 0$ în C, atunci $\mu(x)$ trebuie să se anuleze pe componente, i.e. $(\Delta_{u,v} \otimes I_{C_w})(x_{u+v,w}) - (I_{C_u} \otimes \Delta_{v,w})(x_{u,v+w}) = 0$. Similar, dată fiind definiţia lui ν, obţinem că $x \in Ker\nu$ atunci cînd aceeaşi relaţie are loc, dar pentru $v = 1$. De aceea, incluziunea $Ker\mu \subseteq Ker\nu$ e clară.

Fie acum $x \in Ker\nu$. Atunci relaţia de mai sus are loc pentru $v = 1$ şi $u, w \geq 0$. Dar ştim că e adevărată şi pentru $v = 0$, $u, w \geq 0$, deoarece C e conex, adică

$C_0 = R$. Probăm, deci, pentru $v \geq 2$. Inductiv şi folosind coasociativitatea generalizată, obţinem succesiv:

$$\begin{aligned}[(I_{C_u} \otimes \Delta_{q,v} \otimes I_{C_w}) \circ (\Delta_{u,v+1} \otimes I_{C_w})](x_{u+v+1,w}) &= [(\Delta_{u,1} \otimes I_{C_v} \otimes I_{C_w}) \circ (\Delta_{u+1,v} \otimes I_{C_w})](x_{u+v+1,w}) \\ &= [(\Delta_{u,1} \otimes I_{C_v} \otimes I_{C_w}) \circ I_{C_{u+1}} \otimes \Delta_{v,w})](x_{u+1,v+w}) \\ &= (\Delta_{u,1} \otimes \Delta_{v,w})(x_{u+1,v+w}).\end{aligned}$$

Dar, deoarece $x \in Kerv$, folosind din nou coasociativitatea generalizată, obţinem:

$$\begin{aligned}[(I_{C_u} \otimes \Delta_{q,v} \otimes I_{C_w}) \circ (\Delta_{u,v+1} \otimes I_{C_w})](x_{u+v+1,w}) &= [(I_{C_u} \otimes I_{C_1} \otimes \Delta_{v,w}) \circ (I_{C_u} \otimes \Delta_{1,v+w})](x_{u,v+w+1}) \\ &= (\Delta_{u,1} \otimes \Delta_{v,w})(x_{u+1,v+w}).\end{aligned}$$

Deoarece C e tare graduat, componentele comultiplicării trebuie să fie injective, conform observaţiei 4.2.2. Mai mult, deoarece R este semisimplu, rezultă că orice R-bimodul este plat, deci injectivitatea unei aplicaţii de R-module se păstrează după tensorizare. Deci $I_{C_u} \otimes \Delta_{1,v} \otimes I_{C_w}$ este injectivă şi am terminat. ■

Legătura strînsă între toate cele 3 complexe de module, pe de o parte şi toate cele trei complexe de comodule, pe de alta, este redată de propoziţia următoare.

Propoziţie 4.3.1. Fie (A,C) o pereche aproape Koszul.

1. Complexele $\overline{K}^l_\bullet(A,C)$, $\overline{K}^r_\bullet(A,C)$ şi $\overline{K}_\bullet(A,C)$ sînt exacte, dacă unul dintre ele este exact.
2. Complexele $\overline{K}^\bullet_l(A,C)$, $\overline{K}^\bullet_r(A,C)$ şi $\overline{K}^\bullet(A,C)$ sînt exacte, dacă unul dintre ele este exact.

Demonstraţie: 1. Să presupunem, pentru început, că $\overline{K}_\bullet(A,C)$ este exact şi să arătăm că aceasta implică şi exactitatea celorlalte. Să amintim că $\overline{K}_n(A,C) = A \otimes C_n \otimes A$, care este un A-modul drept proiectiv, deci complexul este scindabil. Din prima legătură pe care am realizat-o între complexe, propoziţia 4.2.4.1. ştim că $\overline{K}^l_\bullet(A,C) \simeq \overline{K}_\bullet(A,C) \otimes_A R$, deci avem că şi complexul de A-module stîngi este exact.

Dacă presupunem acum complexul stîng, $\overline{K}^l_\bullet(A,C)$ exact, ştim că $\overline{d}^l_0 = 0$ pe $A^n \otimes C_0$, $\forall n > 0$, iar pentru $c \in C_1$, $a \in A$, diferenţiala este $\overline{d}^l_1(a \otimes c) = a\theta_{C,A}(c) \otimes 1$. Deoarece, prin definiţie, aplicaţia de legătură a unei perechi aproape Koszul (A,C), $\theta_{C,A} : C_1 \to A^1$ este bijectivă, şi folosind exactitatea complexului stîng în grad zero, i.e. exactitatea şirului

$$0 \leftarrow \overline{K}^l_{-1}(A,C) = R \xleftarrow{\overline{d}^l_0=0} K^l_0(A,C) = A \otimes C_0 \simeq A,$$

putem scrie $A^n = A^{n-1}A^1$, $\forall n > 0$, de unde rezultă că A este tare graduată. Aceasta deoarece componenta $m^{n-1,1}$ este surjectivă, ceea ce implică surjectivitatea tuturor componentelor înmulţirii. Dar atunci, folosind lema precedentă, obţinem că $\overline{K}(A,C)$ este exact în grad zero.

Se vede că $\overline{d}_0$ este surjectivă, deoarece ea combină diferenţialele complexelor laterale şi astfel $\overline{d}_0(a \otimes c \otimes b) = a\theta_{C,A}(c) \otimes 1 \otimes b - a \otimes 1 \otimes \theta_{C,A}(c)b$, unde $c \in C_0 = R$, $a, b \in A$. Rămîne, deci, de arătat exactitatea în grad nenul, ceea ce este echivalent cu $H_n(\overline{K}_\bullet(A,C)) = 0$, $\forall n > 0$ şi, de aceea, putem lucra cu complexul neaugmentat (ele diferind doar în componenta de grad -1, care nu ne mai interesează acum). Pentru simplitate, să notăm $K_\bullet = K_\bullet(A,C)$. Definim acum, pentru fiecare $n, p \geq 0$, $X_{n,p} = A^{p-n} \otimes C_n$ (graduarea pozitivă de pe A dă $A^{p-n} = 0$ oricînd $p < n$). Deoarece $K_n = A \otimes C_n \otimes A$, putem descompune $K_n = \bigoplus\limits_{p \geq 0} X_{n,p} \otimes A$. Mai mult, deoarece

$$d_n^r : C_n \otimes A \to C_{n-1} \otimes A \quad \text{şi} \quad d_n^l : A \otimes C_n \to A \otimes C_{n-1},$$

$$(d_n^l \otimes I_A)(X_{n,p} \otimes A) \subseteq X_{n-1,p} \otimes A \quad \text{şi} \quad (I_A \otimes D_n^r)(X_{n,p} \otimes A) \subseteq X_{n-1,p-1} \otimes A.$$

De aceea, $K_\bullet^i = \bigoplus\limits_{p=1}^{i} X_{\bullet,p} \otimes A$ este subcomplex al lui $K_\bullet$. Să notăm $L_\bullet^i = K_\bullet^i / K_\bullet^{i-1}$. Din descompunerea de mai sus, la nivel de R-bimodule, putem identifica $L_n^i \simeq A^{i-n} \otimes C_n \otimes A$, iar din comportarea faţă de diferenţiale, prezentată mai sus, avem că $L_\bullet^i \simeq K_\bullet^l(A,C,i) \otimes A$ (vezi subcomplexele din obs. 4.2.3). Aşadar, cum $L_\bullet^i$ este izomorf cu un sumand direct dintr-un complex exact, deducem că el însuşi este exact. Fixăm acum un $n > 0$. Deoarece $K_n^0 = 0$, deducem că $K_\bullet^0$ este exact în grad n.

Luînd şirul exact scurt $0 \to K_\bullet^{i-1} \to K_\bullet^i \to L_\bullet^i \to 0$ şi scriind şirul lung de omologie, cu un argument inductiv deducem că $K_\bullet^i$ este exact pentru toţi i. Demonstrăm acum că $K_\bullet$ este exact în grad n. Dacă ω este un n-ciclu din $K_\bullet$, trebuie să existe i, a.î. $\omega \in K_n^i$, din descompunerea în subcomplexe. Fiind ciclu în subcomplexul $K_\bullet^i$, trebuie să fie o frontieră în subcomplex, deci şi în complexul mare $K_\bullet$. Aşadar, $\overline{K}_\bullet(A,C)$ este exact.

Avînd acestea demonstrate, pentru a trata complexul drept, ne vom referi la legătura cu structura opusă. Deoarece $\overline{K}_\bullet^r(A,C) = \overline{K}_\bullet^l(A^{op},C^{op})$, obţinem că acesta din urmă este exact dacă şi numai dacă $\overline{K}_\bullet(A^{op},C^{op})$ este exact (aplicînd ipoteza pentru structurile opuse). Dacă notăm cu $d_\bullet^{op}$ diferenţiala lui $\overline{K}_\bullet(A^{op},C^{op})$, fie aplicaţia :

$$\eta_n : A^{op} \otimes_{R^{op}} (C^{op})_n \otimes_{R^{op}} A^{op} \to A \otimes_R C_n \otimes_R A, \;\; \eta_n(a \otimes_{R^{op}} c \otimes_{R^{op}} b) = b \otimes_R c \otimes_R a.$$

Atunci η_n este chiar izomorfismul canonic din "comutativitatea" produsului tensorial (cu preţul inversării structurilor). Mai mult, un calcul simplu arată că $\eta_{n-1} \circ d_n^{op} = (-1)^n d_n \circ \eta_n$. Aşadar, am ajuns pe tărîm cunoscut, deoarece am stabilit că omologia complexului opus $\overline{K}_\bullet(A^{op},C^{op})$ este zero dacă şi numai dacă omologia complexului $\overline{K}_\bullet(A,C)$ este zero, fapt adevărat din ipoteză.

2. Partea a doua reiese dual acum. Să presupunem că $\overline{K}^\bullet = \overline{K}^\bullet(A,C)$ este exact şi să arătăm că aceasta implică exactitatea complexului de C-comodule stîngi. Dar, deoarece $K^n(A,C) = C \otimes A^n \otimes C$, folosind lema 4.2.2, obţinem că $\overline{K}^n$ este C-comodul drept injectiv, deci complexul este scindabil, de unde şi complexul stîng este exact, folosind legătura din prop. 4.2.3.2.

Să presupunem acum că $\overline{K}_l^\bullet(A,C)$ este exact. Comultiplicarea coinelelor este injectivă, deci $H_{-1}(\overline{K}^\bullet(A,C)) = 0$, deci avem exactitate în grad -1. În grad 0, luînd în calcul definiţia diferenţialei, $\overline{d}_l^{-1} = I_R$ şi $d_l^0(C_p \otimes A^0) \subseteq C_{p-1} \otimes A^0$, avem că $\bigoplus_{p\geq 1} Ker\Delta_{p-1,1} = H_0(\overline{K}_l^\bullet(A,C)) = 0$. Aşadar, C este coinel tare graduat şi, din lema precedentă, complexul $\overline{K}^\bullet(A,C)$ este exact în grad zero.

Pentru grad $n > 0$, să notăm, pentru simplitate, $(K^\bullet(A,C), d^\bullet)$ prin $(K^\bullet, d^\bullet)$. Urmînd construcţia duală celei din prima parte, $X_{n-p} = C_{p-n} \otimes A^n$, avem $K^n = \bigoplus_{p\geq 0} X_{n,p} \otimes C$ şi, faţă de diferenţiale,

$$(d_l^n \otimes I_C)(X_{n,p} \otimes C) \subseteq X_{n+1,p} \otimes C \quad \text{şi} \quad (I_C \otimes d_r^n)(X_{n+1,p} \otimes C) \subseteq X_{n+1,p+1} \otimes C,$$

obţinem că $K_i^\bullet = \bigoplus_{p\geq 1} X_{n,p} \otimes C$ este subcomplex al $K^\bullet$. Luăm complexul factor $L_i^\bullet = K_i^\bullet / K_{i+1}^\bullet$. Avem $X_{n+1,i+1} \otimes C \subseteq K_{i+1}^{n+1}$, iar diferenţiala de pe $L_i^\bullet$ acţionează asupra unui n-lanţ prin corespondenţa $x \otimes c + K_{i+1}^n \longmapsto d_l^n(x) \otimes c + K_{i+1}^{n+1}$. Astfel, izomorfismul de R-bimodule $L_i^n \simeq K_l^n(A,C,i) \otimes C$ ne permite să considerăm izomorfism chiar de complexe, $L_i^\bullet \simeq K_l^\bullet(A,C,i) \otimes C$. Cum am remarcat la sfîrşitul demonstraţiei lemei anterioare, C este R-plat, iar $K_l^\bullet(A,C,i)$, ca sumand direct al $K_l^\bullet(A,C)$ este exact, deci şi $L_i^\bullet$ este exact.

Arătăm că toţi factorii $K^\bullet / K_i^\bullet$ sînt exacţi, prin inducţie. $K^\bullet / K_0^\bullet = 0$, pentru început. La pasul de inducţie, considerăm şirul exact scurt

$$0 \to L_i^\bullet \to K^\bullet / K_{i+1}^\bullet \to K^\bullet / K_i^\bullet \to 0,$$

presupunînd că $K^\bullet / K_i^\bullet$ este exact. Deoarece termenul stîng este tot exact, deducem că şi termenul din mijloc are această proprietate.

Dacă ω este un n-cociclu din $K^\bullet$, alegem un i cu $\omega \in M_i^n = \bigoplus_{p\leq i} X_{n,p} \otimes C$. Proiecţia canonică induce un izomorfism de R-bimodule $\nu^n : K^n / K_{i+1}^n \to M_i^n$. Prin intermediul acestui izomorfism, putem transporta izomorf structura de complex de colanţuri de pe $K^\bullet / K_{i+1}^\bullet$ pe $(M_i^\bullet, \partial^i)$. Dar atunci $M_i^\bullet$ este exact, iar ω este un cociclu în $M_i^\bullet$, deci există un $\zeta \in M_i^{n-1}$ cu $\omega = \partial^n(\zeta) = d^n(\zeta)$, deoarece diferenţialele trebuie să coincidă pe M_i^n. Aceasta încheie demonstraţia. ■

În sfîrşit, legătura cea mai interesantă este următoarea:

Teoremă 4.3.1. Toate cele 6 complexe din propoziţia precedentă sînt exacte, dacă unul dintre ele are această proprietate.

Demonstraţie: Avînd toate legăturile de pînă acum, concluzia reiese oarecum simplu. Să reamintim descompunerile în subcomplexe:

$$\overline{K}_l^{\bullet}(A,C) = \bigoplus_{m>0} K_l^{\bullet}(A,C,m) \oplus \overline{K}_l^{\bullet}(A,C,0)$$
$$\overline{K}_r^{\bullet}(A,C) = \bigoplus_{m>0} K_r^{\bullet}(A,C,m) \oplus \overline{K}_r^{\bullet}(A,C,0).$$

Dacăm $m \in \mathbb{N}$, atunci $K_l^p(A,C,m) = K_{m-p}^r(A,C,m)$ şi $d_l^p = d_{m-p}^r$, $\forall p$. Atunci şi în omologie avem $H^p(K_l^{\bullet}(A,C,m)) = H_{m-p}(K_{\bullet}^r(A,C,m))$. Dar, din definiţie, $\overline{K}_l^{\bullet}(A,C,0)$ şi $\overline{K}_{\bullet}^r(A,C,0)$ sînt exacte, deducem că exactitatea complexului augmentat stîng de comodule este condiţionată de exactitatea complexului augmentat drept de module. Această condiţionare ne permite să încheiem aplicînd propoziţia anterioară. ■

Definiţia principală din această secţiune urmează.

Definiţie 4.3.1. O pereche aproape Koszul (A,C) se numeşte pereche Koszul dacă şi numai dacă oricare din complexele din propoziţia anterioară este exact.

Avem imediat şi următorul rezultat:

Corolar 4.3.1. Fie (A,C) o pereche Koszul. Atunci:

1. Complexul $\overline{K}_l^{\bullet}(A,C)$ este o rezoluţie a lui R cu C-comodule stîngi graduate, injective.

2. Complexul $\overline{K}_r^{\bullet}(A,C)$ este o rezoluţie a lui R cu C-comodule drepte graduate, injective.

3. Complexul $\overline{K}_{\bullet}^l(A,C)$ este o rezoluţie a lui R cu A-module stîngi graduate, proiective.

4. Complexul $\overline{K}_{\bullet}^r(A,C)$ este o rezoluţie a lui R cu A-module drepte graduate, proiective.

5. Dacă A este R-bimodul injectiv, complexul $\overline{K}^{\bullet}(A,C)$ este o rezoluţie a lui C cu C-bicomodule graduate, injective.

6. Dacă C este R-bimodul proiectiv, atunci complexul $\overline{K}_{\bullet}(A,C)$ este o rezoluţie a lui A cu A-bimodule graduate, proiective.

Demonstraţie: Primele patru afirmaţii sînt evidente, din rezultatele anterioare.

5. Dacă C este R-bimodul proiectiv acum, atunci C_n, ca subbimodul, este tot proiectiv. Rezultă că $A \otimes C_n \otimes A = K_{\bullet}(A,C)$ este o rezoluţie proiectivă a lui A, cu A-bimodule proiective. Afirmaţia rămîne adevărată şi pentru complexul augmentat, luînd în calcul componenta din grad -1.

6. Similar, dacă A este R-bimodul injectiv, atunci $C \otimes A^n \otimes C$ este C-bicomodul injectiv (aplicînd prop. 4.2.2, la stînga şi la dreapta şi "reunind" rezultatele). Aceasta demonstrează şi ultima afirmaţie. ■

Este potrivit, în acest moment, să facem o precizare. Deşi lucrăm peste inelul R, pe care l-am presupus semisimplu, nu toate R-bimodulele sînt proiective sau injective. Pentru a regla această carenţă, putem înlocui ipoteza asupra lui A sau C din propoziţia anterioară cu una asupra lui R, pentru a ne asigura proiectivitatea, respectiv injectivitatea. Să ne amintim Prop. 2.1.1, ale cărei rezultate la stînga şi la dreapta pot fi combinate uşor pentru a obţine semisimplicitatea $R - bi$modulelor. Deci, dacă R este algebră separabilă peste un corp k, avem că orice R-bimodul este proiectiv şi injectiv. Cu această presupunere, obţinem direct că, pentru o pereche Koszul (A, C), complexul $\overline{K}^{\bullet}(A, C)$ este o rezoluţie injectivă a lui C în categoria ${}^{C}\mathcal{M}^{C}$, iar $\overline{K}_{\bullet}(A, C)$ este o rezoluţie proiectivă a lui A în categoria ${}_{A}\mathcal{M}_{A}$.

Continuăm acum cu proprietăţile perechilor Koszul, observînd că orice pereche Koszul generează una aproape Koszul de tipul celor prezentate pînă acum.

Corolar 4.3.2. Fie (A,C) o pereche Koszul. Atunci R-inelul A şi R-coinelul C sînt tare graduate. În particular, perechile (A,T(A)) şi (E(C),C) sînt aproape Koszul.

Demonstraţie: Deoarece perechea (A, C) este Koszul, rezultă că avem exactitatea complexului $\overline{K}^{l}_{\bullet}(A, C)$. Atunci, procedînd ca la începutul demonstraţiei Prop. 4.3.1, avem că A e tare graduată. Folosind acum Prop. 4.2.1, obţinem că pereche $(A, T(A))$ este aproape Koszul. Similar, afirmaţia despre C se obţine din propoziţiile respective, anume 4.3.1 şi 4.2.3. ■

Legătura strînsă pe care am tot evidenţiat-o pînă acum între o pereche (aproape) Koszul şi structurile opuse duce şi la următorul rezultat.

Corolar 4.3.3. Perechea (A, C) este Koszul dacă şi numai dacă perechea (A^{op}, C^{op}) este Koszul.

Demonstraţie: Echivalenţa este evidentă, din cele de pînă acum întrucît, ca în demonstraţia Prop. 4.3.1, omologia complexului $\overline{K}_{\bullet}(A, C)$ este trivială dacă şi numai dacă omologia complexului $\overline{K}_{\bullet}(A, C)$ este trivială. ■

Pentru următorul rezultat, avem nevoie de teorema de comparare a rezoluţiilor proiective (injective) ale unui acelaşi (bi)modul. Vom enunţa rezultatul, precum şi consecinţele lui, iar pentru demonstraţie, ne referim la [Weibel], Teorema 2.2.6 sau [Vermani], Teorema 5.1.5. Rezultatul este unul obişnuit al unui curs de algebră omologică, aşadar demonstraţia şi implicaţiile imediate pot fi presupuse cunoscute oricum.

Teoremă 4.3.2. (de comparare) Fie $P_{\bullet} \xrightarrow{\varepsilon} M$ o rezoluţie proiectivă a unui R-modul M şi $f' : M \to N$ un morfism de R-module. Atunci, pentru orice rezoluţie $Q_{\bullet} \xrightarrow{\eta} N$ a lui N, există un morfism de lanţuri $f_{\bullet} : P_{\bullet} \to Q_{\bullet}$, care ridică f', în sensul că $\eta \circ f_0 = f' \circ \varepsilon$. Aplicaţia $f_{\bullet}$ este unică pînă la omotopie. ■

Pentru a vizualiza mai bine rezultatul, prezentăm diagrama de mai jos.

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, dotted, "f_2"'] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, dotted, "f_1"'] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, dotted, "f_0"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & 0 \\
\dots \arrow[r] & Q_2 \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r, "\eta"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Un corolar imediat rezultă din aplicarea teoremei pentru două rezoluţii ale aceluiaşi R-modul M şi aplicaţia $f' = I_M$. În plus, rezultatul teoremei şi al corolarului au loc şi pentru rezoluţii injective.

Rezultatul anunţat este următorul.

Teoremă 4.3.3. Fie (A,C) o pereche Koszul. R-coinelul graduat T(A) este izomorf cu C şi (A,T(A)) formează o pereche Koszul. În plus, prin dualitate, R-inelel graduate E(C) şi A sînt izomorfe şi perechea (E(C),C) este Koszul.

Demonstraţie: Şim din corolarul anterior că A e tare graduat şi că $(A, T(A))$ este o pereche *aproape* Koszul (cf. Prop. 4.2.1). Să ne amintim că avem deja la dispoziţie două rezoluţii proiective ale lui R, anume $\overline{K}^l_\bullet(A,C)$ şi $\overline{\beta}^l_\bullet(A)$. Mai mult, avem şi morfismul care le leagă, $\phi_\bullet$ din Prop. 4.2.6. Deoarece complexele sînt coaugmentate şi componenta în grad -1 este R în ambele cazuri, iar $\phi_{-1} = I_R$, care este inversabilă, din teorema de comparare există $\phi'_\bullet : \overline{\beta}^l_\bullet(A) \to \overline{K}^l_\bullet(A,C)$ morfism de complexe coaugmentate, care ridică pe $\phi_{-1} = I_R$. Situaţia este redată pictorial mai jos.

$$\begin{tikzcd}
0 & R \arrow[l] \arrow[d, shift right, "\phi_{-1}=I_R"'] & K^l_\bullet(A,C) \arrow[l, "\overline{d}^l_0"'] \\
0 & R \arrow[l] \arrow[u, shift right, dotted, "I_R"'] & \overline{\beta}^l_\bullet(A) \arrow[l, "\overline{\delta}^l_0"] \arrow[u, dotted, "\phi'_\bullet"']
\end{tikzcd}$$

Mai mult, din observaţia ce a urmat teoremei de comparare, avem echivalenţele omotopice următoare: $\phi_\bullet \circ \phi'_\bullet \sim_h I_{\overline{\beta}^l_\bullet(A)}$ şi $\phi'_\bullet \circ \phi_\bullet \sim_h I_{\overline{K}^l_\bullet(A,C)}$. Deoarece $I_R \otimes_A \phi_\bullet$ şi $I_R \otimes_A \phi'_\bullet$ sînt inverse (pînă la omotopie), deducem că induc izomorfisme în omologie,

$$H_n(I_R \otimes_A \phi_\bullet) : H_n(R \otimes_A K^l_\bullet(A,C)) \xrightarrow{\sim} H_n(\Omega_\bullet(A)),\ \forall n \geq 0.$$

Dar am văzut în Prop. 4.2.5 că primele grupuri de omologie sînt egale cu C_n, deoarece complexul respectiv este izomorf cu complexul trivial $(C_\bullet, 0)$. Definim acum $\gamma_n : C_n \to T_n(A)$ prin ecuaţia $\gamma_n(c) = \Delta(n)(c) + B_n(A)$, unde $\Delta(0) = I_R$, iar $B_n(A)$ este grupul n-frontierelor complexului $\Omega_\bullet(A)$. Atunci, din izomorfismul din omologie, deducem că γ_n este izomorfism de R-bimodule. Mai mult, din chiar definiţia lui $\gamma_\bullet$ putem observa că el respectă graduările coinelelor C şi $T(A)$, deci este chiar izomorfism de R-coinele graduate. În concluzie, $I_A \otimes \gamma_\bullet$

este izomorfismul de complexe între $K^l_\bullet(A,C) \xrightarrow{\sim} K^l_\bullet(A,T(A))$, ceea ce face complexul coaugmentat $\overline{K}^l_\bullet(A,T(A))$ exact şi perechea $(A,T(A))$ Koszul.

Pentru rezultatul dual procedăm astfel: ştim, pentru început, că C_1 cogenerează $E(C)$ şi că $(E(C),C)$ este pereche *aproape* Koszul (cf. Prop. 4.2.3). Ca în cazul de mai sus, morfismul $\phi^\bullet$ din Prop. 4.2.5 ridică I_R. Luăm acum rezoluţiile lui R din $\mathcal{M}^C$, anume $\overline{\beta}^\bullet_r(C)$ şi $(\overline{K}^\bullet_r(A,C),(-1)^\bullet\overline{(d)}^\bullet_r)$. Ţinînd cont de grupurile de coomologie, care în acest caz se obţin cu ajutorul functorului Ext, avem că $Hom^C(R,\phi^\bullet)$ este morfism de complexe, care induce izomorfism în coomologie. Aplicînd acum $Hom^C(R,-)$ complexelor $\overline{\beta}^\bullet_r(C)$ şi $\overline{K}^\bullet_r(A,C)$, găsim izomorfismul de complexe de colanţuri indus în coomologie de $\phi^\bullet$. Să-l notăm $\gamma^\bullet : (\Omega^\bullet(C),\partial^\bullet) \xrightarrow{\sim} (A^\bullet,0)$, unde $\gamma^0 = I_R$ (codomeniul a fost obţinut prin izomorfismul de complexe din partea a doua a Prop. 4.2.5).

Definiţia lui γ^n în grad nenul se face astfel: amintim notaţia din Prop. 4.2.6, unde $\overline{\theta} = \theta_{C,A} \circ \pi^C_1$, iar $\pi^C_1 : C \to C_1$ este proiecţia canonică. Dacă $x^1,\ldots,x^n \in \overline{C}$, atunci $\gamma^n(x^1 \otimes \cdots \otimes x^n) = \overline{\theta}(c^1)\cdots\overline{\theta}(c^n)$, unde $c^i \in x^i$, $\forall 1 \le i \le n$. Înmulţirea pe $\Omega^\bullet(C)$ este concatenarea monoamelor tensoriale şi atunci $\gamma^\bullet$ devine un izomorfism de R-inele colanţ, care induce izomorfimse de R-inele graduate de la $E(C)$ la A şi care, mai departe, permite identificarea $\overline{K}^\bullet_r(E(C),C) \simeq \overline{K}^\bullet_r(A,C)$. ■

Corolar 4.3.4. Fie (A,C′) şi (A,C") perechi Koszul. Atunci C′ şi C" sînt izomorfe, ca R-coinele graduate. Dual, dacă (A′,C) şi (A",C) sînt perechi Koszul, atunci A′ şi A" sînt izomorfe, ca R-inele graduate.

Demonstraţie: Rezultatul este evident, în contextul teoremei anterioare, deoarece în primul caz, lui A i se asociază canonic (natural) perechea sa în sens Koszul, anume $T(A)$, ceea ce duce la izomorfismele $C' \simeq T(A) \simeq C''(A)$. Dual, $A' \simeq E(C) \simeq A''$. ■.

Corolar 4.3.5. Dacă (A,C) este o pereche Koszul, atunci $E(T(A)) \simeq A$ şi $T(E(C)) \simeq C$.

Demonstraţie: Pornind de la A, îi asociem canonic pe $T(A)$, pentru a obţine perechea Koszul $(A,T(A))$. Luînd această pereche drept punct de plecare, avem că $(E(T(A)),T(A))$ este pereche Koszul. Din corolarul de mai sus avem izomorfismul dorit. Celălalt rezultă similar. ■

Să dăm acum definiţia inelelor Koszul, după [BGS]. După aceea, vom vedea legătura între această noţiune, aş cum apare ea în articolul citat şi perechile Koszul prezentate aici, urmărind [JPŞ1]. Vom folosi, de asemenea, cîteva rezultate din [BGS], pe care le vom cita fără demonstraţie, întrucît scopul principal al lucrării este abordarea omologică din [JPŞ1]. Legătura între cele două noţiuni va fi prezentată, astfel, doar pentru "completitudine", demonstraţia fiind, astfel, doar schiţată.

Definiţie 4.3.2. Fie A un inel graduat, a cărui componentă omogenă de grad zero este R. A se numeşte inel Koszul la stînga (cf. [BGS]), dacă R are o rezoluţie $P_\bullet \to R$ cu A-module stîngi graduate, proiective, astfel încît fiecare P_n să fie generat de componenta omogenă de grad n.

Vom folosi şi următoarea noţiune (cf. [BGS], Def. 1.2.2):

Definiţie 4.3.3. Un inel A se numeşte pătratic dacă este pozitiv graduat, cu A_0 este semisimplu şi A este generat de A_1 peste A_0 cu relaţii de gradul 2. Echivalent,

$$T_{A_0}(A_1) = A_0 \oplus A_1 \oplus (A_1 \otimes_{A_0} A_1) \oplus \cdots = \bigoplus_{i \geq 0} A_1^{\otimes i}.$$

Legătura anunţată urmează.

Teoremă 4.3.4. Un R-inel A este Koszul dacă şi numai dacă A^1 generează A şi $(A, T(A))$ este pereche Koszul.

Demonstraţie: (Schiţă) $'' \Leftarrow ''$: Dacă A^1 generează A, avem o pereche Koszul canonică (A, C), unde $C = T(A)$. Atunci putem lua rezoluţia $\overline{K}^l_\bullet(A, C)$, ca rezoluţie proiectivă a lui R. Am văzut, de asemenea, că termenii sînt A-module graduate, iar faptul că $\overline{K}^l_n(A, C)$ este generat de $A^0 \otimes C_n$ este evident din definiţie ($K^l_n(A, C) = A \otimes C_n$, $K^l_{-1}(A, C) = R = A^0$).
$'' \Rightarrow ''$: Fie A inel Koszul şi să notăm $A^1 = V$. În [BGS] se demonstrează că orice inel Koszul este generat de V şi pătratic, deci există $W \subseteq V \otimes V$, astfel încît A este algebră graduată izomorfă cu $T^a_R(V)$ factorizat la idealul bilateral generat de W. Să definim $C_0 = R$, $C_1 = W$ şi

$$C^W_n = \bigcap_{p=0}^{n-2} V^{\otimes p} \otimes W \otimes V^{\otimes (n-p-2)},\ \forall n \geq 2.$$

Cu acestea, se arată că R-bimodulul $C = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} C^W_n$ este un subcoinel graduat al lui $T^c_R(V)$, arătînd că $\Delta_{p,q}(c) \in C_p \otimes C_q$, $\forall p, q \geq 0$, $c \in C_{p+q}$.

Se obţine, din construcţie, că C este conex şi $A^1 = C_1 = V$. Morfismul de legătură $\theta_{C,A}$ va fi chiar I_V şi cum înmulţirea pe $T^a_R(V)$ este dată de izomorfismul canonic $V^{\otimes p} \otimes V^{\otimes q} \simeq V^{\otimes (p+q)}$, avem $m^{1,1}_A \circ (I_V \otimes I_V) \circ \Delta_{1,1}(c) = c + W = 0$. Deci perechea (A, C) este *aproape* Koszul.

Referindu-ne din nou la [BGS], 2.6, obţinem că acel complex Koszul coincide (pînă la o schimbare a gradelor) cu complexul $\overline{K}^l_\bullet(A, C)$, iar primul este exact, din ipoteza că A este inel Koszul. Aşadar, perechea (A, C) este Koszul şi deducem, folosind Teorema 4.3.3, că A e tare graduat şi $(A, T(A))$ este pereche Koszul. ■

Corolar 4.3.6. Dacă A este inel Koszul la dreapta, atunci este inel Koszul la stînga, şi reciproc.

Demonstraţie: Dacă A este inel Koszul la stînga, atunci, din teorema de mai sus, A este tare graduat şi perechea $(A, T(A))$ este Koszul. Dar atunci şi A^{op} este tare graduat şi $(A^{op}, T(A)^{op})$ este pereche Koszul, de unde A^{op} este inel Koszul la stînga, ceea ce înseamnă că A este inel Koszul la dreapta. ■

4.4. (Co)Omologia Hochschild a inelelor Koszul

În această secţiune vom relua construcţia (co)omologiei Hochschild a unei k-algebre R cu coeficienţi într-un bimodul, pe care am prezentat-o în celelalte capitole ale lucrării. Aici o vom aplica unei algebre "privilegiate", anume R-inelului A din perechea Koszul (A, C). Vom pune în evidenţă similitudini interesante între construcţia în acest caz şi cea de dinainte.

Aşadar, revenind oarecum la notaţiile din capitolele 1-3, R va desemna o algebră peste un corp comutativ k, însă produsul tensorial neindexat va desemna $\otimes_R$, ca în capitolul prezent.

După cum am văzut în chiar primul capitol al lucrării, grupurile de (co)omologie Hochschild ale lui R cu coeficienţi în ${}_RM_R$ se obţin prin tensorizare peste algebra anvelopantă (aici, A^e) a rezoluţiei proiective standard (aici, a lui A). Avînd deja la dispoziţie o rezoluţie proiectivă, anume $\overline{K}_\bullet(A, C)$, vom avea nevoie de o construcţie suplimentară pentru a putea face produsul tensorial nu peste A^e, ci peste R, aşa cum am lucrat pînă acum. Este vorba despre produsul tensorial ciclic, pe care îl introducem mai jos.

Fie V un R-bimodul. Să notăm cu $[R, V]$ acoperirea liniară (peste k) a comutatorilor de forma $[r, v] = rv - vr$, $v \in V$, $r \in R$. Vom nota spaţiul factor $V/[R, V]$ cu V_R.

Definiţie 4.4.1. Fie acum $V_1, \ldots, V_n$ R-bimodule. Spaţiul vectorial (peste k) $(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n)_R$ se numeşte produsul tensorial ciclic al bimodulelor $V_1, \ldots, V_n$ şi va fi notat $V_1 \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} V_n$. Clasa de echivalenţă a unui monom tensorial $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ modulo $[R, V]$ va fi notată $v_1 \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} v_n$.

Fie acum V, W două R-bimodule. Conform Prop. 1.1.1, putem privi V ca pe un R^e-modul drept, iar pe W ca pe un R^e-modul stîng. Are sens, atunci, produsul tensorial obişnuit, $V \otimes_{R^e} W$. Legătura cu produsul tensorial ciclic $V \widehat{\otimes} W$ este cît se poate de simplă, anume prin identificarea $v \widehat{\otimes} w \mapsto v \otimes_{R^e} w$. Inductiv, avem că

$$V_1 \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} V_n \simeq (V_1 \otimes \cdots \otimes V_i) \otimes_{R^e} (V_{i+1} \otimes \cdots \otimes V_n),$$

pentru orice $0 < i < n$. Mai mult, produsul tensorial ciclic este comutativ, i.e. $V \widehat{\otimes} W \simeq W \widehat{\otimes} V$, deoarece factorizarea la comutatori reduce la cazul în care folosim doar elementele lui V pentru care acţiunea lui R este comutativă. Inductiv, avem izomorfism între produsele tensoriale ciclice care implică $n \geq 2$ factori, putînd permuta ciclic factorii (ceea ce justifică numele construcţiei), i.e.

$$V_1 \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} V_n \simeq V_2 \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} V_n \widehat{\otimes} V_n \simeq \cdots \simeq V_n \widehat{\otimes} V_1 \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} V_{n-1}.$$

Să construim acum, pornind de la complexul menţionat, $\overline{K}_\bullet(A, C)$, un complex $K_\bullet(A, M)$ (cu M un A-bimodul arbitrar), a cărui (co)omologie Hochschild o vom calcula, ţinînd cont atît de construcţia din primul capitol, cît şi de aceea din capitolul prezent.

Fie R o k-algebră separabilă fixată (pentru a nu avea probleme cu proiectivitatea şi injectivitatea R-bimodulelor, cf. Prop. 2.1.1. Fie A un R-inel Koszul şi C un R-coinel conex, astfel încît perechea (A, C) este Koszul. Observăm că A poate fi privită şi ca o k-algebră, ceea ce ne permite să vorbim despre $A^e = A \otimes_k A^{op}$. Conform definiţiei 1.3.1, omologia Hoschschild a k-algebrei A cu coeficienţi într-un A-bimodul M este $HH_\bullet(A, M) = Tor_\bullet^{A^e}(A, M)$. Folosind acum Corolarul 4.3.1.6., vedem că aceste grupuri de omologie pot fi obţinute aplicînd functorul $M \otimes_{A^e} (-)$ rezoluţiei $\overline{K}_\bullet(A, C)$. Mai mult, folosind cele de mai sus, putem găsi un izomorfism de spaţii vectoriale $\varphi_n : M \otimes_{A^e} \overline{K}_n(A, C) \to M \widehat{\otimes} C_n$, care lucrează prin:

$$\varphi(m \otimes_{A^e} (x \otimes c \otimes y)) = (ymx) \widehat{\otimes} c.$$

Folosind structurile subiacente de k-spaţii vectoriale ale lui A, C, M, se vede imediat că φ_n este k-liniară. Aplicaţia inversă este $\varphi_n^{-1}(m \widehat{\otimes} c) = m \otimes_{A^e} (1 \otimes c \otimes 1)$.

Să definim $\partial_n : M \widehat{\otimes} C_n \to M \widehat{\otimes} C_{n-1}$ prin $\partial_n = \varphi_{n-1}^{-1} \circ (M \otimes_{A^e} \circ d_n) \circ \varphi_n$, unde d_n este diferenţiala în grad n a complexului $\overline{K}_\bullet(A, C)$. Atunci $(M \widehat{\otimes} C_\bullet, \partial_\bullet)$ este izomorf cu complexul $M \otimes_{A^e} \overline{K}_\bullet(A, C)$, prin chiar $\varphi_\bullet$. Calcule simple arată că are loc şi ecuaţia de mai jos, deci am demonstrat:

Teoremă 4.4.1. Fie (A,C) o pereche Koszul peste k-algebra separabilă R. Omologia Hochschild a lui A cu coeficienţi în A-bimodulul M este omologia complexului de lanţuri $K_\bullet(A, M) = M \widehat{\otimes}_R C_\bullet$. Pentru un $M \in M$, $c \in C_n$, diferenţiala ∂_n a complexului este dată de:

$$\partial_n(m \widehat{\otimes} c) = \sum m\theta_{C,A}(c_{1,1}) \widehat{\otimes} c_{2,n-1} + (-1)^n \sum \theta_{C,A}(c_{2,1}) m \widehat{\otimes} c_{1,n-1} \blacksquare.$$

Similar, se poate arăta că grupurile de coomologie Hochschild, calculate prin $HH^\bullet(A, M) = Ext^\bullet_{A^e}(A, M)$ pot fi date şi de următoarea:

Teoremă 4.4.2. Fie (A,C) pereche Koszul peste k-algebra separabilă R. Atunci coomologia Hochschild a lui A cu coeficienţi în M este coomologia complexului de colanţuri $K^\bullet(A, M) = Hom_{R^e}(C_\bullet, M)$. Pentru $c \in C_{n+1}$, $f \in Hom_{R^e}(C_n, M)$, diferenţiala ∂^n a complexului este dată de:

$$\partial^n(f)(c) = \sum \theta_{C,A}(c_{1,1}) f(c_{2,n}) + (-1)^{n+1} \sum f(c_{1,n}) \theta_{C,A}(c_{2,1}) \blacksquare.$$

Sub formă de aplicaţie, să vedem ce înseamnă, în acest context, dimensiunea Hochschild a lui A (cf. def. 2.1.1). Vom nota dimensiunea proiectivă cu pd, ale cărei proprietăţi le considerăm cunoscute (vezi [Weibel], secţiunea 4.1).

Teoremă 4.4.3. Fie (A,C) o pereche Koszul peste k-algebra separabilă R. Atunci:

$$HdimA = pd({}_AR) = pd(R_A) = sup\{n \mid C_n \neq 0\}.$$

Demonstraţie: Dacă $C_{n+1} = 0$, avem o rezoluţie proiectivă cu A-bimodule a lui A de lungime cel mult n, anume $\overline{K}_\bullet(A, C)$. Deci, în acest caz, $HdimA \leq n$.

Dacă $HdimA \leq n$, atunci $M_n = Ker(d_n : A \otimes C_n \otimes A \to A \otimes C_{n-1} \otimes A)$, care apare în $\overline{K}_\bullet(A, C)$, este R-bimodul proiectiv şi care dă şirul exact:

$$0 \leftarrow A \leftarrow K_0(A,C) \leftarrow \cdots \leftarrow K_{n-1}(A,C) \xleftarrow{d_n} K_n(A,C) \leftarrow M_n \leftarrow 0.$$

Aplicînd acestui şir $(-) \otimes_A R$, obţinem o rezoluţie a lui R cu A-module stîngi proiective, a cărei lungime va fi cel mult n, din construcţie. Deci $pd({}_A R) \leq n$. Analog la dreapta.

În sfîrşit, dacă $pd({}_A R) \leq n$, atunci $C_q = Tor_q^A(R,R) = 0$, $\forall q > n$, ceea ce arată că $HdimA = pd({}_A R) = sup\{n \mid C_n \neq 0\}$ şi similar pentru R_A. ■

ANEXA A

A.1. Obiecte (co)simpliciale

Vom prezenta aici abordarea categorială asupra definiţiei (co)omologiei Hochschild, prezentînd, totodată, un context mai general. Vom avea nevoie de cîteva noţiuni categoriale, pe care le definim mai jos. Vom omite, de asemenea, demonstraţiile rezultatelor prezentate, îndrumînd cititorul la referinţe ca [Weibel], cap. 8 sau notele de seminar [Schwg].

Fie Δ categoria şirurilor crescătoare de numere naturale. Obiectele acestei categorii le vom nota $[n] = \{0 < 1 < 2 < \cdots < n\}$, care sînt mulţimi finite şi ordonate, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Morfismele acestei categorii sunt funcţiile crescătoare între aceste obiecte.

Pentru o categorie $\mathcal{A}$, un functor contravariant $A : \Delta^{op} \to \mathcal{A}$ se numeşte *obiect simplicial* în $\mathcal{A}$. Vom nota A_n obiectul $A([n])$. Dual, un functor covariant $C : \Delta \to \mathcal{A}$ se numeşte *obiect cosimplicial* şi notăm C^n obiectul $C([n])$.

Este uşor de arătat că orice funcţie crescătoare poate fi descompusă în "paşi", cu ajutorul aplicaţiilor "faţă", $\varepsilon_i : [n] \to [n+1]$ şi "degenerare", $\eta_i : [n] \to [n-1]$. Aceste aplicaţii funcţionează astfel:

$$\varepsilon_i(j) = \begin{cases} j, & j < i \\ j+1, & j \geq i \end{cases} \text{şi, respectiv } \eta_i(j) = \begin{cases} j, & j \leq i \\ j-1, & j > i \end{cases}$$

De asemenea, aplicaţiile de mai sus satisfac aşa-numitele *identităţi simpliciale*, anume:

$$\varepsilon_j \varepsilon_i = \varepsilon_i \varepsilon_{j-1},\ \forall i < j$$
$$\eta_j \eta_i = \eta_i \eta_{j+1},\ \forall i \leq j$$

$$\eta_j \varepsilon_i = \begin{cases} \varepsilon_i \eta_{j-1}, & i < j \\ Id_{[n]}, & i = j, j+1 \\ \varepsilon_{i-1} \eta_j, & i > j+1 \end{cases}$$

A.

Aşadar, a da un obiect simplicial A este echivalent cu a da obiectele A_n şi nişte operatori "faţă", $\partial_i : A_n \to A_{n-1}$ şi "degenerare" $\sigma_i : A_n \to A_{n+1}$, care satisfac identităţile simpliciale. Aceşti din urmă operatori se obţin simplu prin $\partial_i = A(\varepsilon_i)$ şi $\sigma_i = A(\eta_i)$.

Dat un obiect simplicial A într-o categorie abeliană $\mathcal{A}$, lui i se asociază un complex de lanţuri, $C_\bullet = C_\bullet(A_\bullet)$, care are ca obiecte $C_n = A_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ şi diferenţialele $d = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\partial_i$, care aplică $C_n \to C_{n-1}$.

Dual, dat un obiect cosimplicial, asociem un complex de colanţuri.

A.2. Coomologia Hochschild

Prezentăm acum, în contextul de mai sus, construcţia mai generală a coomologiei Hochschild. Prezentarea va fi, desigur, în acord cu cea din capitolul 2 al lucrării, dar funcţionează şi pentru alte obiecte.

Fie R o k-algebră fixată şi M un R-bimodul. Definim un *k-modul simplicial* (i.e. un obiect simplicial în categoria ${}_k\mathcal{M}$) prin $[n] \mapsto M \otimes R^{\otimes n}$, iar aplicaţiile:

$$\partial_i(m \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_n) = \begin{cases} mr_1 \otimes r_2 \otimes \cdots \otimes r_n, & i = 1 \\ m \otimes r_1 \otimes r_2 \otimes \cdots \otimes r_{i-1} \otimes r_i r_{i+1} \otimes r_{i+2} \otimes \cdots \otimes r_n, & 0 < i < n \\ r_n m \otimes r_1 \otimes r_2 \otimes \cdots \otimes r_{n-1}, & i = n \end{cases}$$

şi $\sigma_i(m \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_n) = m \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_i \otimes 1 \otimes r_{i+1} \otimes \cdots \otimes r_n$, $\forall 0 \leq i \leq n$.

Omologia Hochschild $HH_\bullet(R, M)$ a lui R cu coeficienţi în M este k-modulul $HH_n(R, M) = H_n(C(M \otimes R^{\otimes \bullet}))$.

Dual, obţinem un k-modul cosimplicial prin $[n] \mapsto Hom_k(R^{\otimes n}, M)$ şi aplicaţiile:

$$(\partial_i f)(r_0, \ldots, r_n) = \begin{cases} r_0 f(r_1, \ldots, r_n), & i = 0 \\ f(r_0, \ldots, r_{i-1}, r_i r_{i+1}, r_{i+2}, \ldots, r_n), & 0 < i < n \\ f(r_0, \ldots, r_{n-1})r_n, & i = n \end{cases}$$

şi $(\sigma_i f)(r_1, \ldots, r_{n-1} = f(r_1, \ldots, r_i, 1, r_{i+1}, \ldots, r_{n-1})$.

Coomologia Hochschild va însemna atunci $HH^\bullet(R, M) = H^\bullet(C(Hom_k(R^{\otimes \bullet}, M)))$.

Ca o aplicaţie, să observăm că folosind această construcţie, este imediat faptul că $HH_0(R, M) = M/[M, R]$, deoarece $Im(\partial_0 - \partial_1) = mr - rm$.

A.3. Monade şi omologie

Vom prezenta succint conceptul de (co)monadă într-o categorie şi vom vedea cum el duce într-un mod interesant la rezoluţii bar în categoria modulelor. Prezentarea urmează, în principal, [McLCat] pentru conceptele categoriale şi [Weibel] pentru aplicaţia la module.

Conceptul de monadă într-o categorie arbitrară extinde pe acela de monoid, în categoria mulţimilor. De fapt, riguros, o (co)monadă este o (co)algebră în categoria (monoidală a) endofunctorilor unei categorii. Definiţia formală este următoarea:

Definiţie A.3.1. O monadă $\top = (\top, \eta, \mu)$ într-o categorie $\mathcal{X}$ este un triplet format dintr-un (endo)functor $\top : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ şi două transformări naturale $\eta : Id_{\mathcal{X}} \to \top$, $\mu : \top^2 \to \top$, astfel încît diagramele următoare sînt comutative:

$$\begin{tikzcd} \top^3 \arrow[r, "\top\circ\mu"] \arrow[d, "\mu\circ\top"'] & \top^2 \arrow[d, "\mu"] \\ \top^2 \arrow[r, "\mu"] & \top \end{tikzcd} \quad \text{şi} \quad \begin{tikzcd} Id_{\mathcal{X}} \circ \top \arrow[r, "\eta\circ\top"] \arrow[d, equal] & \top^2 \arrow[d, "\mu"] & \top \circ Id_{\mathcal{X}} \arrow[l, "\top\circ\eta"'] \arrow[d, equal] \\ \top \arrow[r, equal] & \top \arrow[r, equal] & \top \end{tikzcd} .$$

Aşa cum am remarcat, definiţia extinde conceptul de monoid în categoria mulţimilor, iar analogia este completă asociind transformarea naturală μ înmulcţirii monoidului, iar η, unităţii. Astfel, prima diagramă comutativă devine ilustrarea proprietăţii de "asociativitate" a înmulţirii, iar cea dea doua, a proprietăţii unităţii bilaterale. Prin extensie, vom numi, uneori, μ înmulţirea monadei, iar η, unitatea monadei.

Rezultatul-cheie care ne permite să facem trecerea la rezoluţii şi teorii de (co)omologie leagă într-un mod foarte interesant monadele de perechile de functori adjuncţi. Vom schiţa doar demonstraţia, detaliile putînd fi consultate în [McLCat], p. 138.

Propoziţie A.3.1. Orice pereche de functori adjuncţi dă o monadă.

Demonstraţie: (Schiţă) Fie adjuncţia $(F, G, \varphi) : \mathcal{X} \to \mathcal{A}$. Conform [McLCat], Teorema 1, p.82, adjuncţia determină o transformare naturală $\eta : Id_{\mathcal{X}} \to GF$, numită unitatea adjuncţiei, precum şi o transformare naturală $\varepsilon : FG \to Id_{\mathcal{A}}$, astfel încît compunerile $G \xrightarrow{\eta G} GFG \xrightarrow{G\varepsilon} G$ şi $F \xrightarrow{F\eta} FGF \xrightarrow{\varepsilon F} F$ sînt identităţi.

Atunci, cei doi functori dau naştere la un endofunctor $\top = GF$, unitatea adjuncţiei η este chiar transformarea naturală de care avem nevoie, iar counitatea dă o înmulţire a monadei, prin aplicaţia $\mu = G\varepsilon F : GFGF = \top^2 \to GF = \top$. Axiomele adjuncţiei asigură acum comutativitatea celor două diagrame din definiţia monadei. ■

Conceptul dual este acela de comonadă, definit formal mai jos:

Definiţie A.3.2. O comonadă într-o categorie $\mathcal{A}$ este un triplet $\perp = (\perp, \varepsilon, \delta)$ format dintr-un (endo)functor $\perp : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ şi două transformări naturale $\varepsilon : \perp \to Id_{\mathcal{A}}$, $\delta : \perp \to \perp^2$, care fac diagramele comutative:

A.

$$\begin{tikzcd} \perp \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"'] & \perp^2 \arrow[d, "\perp\circ\delta"] \\ \perp^2 \arrow[r, "\delta\circ\perp"'] & \perp^3 \end{tikzcd} \quad \text{şi} \quad \begin{tikzcd} \perp \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & \perp \arrow[r, equal] \arrow[d, "\delta"] & \perp \arrow[d, equal] \\ Id_{\mathcal{A}}\circ \perp & \perp^2 \arrow[l, "\varepsilon\circ\perp"] \arrow[r, "\perp\circ\varepsilon"'] & \perp \circ Id_{\mathcal{A}} \end{tikzcd} .$$

Întru totul dual, avem şi următoarea:

Propoziţie A.3.2. Orice adjuncţie (F, G, φ) dă o comonadă $(FG, \varepsilon, F\eta G)$. ■

Urmînd acum [Weibel], asociem unei comonade un obiect simplicial, în aceeaşi categorie.

Dată o comonadă $\perp$ într-o categorie $\mathcal{A}$ şi un obiect $A \in \mathcal{A}$, asociem lui $\perp$ un obiect simplicial în $\mathcal{A}$ definind $\perp_n A =\perp^{n+1} A$, iar operatorii faţă şi degenerare să fie

$$\begin{aligned} \partial_i =\perp^i \circ\varepsilon\circ \perp^{n-i} &: \perp^{n+1} A \to\perp^n A, \\ \sigma_i =\perp^i \circ\delta\circ \perp^{n-i} &: \perp^{n+1} A \to\perp^{n+2} A. \end{aligned}$$

Dual, dată o monadă $\top$ într-o categorie $\mathcal{C}$, definim $L^n = \top^{n+1}C$ şi operatorii

$$\partial^i = \top^i \circ \eta \circ \top^{n-i}, \quad \sigma^i = \top^i \circ \mu \circ \top^{n-i}$$

pentru orice obiect $C \in \mathcal{C}$. Astfel, avem $L^\bullet = \top^{\bullet+1}C$ un obiect cosimplicial în $\mathcal{C}$, pentru orice obiect C din această categorie.

Desigur, ajunşi pe tărîm cunoscut, putem asocia acestor obiecte (co)simpliciale complexele care dau (co)omologia Hochschild, conform secţiunii anterioare din Anexă. Să facem lucrurile mai clare, obţinînd aşa-numita rezoluţie bar.

Definiţie A.3.3. Fie $\perp$ o comonadă într-o categorie $\mathcal{A}$. Un obiect $A \in \mathcal{A}$ se numeşte $\perp$-proiectiv dacă $\varepsilon_A :\perp A \to A$ are o secţiune $f : A \to\perp A$, i.e. $\varepsilon_A \circ f = Id_A$.

Pentru exemplificare, pornind de la perechia adjunctă (F, G, φ) şi comonada $\perp= FG$, atunci orice obiect de FC, $\forall C \in \mathcal{A}$ este $\perp$-proiectiv, deoarece aplicaţia $F\eta : FC \to F(GFC) =\perp (FC)$ este secţiunea căutată, din chiar definiţiile adjuncţiei şi asocierile din Prop. A.3.2.

Mai amintim o noţiune utilă:

Definiţie A.3.4. Fie $(X_\bullet, \delta_\bullet)$ un complex pozitiv de lanţuri de A-module, cu A un inel arbitrar. Dacă M este un A-modul, atunci numim o augmentare a lui $X_\bullet$ peste M un morfism de A-module $\epsilon : X_0 \to M$ pentru care compunerea $X_1 \xrightarrow{\delta_1} X_0 \xrightarrow{\epsilon} M$ este trivială, i.e. $\epsilon \circ \delta_1 = 0$. Un complex care are o augmentare se numeşte complex augmentat.

Definiţie A.3.5. Un complex simplicial augmentat (de A-module) $X_\bullet \xrightarrow{\delta_\bullet} X_0 \xrightarrow{\epsilon} M \to 0$ se numeşte contractibil dacă există familia de morfisme $f_\bullet : X_\bullet \to X_{\bullet+1}$, astfel încît $\epsilon \circ f_{-1} = Id$, $\delta_{n+1} \circ f_n = Id$, $\forall n \geq 0, \delta_0 \circ f_0 = f_{-1} \circ \epsilon$ şi $\delta_i \circ f_n = f_{n-1} \circ \delta_i$, $\forall 0 \leq i \leq n$.

Un rezultat simplu este că orice complex contractibil este asferic.

Cu acestea, putem da acum rezultatul care prezintă rezoluţia canonică asociată unei comonade.

Propoziţie A.3.3. Fie $\perp$ o comonadă într-o categorie abeliană $\mathcal{A}$. Dacă A este un obiect $\perp$-proiectiv din $\mathcal{A}$, atunci obiectul simplicial augmentat $\perp_\bullet A \xrightarrow{\epsilon} A$ este asferic, i.e. complexul augmentat de lanţuri asociat este exact:

$$0 \leftarrow A \xleftarrow{\epsilon} \perp A \xleftarrow{\delta_0 - \delta_1} \perp^2 A \xleftarrow{d} \perp^3 A \leftarrow \dots \tag{A.3.1}$$

Demonstraţie: Augmentarea ϵ este chiar ε din asocierea canonică a unui obiect simplicial unei comonade, din chiar identităţile simpliciale respectate de operatorii asociaţi.

Pentru $n \geq 0$, definim inductiv familia de morfisme $\{f_n\}_n$ prin $f_n =\perp^{n+1} f :\perp^{n+1} A \to\perp^{n+2} A$ şi punem $f_{-1} = f$. Prin definiţie, $\delta_{n+1} \circ f_n =\perp^{n+1} (\epsilon f) = Id$ şi $\delta_0 f_0 = (\epsilon \perp)(\perp f) = f\epsilon$.

Acum, pentru $n \geq 1$, $0 \leq i \leq n$, punînd $j = n - i$, $B =\perp^j$, $g =\perp^j f$, din naturaleţea lui ϵ:

$$\delta_i \circ f_n = (\perp^i \circ\epsilon_{\perp N})(\perp^i \perp g) = (\perp^i g)(\perp^i \epsilon_B) = f_{n-1}\delta_i \tag{A.3.2}$$

Calcule simple arată acum că familia de morfisme $\{f_n\}_n$ face $\perp_\bullet A \to A$ contractibil, deci asferic. ■.

Aplicînd acum acest rezultat pentru comonada asociată unei adjuncţii, avem succesiv:

Corolar A.3.1. Fie $\mathcal{A}$ o categorie abeliană şi $G : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ un functor care admite adjunct la dreapta, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$. Atunci, pentru orice obiect $C \in \mathcal{C}$, obiectul simplicial augmentat asociat $\perp_\bullet (FC) \to FC$ are complexul asociat contractibil, deci asferic în $\mathcal{A}$. ■

Propoziţie A.3.4. Fie $G : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ un functor care admite un adjunct la stînga $F : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$. Atunci pentru toate obiectele $A \in \mathcal{A}$, obiectul simplicial augmentat $G(\perp_\bullet A) \xrightarrow{G\varepsilon} GA$ are complexul asociat contractibil în $\mathcal{C}$, deci asferic. (Se defineşte $f_{-1} = \eta G : GA \to GFGA = G(\perp A)$ şi $f_n = \eta G \perp^n$.) ■

Aplicaţia mult aşteptată este pentru categorii de module, unde vom obţine rezoluţia bar.

Fie $k \to R$ un morfism de inele (care ne permite să transferăm structura unui R-modul pe un k-modul) şi functorul uituc $U :_R \mathcal{M} \to_k \mathcal{M}$. Atunci el admite un adjunct la dreapta, anume $F(M) = R \otimes_k M$, $\forall_R M$. Aşadar, obţinem comonada $\perp= FU$ în ${}_R\mathcal{M}$. Complexul de lanţuri asociat obiectului simplicial $\perp_\bullet M$ se numeşte *rezoluţia bar (nenormalizată)* a lui ${}_RM$, notat $\beta_\bullet(R, M)$. Conform cu asocierea dintre o comonadă şi un complex simplicial, componentele rezoluţiei sînt $\beta_0(R, M) = R \otimes_k M$ şi $\beta_n(R, M) = R^{\otimes_k(n+1)} \otimes_k M$, iar rezoluţia arată astfel:

$$0 \leftarrow M \xleftarrow{\epsilon} R \otimes_k M \leftarrow R \otimes_k R \otimes_k M \leftarrow \dots \tag{A.3.3}$$

Vom folosi, de asemenea, complexul normalizat, definit astfel:

A.

Definiţie A.3.6. Fie A un obiect simplicial într-o categorie abeliană $\mathcal{A}$. Se numeşte complexul (de lanţuri) normalizat complexul (de lanţuri) $(N_\bullet(A), \partial_\bullet)$, care are componentele:
$N_n(A) = \bigcap_{i=0}^{n-1} ker(\delta_i : A_n \to A_{n-1})$ şi diferenţialele $\partial_n = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \delta_i$.

Aplicînd aceasta pentru rezoluţia bar $\beta_\bullet(R, M)$, obţinem normalizata $(\overline{\beta}_\bullet(R, M), \overline{\delta})$, care are componentele $\overline{\beta_n}(R, M) = R \otimes \overline{R}^{\otimes n} \otimes M$, unde $\overline{R}$ este conucleul morfismului unitar de inele $k \to R$. Diferenţialele sînt date de:

$$\begin{aligned}\overline{\delta}(r_0 \otimes \overline{r}_1 \otimes \cdots \otimes \overline{r}_n \otimes m) = {} & r_0 r_1 \otimes \overline{r_2} \otimes \cdots \otimes \overline{r}_n \otimes m \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i r_0 \otimes \cdots \otimes \overline{r}_{i-2} \otimes \overline{r}_i \overline{r}_{i+1} \otimes \overline{r}_{i+2} \otimes \cdots \otimes m \\ & + (-1)^n r_0 \otimes \overline{r}_1 \otimes \cdots \otimes \overline{r}_{n-1} \otimes r_n m.\end{aligned}$$

BIBLIOGRAFIE

[BGS] Beilinson, A., Ginzburg, V., Soergel, W. - *Koszul Duality Patterns in Representation Theory*, Journal of AMS, Vol. 9, No. 2, April 1996

[BrzW] Brzezinski, T., Wisbauer, R. - *Corings and Comodules*, London Mathematical Society Lecture Note Series 309, CUP, 2003

[DNR] Dăscălescu, S., Năstăsescu, C., Raianu, Ş. - *Hopf Algebras - An Introduction*, M. Dekker, 2001

[JPŞ1] Jara, P., Pena, J.L., Ştefan, D. - *Koszul Pairs*, submitted

[JPŞ2] Jara, P., Pena, J.L., Ştefan, D. - *On Koszulity of Twisted Tensor Products*, arXiv, `http://arxiv.org/abs/1011.4243v1`, 2010

[Loday] Loday, J-L. - *Cyclic Homology*, Springer, 1992

[McLCat] MacLane, S. - *Categories for the Working Mathematician*, Second Edition, Springer, 1998

[McLHom] MacLane, S. - *Homology*, Springer, Fourth Printing 1994

[PP] Polishchuk, A., Positselski, L. - *Quadratic Algebras*, University Lecture Series, Vol. 37, AMS 2005

[Rotman] Rotman, J.J. - *An Introduction to Homological Algebra*, Springer, 2009

[Schwg] Schweigert, P. - *Hochschild Cohomology*, Seminar Talk Lecture Notes, 2011

[Seibt] Seibt, P. - *Cyclic Homology of Algebras*, World Scientific, 1987

[DŞ] Ştefan, D. - *Algebre necomutative formal netede*, Editura Universităţii Bucureşti, 2002

[Vermani] Vermani, L.R. - *An Elementary Approach to Homological Algebra*, Chapman & Hall/CRC, 2003

[Weibel] Weibel, C. - *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge University Press, 1994