Exerciții recapitulative admitere
Algebră și analiză

1. Să se calculeze $E = C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3$.
2. Fie funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - \ln x$.
Să se determine abscisa punctului de extrem local al funcției f.
3. Fie funcția:

$$f : (-2, 0) \cup (2, \infty) \to [-4, \infty), \quad f(x) = x^2 - 4.$$

Atunci:

(a) f nu este injectivă;

(b) f este surjectivă;

(c) f este crescătoare;

(d) f este descrescătoare;

(e) f nu este bijectivă;

(f) f este inversabilă.

4. Să se rezolve inecuația:

$$(x^2 - 5x)(x^2 - 6x + 8) \leq 0.$$

5. Pentru ce valori ale parametrului m vîrfurile parabolelor:

$$y = x^2 + 2(m-1)x + m - 1$$

se află deasupra axei OX?
6. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - (a+3)x + a^2$. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încît graficul funcției f să taie axa OX în două puncte distincte.
7. Fie funcția:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}.$$

Atunci:

(a) f nu este injectivă;

(b) f nu este surjectivă;

(c) f este injectivă, dar nu este surjectivă;

(d) f este surjectivă, dar nu este injectivă;

(e) f este bijectivă;

(f) f este bijectivă și $f^{-1} = f$.

8. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încît ecuațiile:

$$\begin{aligned} x^4 + 4x^3 + 4x^2 + a = 0 \\ x^3 + x^2 - x + b = 0 \end{aligned}$$

să aibă o soluție dublă comună.

9. Următoarele numere complexe:

$$\begin{aligned} z_1 &= 2 + 2i \\ z_2 &= -1 + i \\ z_3 &= -2 - 2i \\ z_4 &= 1 - i \end{aligned}$$

sînt vîrfurile unui:

(a) pătrat;

(b) dreptunghi;

(c) romb;

(d) trapez isoscel;

(e) patrulater oarecare;

(f) paralelogram (care nu este romb).

10. Fie $z = \dfrac{8+6i}{3+4i}$. Să se calculeze $|z|$.

11. Cîți termeni raționali conține dezvoltarea $(\sqrt{3} + \sqrt[4]{5})^{200}$?

12. Fie A o matrice pătratică cu proprietatea că $A^3 = 0$.
Calculați $(I_n - A)^{-1}$.

13. Se consideră sistemul de ecuații cu coeficienți din $\mathbb{Z}_7$:

$$\begin{cases} mx + y + z & = \widehat{1} \\ \widehat{2}x + \widehat{3}y + mz & = m \\ x + my + z & = m^2. \end{cases}$$

și S mulțimea soluțiilor sale.

Determinați mulțimea $A = \{m \in \mathbb{Z}_7 \mid S = \emptyset\}$.

14. Pe $\mathbb{Z}$ se definește legea de compoziție:

$$x \circ y = xy - 2x - 2y + 6, \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}.$$

Calculați suma elementelor inversabile din $\mathbb{Z}$ în raport cu această lege.

15. Pentru orice $x \in \mathbb{Z}$, notăm $\widehat{x}$ clasa lui x din $\mathbb{Z}_5$ și cu $\overline{x}$ clasa lui x din $\mathbb{Z}_3$.

Să se determine $x \in \mathbb{Z}, 1 \leq x \leq 15$ astfel încît:

$$\widehat{x}^2 - \widehat{4}\widehat{x} + \widehat{3} = \widehat{0}$$
$$\overline{2}\overline{x}^2 + \overline{x} = \overline{0}.$$

16. Fie mulțimea $A = \{\cos 1, \cos 2, \cos 3, \cos 4, \cos 5\}$. Determinați cel mai mare element al mulțimii.

17. Care dintre următoarele afirmații este adevărată?

(a) Orice șir care are limita ∞ este crescător;

(b) Există șiruri convergente care sînt nemărginite;

(c) Un șir este convergent dacă și numai dacă este monoton și mărginit;

(d) Un șir este convergent dacă și numai dacă are limită;

(e) Orice șir monoton și mărginit este convergent;

(f) Orice șir nemărginit are limita $\pm\infty$.

18. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = [x] + 3$. Atunci:

(a) f este continuă;

(b) $x = 1$ este punct de discontinuitate de speța a doua;

(c) f nu are proprietatea lui Darboux;

(d) f are proprietatea lui Darboux;

(e) f este discontinuă într-un singur punct;

(f) toate afirmațiile precedente sînt false.

19. Să se determine numărul soluțiilor ecuației $x^3 + 4x - 6 = 0$ situate în intervalul $[1, 2]$.

20. Calculați derivata funcției:

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^5 + \ln(x+1)$$

în punctul $x = 1$.

21. Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este derivabilă și impară. Atunci:

(a) f' este impară;

(b) $f' = 0$;

(c) f' este pară;

(d) f' nu este nici pară, nici impară;

(e) $f'(0) = 0$;

(f) f' este crescătoare.

22. Fie funcția:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \leq 0 \\ -x^2 - 2x, & x > 0 \end{cases}$$

Să se calculeze $(f^{-1})'(3)$, dacă există.

23. Folosind monotonia funcției $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x \ln x$, să se ordoneze crescător numerele:

$$a = \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2}, \quad b = \left(\frac{8}{5}\right)^{8/5}, \quad c = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}.$$

24. Găsiți ecuația tangentei la curba $y = x^2 - x$ în punctul $A(1, 0)$.

25. Să se determine o funcție de forma $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ astfel încît tangenta la grafic în punctul de abscisă $x = 1$ să fie paralelă cu prima bisectoare și graficul funcției să admită dreptele $y = 3$ și $x = -1$ ca asimptote.

26. Calculați mulțimea primitivelor funcției $f(x) = \dfrac{1}{x \ln^2 x}$.

27. Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încît $F(x) = \ln \sqrt{4+x^2}$ să fie o primitivă a funcției $f(x) = \dfrac{x+a}{4+x^2}, x \in \mathbb{R}$.

28. Calculați derivata funcției:

$$f(x) = \int_0^{\arctan x} \frac{1}{1+\tan^2 x} dt.$$

29. Calculați integrala:

$$I = \int_0^1 \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} dx.$$

30. Funcția:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{2x^2} e^{2t^2} \sin t dt$$

are proprietatea:

(a) este crescătoare;

(b) este descrescătoare;

(c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^4} = 2;$

(d) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x^4} = 2;$

(e) este impară;

(f) nu este derivabilă în $x = 0$.