Analiză 1

Notițe de seminar

Adrian Manea
Curs: L. Costache

11 octombrie 2020

Cuprins

SEMINAR 1

ȘIRURI DE NUMERE REALE ȘI POZITIVE

1.1 Exerciții recapitulative

În toate cele de mai jos, presupunem că lucrăm cu șiruri de numere reale și pozitive.

1. Găsiți valoarea de adevăr a afirmațiilor de mai jos. Dacă sînt adevărate, justificați. Dacă sînt false, găsiți un contraexemplu.

(a) Orice șir monoton este mărginit.

(b) Orice șir mărginit este monoton.

(c) Orice șir convergent este monoton.

(d) Orice subșir al unui șir monoton este monoton.

(e) Suma a două șiruri monotone este un șir monoton.

(f) Orice șir divergent este nemărginit.

(g) Dacă șirul format din pătratele termenilor unui șir este convergent, atunci șirul inițial este convergent.

2. Calculați limitele șirurilor cu termenul general a_n în cazurile de mai jos:

(a) $a_n = \dfrac{n^3 + 5n^2 + 1}{6n^3 + n + 4}$;

(b) $a_n = \dfrac{n^2 + 2n + 5}{5n^3 - 1}$;

(c) $a_n = \arcsin \dfrac{n+1}{2n+3}$;

(d) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1} + 4\sqrt{n^2+n+1}}{n}$;

(e) $a_n = \dfrac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2}{n^3}$;

(f) $a_n = \dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

(g) $a_n = \sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2+n}$;

(h) $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$;

(i) $a_n = \left(\dfrac{n+5}{3n+2}\right)^n$;

(j) $a_n = 1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{64} + \cdots + \dfrac{1}{4^n}$;

(k) $a_n = \dfrac{2 + \sin n}{n^2}$;

(l) $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$;

(m) $a_n = \dfrac{\ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n}{n+1}$;

(n) $a_n = \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right)$;

(o) $a_n = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$;

(p) $a_n = \dfrac{1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4}{n^5}$;

(q) $a_n = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\right)$;

(r) $a_n = \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \cdots + \dfrac{1}{2n-1}\right)$.

SEMINAR 2

SERII CU TERMENI POZITIVI

2.1 Seria geometrică și seria armonică

Intuitiv, seriile sînt *sume infinite*. Înainte de a le studia mai amănunțit, începem cu două exemple foarte utilizate.

Dacă (b_n) este o progresie geometrică de rație q, atunci suma primilor n termeni se poate scrie sub forma:

$$S_n = b_0 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

În cazul seriilor, ne punem problema să calculăm suma *tuturor* termenilor progresiei, adică:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} S_n = \sum_{n \geq 0} b_n.$$

Folosind formula de mai sus, se poate vedea ușor că seria geometrică este convergentă, adică limita de mai sus este finită, dacă și numai dacă $|q| < 1$. Mai mult, în acest caz, suma seriei este:

$$\sum_{n \geq 0} b_n = b_0 \cdot \frac{1}{1 - q}.$$

Un alt exemplu foarte important de serie este *seria armonică*, numită și *funcția zeta a lui Riemann*. Aceasta se definește astfel:

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^s}, \quad s \in \mathbb{Q}.$$

Cîteva exemple imediate:

$$\zeta(0) = \sum 1 = \infty$$
$$\zeta(1) = \sum \frac{1}{n} = \infty$$
$$\zeta(2) = \sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$
$$\zeta(-1) = \sum n = \infty$$
$$\zeta(-2) = \sum n^2 = \infty.$$

Un rezultat general este următorul:

Teoremă 2.1: *Seria armonică este convergentă dacă și numai dacă exponentul s este strict supraunitar, adică $s > 1$.*

2.2 Criterii de convergență

Putem afla dacă o serie este convergentă aplicînd unul dintre criteriile care urmează. Fixăm mai întîi notația: presupunem că vorbim despre o serie cu termenul general x_n, adică $\sum_{n\geq 1} x_n = \sum x_n$.

Criteriul necesar: Dacă $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$, atunci seria $\sum x_n$ este divergentă.

Observaţie 2.1: Să remarcăm că acest criteriu dă o condiție necesară, care nu este suficientă! Într-adevăr, seria $\zeta(1)$ are termenul general tinzînd spre 0, dar seria este divergentă!

Criteriul de comparație termen cu termen: Fie $\sum y_n$ o altă serie de numere reale și pozitive.

- Dacă $x_n \leq y_n, \forall n$ și $\sum y_n$ este convergentă, atunci și seria $\sum x_n$ este convergentă;
- Dacă $x_n \geq y_n, \forall n$ și $\sum y_n$ este divergentă, atunci și seria $\sum x_n$ este divergentă.

Criteriul de comparație la limită: Fie $\sum y_n$ o altă serie de numere reale și pozitive. Dacă $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l \in (0, \infty)$, atunci cele două serii au aceeași natură (seria $\sum x_n$ este convergentă dacă și numai dacă seria $\sum y_n$ este convergentă).

Observaţie 2.2: În ambele criterii de comparație, un candidat foarte bun pentru seria y_n este fie seria armonică, cu un anume exponent s, fie seria geometrică, cu o anume rație, alese convenabil.

Observaţie 2.3: Criteriul de comparație la limită poate fi folosit și în cazuri care nu sînt cuprinse în enunțul de mai sus. De exemplu, dacă $\frac{x_n}{y_n} \longrightarrow 0$, înseamnă că $x_n \leq y_n, \forall n$, deci putem folosi un argument de tip comparație termen cu termen:

- dacă seria $\sum y_n$ este convergentă, atunci seria $\sum x_n$ este convergentă;
- dacă seria $\sum x_n$ este divergentă, atunci seria $\sum y_n$ este divergentă.

În celelalte cazuri nu putem decide.

Criteriul raportului (D'Alembert): Fie $\ell = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

- Dacă $\ell > 1$, atunci seria este divergentă;
- Dacă $\ell < 1$, atunci seria este convergentă;
- Dacă $\ell = 1$, criteriul nu decide.

Criteriul radical (rădăcinii, Cauchy): Fie $\ell = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{x_n}$.

- Dacă $\ell > 1$, atunci seria este divergentă;
- Dacă $\ell < 1$, atunci seria este convergentă;
- Dacă $\ell = 1$, criteriul nu decide.

Criteriul Raabe-Duhamel: Fie $\ell = \lim\limits_{n \to \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right)$.

- Dacă $\ell > 1$, atunci seria este convergentă;
- Dacă $\ell < 1$, atunci seria este divergentă;
- Dacă $\ell = 1$, criteriul nu decide.

2.3 Exerciții

1. Studiați convergența seriilor $\sum x_n$ în cazurile de mai jos:

(a) $x_n = \left(\dfrac{3n}{3n+1}\right)^n$; (D, necesar)

(b) $x_n = \dfrac{1}{n!}$; (C, raport)

(c) $x_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n+1}}$; (C, comparație la limită cu $\zeta(3/2)$)

(d) $x_n = \arcsin \dfrac{n+1}{2n+3}$; (D, necesar)

(e) $x_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$; (D, necesar)

(f) $x_n = \dfrac{n!}{n^{2n}}$; (C, raport)

(g) $x_n = \left(\dfrac{n+1}{3n+1}\right)^n$; (C, radical)

(h) $x_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$; (C, radical)

(i) $x_n = \dfrac{1}{7^n + 3^n}$; (C, comparație cu geometrică)

(j) $x_n = \dfrac{2 + \sin n}{n^2}$; (C, comparație cu armonică)

(k) $x_n = \dfrac{\sin^2 n}{n^2 + 1}$; (C, comparație cu armonică)

(l) $x_n = \sqrt{n^4 + 2n + 1} - n^2$; (D, comparație cu armonică)

(m) $x_n = \dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{2^n}$; (D, descompunere în 2 serii)

(n) $x_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}$; (D, Raabe)

(o) $x_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$; (C, raport)

(p) $x_n = \dfrac{n! \cdot 3^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$; (D, raport)

(q) $x_n = \dfrac{3n-1}{5n^2+2}$; (D, comparație la limită)

(r) $x_n = (\arctan 1)^n$; (C, radical)

2*. Studiați convergența *seriilor* cu termenul general dat de șirurile de la exercițiul 2 al secțiunii anterioare.

INDEX