

# **Analiză 2**

Notițe de seminar

ADRIAN MANEA  
Curs: M. Olteanu

15 mai 2021

# Cuprins

<b>1</b>	<b>Primitive și integrale — Recapitulare</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Integrale improprii și cu parametri</b>	<b>4</b>
2.1	Exerciții . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Integrale duble</b>	<b>12</b>
3.1	Exerciții . . . . .	12
3.2	Metode de calcul . . . . .	12
3.3	Exerciții . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Integrale triple</b>	<b>15</b>
4.1	Exerciții suplimentare . . . . .	17
4.2	Resurse suplimentare . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Integrale curbilinii</b>	<b>18</b>
5.1	Elemente de teorie . . . . .	18
5.2	Formula Green-Riemann . . . . .	19
5.2.1	Forme diferențiale închise . . . . .	20
5.3	Exerciții . . . . .	20
5.4	Exerciții suplimentare (ETTI) . . . . .	22
<b>6</b>	<b>Recapitulare parțial</b>	<b>24</b>
<b>7</b>	<b>Integrale de suprafață</b>	<b>26</b>
7.1	Integrale de suprafață de speța întâi . . . . .	26
7.2	Integrale de suprafață de speța a doua . . . . .	27
7.3	Formula Gauss-Ostrogradski . . . . .	27
7.4	Parametrizări uzuale . . . . .	29
7.5	Exerciții . . . . .	29
7.6	Formula lui Stokes . . . . .	30
7.7	Exerciții . . . . .	30
7.8	Resurse suplimentare . . . . .	31

7.9	Exerciții suplimentare . . . . .	31
<b>8</b>	<b>Recapitulare formule integrale</b>	<b>32</b>
	<b>Index</b>	<b>34</b>

## SEMINAR 1

# PRIMITIVE ȘI INTEGRALE – RECAPITULARE

Pentru acest prim seminar, ne vom aminti câteva din formulele de calcul integral, precum și tehnicile de calcul.

Puteți consulta o listă de primitive uzuale în orice manual de clasa a XII-a sau online, de exemplu, aici.

În special, vom avea nevoie în exercițiile de mai jos, de următoarele formule:

$$\bullet \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c;$$

$$\bullet \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + c;$$

$$\bullet \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln (x + \sqrt{x^2 + a^2}) + c;$$

$$\bullet \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln (x + \sqrt{x^2 - a^2}) + c;$$

$$\bullet \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c;$$

$$\bullet \int \frac{-dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arccos \frac{x}{a} + c.$$

Folosind acestea, calculați integralele de mai jos:

$$(1) \int \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 - 16}} dx;$$

$$(2) \int \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 7} dx;$$

$$(3) \int \frac{2x + 3}{x^2 - 5x + 6} dx;$$

$$(4) \int \frac{x - 1}{3x^2 - 6x + 11} dx;$$

$$(5) \int \frac{2x}{x^4 - 1} dx;$$

$$(6) \int_1^{\sqrt{e}} x \log_3 x dx;$$

$$(7) \int_1^e \sin(\ln x) dx;$$

$$(8) \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{3 - 2x}{2x^2 + 1} dx;$$

$$(9) \int_1^e \frac{\ln x}{x(2 + \ln x)} dx;$$

$$(10) \int_0^1 \frac{3x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1}{x^2 - 5x + 6} dx;$$

$$(11) \int_0^1 \frac{x^5 + 2x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2x + 1} dx;$$

$$(12) \int_0^1 \frac{1}{x^2 + x + 3} dx;$$

$$(13) \int_0^1 \frac{5}{3x^2 + 6x + 21} dx.$$

## SEMINAR 2

# INTEGRALE IMPROPRII ȘI CU PARAMETRI

Integralele improprii sînt integrale în care fie unul dintre capete este infinit, fie funcția nu este definită în cel puțin un punct din domeniul de integrare. De exemplu:

- $\int_0^1 \frac{\ln x}{x}$  este improprie în  $x = 0$ ;
- $\int_0^\infty \frac{\ln x}{x}$  este improprie în ambele capete.

Pentru aceste integrale, calculul se poate face trecînd la limită, dacă unul dintre capete este infinit. Mai precis, avem:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x)dx,$$

dacă integrala nu este improprie și în capătul  $x = a$  sau în alt punct din interiorul domeniului.

Pentru celelalte cazuri, există criterii de convergență, care depășesc scopul acestui seminar. Le includem mai jos, pentru completitudine.

\*\*\*\*\*

Fie  $a, b \in \mathbb{R}$  și  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție *local integrabilă* (i.e. integrabilă pe orice interval compact  $[u, v] \subseteq [a, b)$ ).

Integrala improprie (în  $b$ )  $\int_a^b f(x)dx$  se numește *convergentă* dacă limita:

$$\lim_{t \rightarrow b} \int_a^t f(x)dx$$

există și este finită. Valoarea limitei este valoarea integralei. În caz contrar, integrala se numește *divergentă*.

Dacă  $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  este local integrabilă, atunci integrala improprie (la  $\infty$ )  $\int_a^\infty f(x)dx$  se numește *convergentă* dacă limita:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x)dx$$

există și este finită. Valoarea limitei este egală cu valoarea integralei.

Integrala improprie  $\int_a^b f(x)dx$  se numește *absolut convergentă* dacă integrala  $\int_a^b |f(x)|dx$  este convergentă.

Criteriile de convergență pentru integralele improprii sînt foarte asemănătoare cu cele pentru serii (amintiți-vă, că, de fapt, integralele definite se construiesc cu ajutorul sumelor infinite, adică serii, v. *sumele Riemann*).

Așadar, avem:

**Criteriul lui Cauchy** (general): Fie  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  local integrabilă. Atunci integrala  $\int_a^b f(t)dt$  este convergentă dacă și numai dacă:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists b_\varepsilon \in [a, b) \text{ a.î. } \forall x, y \in (b_\varepsilon, b), \left| \int_x^y f(t)dt \right| < \varepsilon.$$

**Criteriul de comparație** („termen cu termen“): Fie  $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încît  $0 \leq f \leq g$ .

- Dacă  $\int_a^b g(x)dx$  este convergentă, atunci și integrala  $\int_a^b f(x)dx$  este convergentă;
- Dacă integrala  $\int_a^b f(x)dx$  este divergentă, atunci și integrala  $\int_a^b g(x)dx$  este divergentă.

**Criteriul de comparație la limită:** Fie  $f, g : [a, b) \rightarrow [0, \infty)$ , astfel încît să existe limita:

$$\ell = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

- Dacă  $\ell \in [0, \infty)$ , iar  $\int_a^b g(x)dx$  este convergentă, atunci  $\int_a^b f(x)dx$  este convergentă;
- Dacă  $\ell \in (0, \infty)$  sau  $\ell = \infty$ , iar  $\int_a^b g(x)dx$  este divergentă, atunci și  $\int_a^b f(x)dx$  este divergentă.

**Criteriul de comparație cu  $\frac{1}{x^\alpha}$ :** Fie  $a \in \mathbb{R}$  și  $f : [a, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  local integrabilă, astfel încât să existe:

$$\ell = \lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f(x).$$

- Dacă  $\alpha > 1$  și  $0 \leq \ell < \infty$ , atunci  $\int_a^\infty f(x)dx$  este convergentă;
- Dacă  $\alpha \leq 1$ , iar  $0 < \ell \leq \infty$ , atunci  $\int_a^\infty f(x)dx$  este divergentă.

**Criteriul de comparație cu  $\frac{1}{(b-x)^\alpha}$ :** Fie  $a < b$  și  $f : [a, b) \rightarrow [0, \infty)$ , local integrabilă, astfel încât să existe:

$$\ell = \lim_{x \rightarrow b} (b-x)^\alpha f(x).$$

- Dacă  $\alpha < 1$  și  $0 \leq \ell < \infty$ , atunci  $\int_a^b f(x)dx$  este convergentă;
- Dacă  $\alpha \geq 1$  și  $0 < \ell \leq \infty$ , atunci  $\int_a^b f(x)dx$  este divergentă.

**Criteriul lui Abel:** Fie  $f, g : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , cu proprietățile:

- $f$  este de clasă  $\mathcal{C}^1$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ , iar  $\int_a^\infty f'(x)dx$  este absolut convergentă;
- $g$  este continuă, iar  $G(x) = \int_a^x f(t)dt$  este mărginită pe  $[a, \infty)$ .

Atunci integrala  $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$  este convergentă.

**Exercițiu:** Folosind criteriile de comparație, să se studieze natura integralelor improprii:

(a)  $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$  (D);

(b)  $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$  (C);

(c)  $\int_0^1 \frac{\sin x}{1-x^2} dx$  (D);



$$(d) \int_1^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^3 - 1}} dx \quad (C \ x = 1, D \ x \rightarrow \infty \Rightarrow D);$$

$$(e) \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x^3 - 1}} dx \quad (C);$$

$$(f) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} \quad (C \ x \rightarrow \infty, D \ x = 1 \Rightarrow D);$$

$$(g) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha}, \alpha > 0 \quad (D);$$

\*\*\*\*\*

Un caz particular care ne interesează este acela al integralelor improprii cu parametri. Un exemplu este:

$$I(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2 x + m^2 \sin^2 x) dx, \quad m > 0,$$

care se poate rezolva folosind tehnica de derivare în interiorul integralei, adică:

$$I'(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial m} \ln(\cos^2 x + m^2 \sin^2 x) dx.$$

### Exemple rezolvate:

Să se calculeze integralele, folosind derivarea sub integrală:

$$(a) I(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2 x + m^2 \sin^2 x) dx, \quad m > 0;$$

$$(b) I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 - \sin^2 \theta) d\theta, \quad a > 1;$$

$$(c) I(a) = \int_0^1 \frac{\arctan ax}{x\sqrt{1-x^2}} dx, \quad a > 0.$$

*Soluții:*

(a) Dacă considerăm funcția:

$$f(x, m) = \ln(\cos^2 x + m^2 \sin^2 x),$$

observăm că este continuă și admite o derivată parțială continuă în raport cu  $m$ .

Atunci obținem:

$$\frac{\partial f}{\partial m} = I'(m) = 2m \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x + m^2 \sin^2 x} dx$$

Pentru a calcula integrala, facem schimbarea de variabilă  $\tan x = t$  și atunci:

$$dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx.$$

Integrala inițială se poate prelucra:

$$I'(m) = 2m \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x(1 + m^2 \tan^2 x)} dx.$$

Așadar, pentru a obține  $\sin^2 x$  în funcție de  $t$  calculăm:

$$\frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x} = t^2 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{t^2}{1 + t^2}.$$

În fine, integrala devine:

$$I'(m) = 2m \int_0^{\infty} \frac{t^2}{(1 + m^2 t^2)(1 + t^2)} dt.$$

Făcînd descompunerea în fracții simple, obținem:

$$\frac{t^2}{(1 + m^2 t^2)(1 + t^2)} = \frac{1}{m^2 - 1} \left( \frac{1}{t^2 + 1} - \frac{1}{m^2 t^2 + 1} \right).$$

și calculăm în fine integrala  $I'(m) = \frac{\pi}{m+1}$ . Integrăm și găsim  $I(m) = \pi \ln(m + 1) + c$ . Deoarece  $I(1) = 0$ , rezultă  $c = -\pi \ln 2$  și, în fine:

$$I(m) = \pi \ln \frac{m + 1}{2}.$$

(b) Dacă considerăm funcția:

$$f(\theta, a) = \ln(a^2 - \sin^2 \theta),$$

observăm că este continuă și admite o derivată parțială continuă în raport cu  $a$ .

Atunci avem:

$$I'(a) = \frac{\partial f}{\partial a} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a}{a^2 - \sin^2 \theta} d\theta.$$

Cu schimbarea de variabilă  $t = \tan \theta$ , avem succesiv:

$$\begin{aligned}
 I'(a) &= \int_0^\infty \frac{2a}{a^2 - \frac{t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt \\
 &= \int_0^\infty \frac{2a}{t^2(a^2-1) + a^2} dt \\
 &= \frac{2a}{a^2-1} \int_0^\infty \frac{1}{t^2 + \frac{a^2}{a^2-1}} dt \\
 &= \frac{2a}{a^2-1} \cdot \frac{\sqrt{a^2-1}}{a} \cdot \arctan t \frac{\sqrt{a^2-1}}{a} \Big|_0^\infty \\
 &= \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} \cdot \frac{\pi}{2} \\
 &= \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.
 \end{aligned}$$

Integrăm pentru a obține  $I(a)$  și găsim:

$$I(a) = \int \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}} da = \pi \ln(a + \sqrt{a^2-1}) + c.$$

Pentru a calcula constanta  $c$ , putem rescrie integrala din forma inițială:

$$\begin{aligned}
 I(a) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left( a^2 \left( 1 - \frac{\sin^2 \theta}{a^2} \right) \right) d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln a^2 d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left( 1 - \frac{\sin^2 \theta}{a^2} \right) d\theta.
 \end{aligned}$$

Putem considera limita  $a \rightarrow \infty$  și atunci integrala de calculat tinde la 0, deci  $c = -\pi \ln 2$ .

Concluzie:  $I(a) = \pi \ln \frac{a + \sqrt{a^2-1}}{2}$ .

(c) Dacă considerăm funcția  $f(x, a) = \frac{\arctan ax}{x\sqrt{1-x^2}}$ , observăm că este continuă și admite o derivată parțială continuă în raport cu  $a$ . Atunci:

$$I'(a) = \frac{\partial f}{\partial a} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+a^2x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Pentru a calcula integrala, facem schimbarea de variabilă  $x = \sin t$  și obținem:

$$I'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+a^2 \sin^2 t}.$$

Mai departe, aplicăm schimbarea de variabilă  $\tan t = u$  și obținem succesiv:

$$\begin{aligned} I'(a) &= \int_0^\infty \frac{du}{(1+a^2)u^2+1} \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}. \end{aligned}$$

Așadar, printr-o integrare în funcție de  $a$ , găsim:

$$I(a) = \frac{\pi}{2} \ln(a + \sqrt{1+a^2}) + c.$$

Cum  $I(0) = 0$ , găsim  $c = 0$ .

Însă accentul pentru acest seminar va cădea pe *funcțiile lui Euler*, Beta și Gamma, care se definesc astfel:

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx, t > 0 \\ B(p, q) &= \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1}, p, q > 0. \end{aligned}$$

Remarcăm că integrala Gamma este improprie pentru  $x \rightarrow \infty$ , iar integrala Beta nu este improprie, ci doar cu parametri.

Proprietățile pe care le vom folosi în exerciții sînt:

- (1)  $B(p, q) = B(q, p), \forall p, q > 0$ ;
- (2)  $B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ ;
- (3)  $B(p, q) = \int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}} dy$ ;
- (4)  $\Gamma(1) = 1$ ;
- (5)  $\Gamma(t+1) = t \cdot \Gamma(t), \forall t > 0$ ;
- (6)  $\Gamma(n) = (n-1)!, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

## 2.1 Exerciții

Calculați, folosind funcțiile  $B$  și  $\Gamma$ , integralele:

$$(a) \int_0^{\infty} e^{-x^p} dx, p > 0;$$

$$(b) \int_0^{\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(x+1)^2} dx;$$

$$(c) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+1};$$

$$(d) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos^q x dx, p > -1, q > -1;$$

$$(e) \int_0^1 x^{p+1}(1-x^m)^{q-1} dx, p, q, m > 0;$$

$$(f) \int_0^{\infty} x^p e^{-x^q} dx, p > -1, q > 0;$$

$$(g) \int_0^1 \ln^p x^{-1} dx, p > -1;$$

$$(h) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}, n \in \mathbb{N};$$

$$(i) \int_1^e \frac{1}{x} \ln^3 x \cdot (1 - \ln x)^4 dx;$$

$$(j) \int_0^1 \sqrt{\ln \frac{1}{x}} dx;$$

$$(k) \int_0^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^4)^2} dx;$$

$$(l) \int_{-1}^{\infty} e^{-x^2-2x+3} dx;$$

$$(m) \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1+x^2)};$$

$$(n) \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}(1+x^3)};$$

$$(o) \int_{-3}^{\infty} e^{-2x^2-12x+5} dx;$$

$$(p) \int_0^1 \sqrt[5]{\ln \frac{3}{x^2}} dx;$$

$$(q) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}};$$

$$(r) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cdot \cos^5 x dx;$$

$$(s) \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

### 3.1 Exerciții

Reprezentați grafic domeniile date de următoarele (in)ecuații:

- (a)  $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2, y^2 = x\}$
- (b)  $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2, y = x, xy = 1\}$ ;
- (c)  $D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2y\}$ ;
- (d)  $D_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq x, y \geq 0\}$ ;
- (e)  $D_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0, x + y - 6 = 0, y^2 = 8x\}$ ;
- (f)  $D_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2x + 2y - 1\}$ .

### 3.2 Metode de calcul

Cazurile particular care ne interesează sînt de 4 feluri.

**Integralele pe dreptunghiuri** se calculează direct, ca niște integrale iterate. De exemplu, pentru  $D = [a, b] \times [c, d]$ , avem:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx,$$

ultima egalitate rezultînd dintr-o teoremă, numită *teorema lui Fubini*.

**Integralele pe domenii intergrafic** se calculează prin a le descrie ca pe niște dreptunghiuri, cu o latură variabilă.

Considerăm, de exemplu, cazul  $D_1$  de mai sus. Acest domeniu poate fi descris astfel (vedeți desenul):

$$x \in [0, 1], y \in [x^2, \sqrt{x}],$$

deci putem calcula integrale duble pe acest domeniu sub forma:

$$\iint_{D_1} f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy dx.$$

**Integralele pe cercuri centrate în origine** se calculează folosind trecerea la coordonate polare:

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}, \quad (r, t) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi).$$

Aceasta este, de fapt, o schimbare de variabile, deci trebuie schimbate și diferențialele, folosind *matricea jacobiană*:

$$dx dy \mapsto |J| dr dt, \quad \text{unde } J = \begin{vmatrix} x_r & x_t \\ y_r & y_t \end{vmatrix} = r.$$

Astfel, de exemplu, dacă  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ , putem calcula:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^2 \int_0^{2\pi} f(r, t) \cdot r dt dr.$$

**Pentru cercuri necentrate în origine sau alte domenii arbitrare**, se explicitează ca domenii intergrafic. De exemplu, pentru domeniul  $D_4$  din primul exercițiu, avem:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}, y \geq 0,$$

care este un disc, centrat în  $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$  și cu rază  $\frac{1}{2}$ , din care se ia doar partea superioară, corespunzătoare lui  $y \geq 0$ . Așadar, acesta poate fi descris astfel (vedeți desenul):

$$x \in [0, 1], \quad y \in \left[0, \sqrt{\frac{1}{2} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}\right].$$

Integrala se calculează în continuare pe acest domeniu.

Pentru toate cazurile de mai sus, **aria domeniului  $D$**  se calculează prin:

$$A(D) = \iint_D dx dy.$$

### 3.3 Exerciții

1. Calculați  $\iint_D f(x, y) dx dy$  în următoarele cazuri:

- (a)  $D = [0, 1] \times [2, 3]$ , iar  $f(x, y) = xy^2$ ;
- (b)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 2x \leq y \leq x^2 + 1\}$ , iar  $f(x, y) = x$ ;
- (c)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x, y = x^2\}$ , iar  $f(x, y) = 3x - y + 2$ ;
- (d)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ , iar  $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$ ;
- (e)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ , iar  $f(x, y) = e^{-2(x^2+y^2)}$ ;
- (f)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq x, y \geq 0\}$ , iar  $f(x, y) = xy$ ;
- (g)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y + x^2 - 2 = 0, y = 1\}$ , iar  $f(x, y) = xy + e^x$ ;
- (h)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y + 3x - 1 = 0, 1 \geq y \geq 7, -2 \leq x \leq 0\}$ , iar  $f(x, y) = y^2 + x^2 - x$ ;
- (i)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x + 3 = 0, 0 \leq x \leq 3\}$ , iar  $f(x, y) = x^2 + 2$ ;
- (j)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 + 3x + 2, y \leq 0\}$ , iar  $f(x, y) = xy$ ;
- (k)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x^2 + 6x - 8, x \geq 3, y \geq 0\}$ , iar  $f(x, y) = -x^2 + 6x$ .

2. Calculați ariile domeniilor de mai sus.

3. Calculați aria domeniului:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x + y \geq 0\}.$$

4. Calculați ariile domeniilor de la începutul lecției.



## SEMINAR 4

## INTEGRALE TRIPLE

Integralele triple pe care le vom calcula se rezolvă folosind o abordare de tipul domeniilor intergrafic. Astfel, dacă  $\Omega$  este un domeniu de tip corp tridimensional, delimitat de suprafețe de ecuații date, se poate calcula *volumul* domeniului  $\Omega$  cu formula:

$$V(\Omega) = \iiint_{\Omega} dx dy dz,$$

iar de cele mai multe ori, se calculează inițial integrala după  $z$ , deoarece suprafețele sînt date în această formă.

**Exercițiu:** Calculați volumul corpului delimitat de suprafețele de ecuații date:

- (a)  $z = x^2 + y^2$  (paraboloid) și  $z = x + y$  (plan);
- (b)  $z = x^2 + y^2 - 1$  și  $z = 2 - x^2 - y^2$  (2 paraboloidi);
- (c)  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  (sferă) și  $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$  (cilindru).

Indicații: (a) Se calculează mai întîi integrala după  $z$ , deoarece o reprezentare grafică ne va ajuta să vedem că în sensul crescător al axei  $OZ$  întîlnim mai întîi paraboloidul, apoi planul, conform figurii 4.1.

Astfel, avem de calculat:

$$V(\Omega) = \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iint_D \int_{x+y}^{x^2+y^2} dz dx dy,$$

unde  $D$  este proiecția pe planul  $XOY$  a figurii, care se poate obține foarte simplu eliminînd  $z$  din cele două ecuații, adică:

$$x^2 + y^2 = x + y,$$

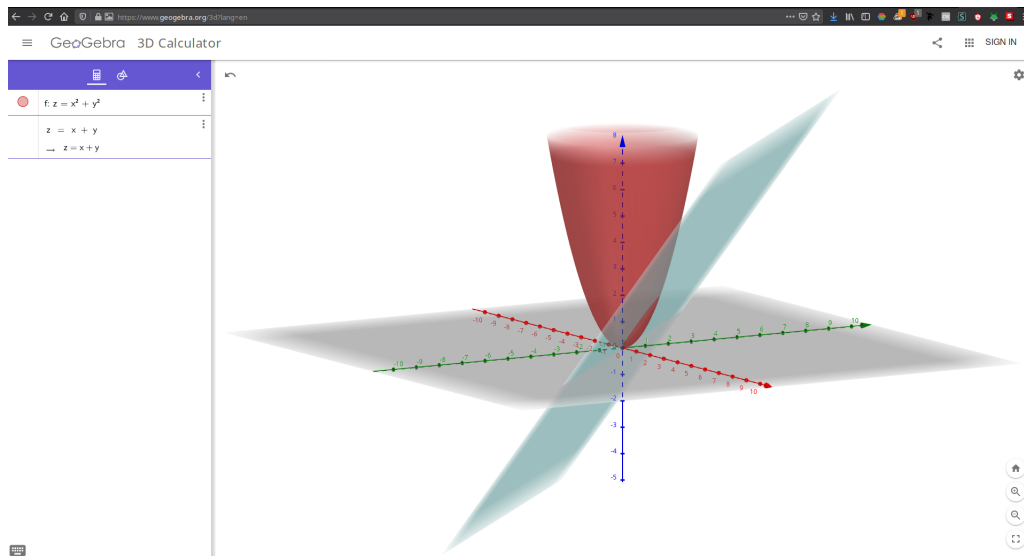


Figura 4.1: Intersecția între paraboloidul  $z = x^2 + y^2$  și planul  $z = x + y$

care este un cerc. După aceea, integrala pe  $D$  se calculează ca o integrală dublă.

**Atenție!** Volumul unui corp, ca și aria unui domeniu bidimensional, trebuie să fie pozitiv! Dacă din calcule corecte rezultă un volum negativ, înseamnă că s-au luat greșit capetele de integrare (în exemplul de mai sus s-a luat  $z$  de la paraboloid la plan).

În unele exerciții, în special când apar sfere sau cilindri, se pot folosi coordonate specifice:  
**Coordonatele sferice:**  $(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times [0, \pi) \times [0, 2\pi)$ , reprezentate în figura 4.2.

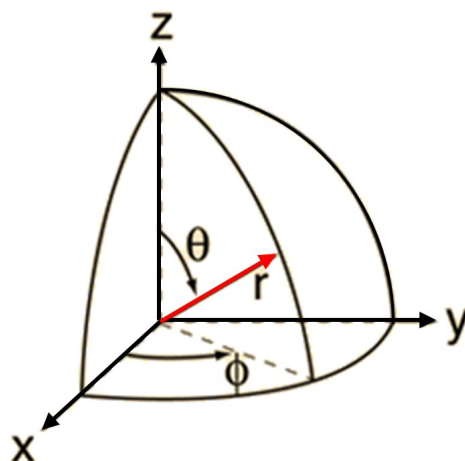


Figura 4.2: Coordonatele sferice  $r, \theta, \varphi$

Schimbare de coordonate este dată de:

$$\begin{cases} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi . \\ z &= r \cos \theta \end{cases}$$

Nu uitați, în acest caz, să calculați și jacobianul schimbării de coordonate:

$$J = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_\varphi \\ y_r & y_\theta & y_\varphi \\ z_r & z_\theta & z_\varphi \end{vmatrix}.$$

**Coordonate cilindrice:**  $(r, t, z) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ , care sînt, practic, coordonatele polare, „mutate“ în lungul axei  $OZ$ . De aceea, schimbarea de coordonate este dată de:

$$\begin{cases} x &= r \cos t \\ y &= r \sin t . \\ z &= z \end{cases}$$

Iar jacobianul transformării se calculează similar, cu derivatele lui  $x, y, z$  în raport cu  $r, t$  și respectiv  $z$ .

## 4.1 Exerciții suplimentare

Calculați volumul corpurilor delimitate de suprafețele de ecuații:

- (a)  $x^2 + y^2 + z^2 = 8$  și  $x^2 + y^2 - 2z = 0$ ;
- (b)  $z = 4 - x^2 - y^2$  și  $2z = 5 + x^2 + y^2$ ;
- (c)  $2x^2 + y^2 + z^2 = 1$  și  $2x^2 + y^2 = z^2$ , pentru  $z \geq 0$ ;
- (d)  $x^2 + y^2 = 1$  și  $z^2 = x^2 + y^2$ , pentru  $z \geq 0$ .

## 4.2 Resurse suplimentare

- Lecțiile online ale Prof. Travis Kowalski, în special lista Calculus 3, începînd cu lecția 17 pentru integrale duble: [link](#);
- GeoGebra, pentru reprezentări grafice, în special tridimensionale: [link](#);
- Exerciții rezolvate ale Prof. R. Purta de la ETTI: integrale duble și integrale triple.

## 5.1 Elemente de teorie

### Integrale curbilinii de speța întâi

Fie  $\gamma = \gamma(t)$  o curbă netedă, definită pe un interval  $t \in [a, b]$ . Se definește integrala curbilinie a unei funcții  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f = f(x, y, z)$  prin formula:

$$\int_{\gamma} f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt.$$

De asemenea, câteva cazuri particulare de interes sînt:

- lungimea curbei  $\gamma$  se obține pentru  $f = 1$ , deci:

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt;$$

- dacă funcția  $f$  reprezintă *densitatea* unui fir pe care îl aproximăm cu o curbă netedă  $\gamma$ , atunci *masa firului* se calculează cu formula:

$$M(\gamma) = \int_{\gamma} f(x, y, z) ds;$$

- în aceeași ipoteză de mai sus, *coordonatele centrului de greutate* al firului,  $x_i^G$  se calculează cu formula (am notat  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ ):

$$x_i^G = \frac{1}{M} \int_{\gamma} x_i f(x_1, x_2, x_3) ds,$$

unde  $M$  este masa calculată mai sus.

### Integrala curbilinie de speța a doua

Fie  $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$  o 1-formă diferențială. Se definește integrala curbilinie a formei  $\omega$  în lungul curbei  $\gamma$  ca mai sus prin formula:

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b (P \circ \gamma)x' + (Q \circ \gamma)y' + (R \circ \gamma)z' dt,$$

unde  $\gamma = \gamma(t)$ ,  $t \in [a, b]$  este o parametrizare a curbei  $\gamma$ .

O aplicație fizică importantă a integralelor curbilinie de speța a doua este calculul *circulației* câmpurilor vectoriale.

Fie, deci, un câmp vectorial în spațiu:

$$\vec{V} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Atunci *circulația*<sup>1</sup> câmpului vectorial în lungul unei curbe netede  $\gamma$  se calculează cu integrala curbilinie:

$$\int_{\gamma} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

și putem asocia o 1-formă diferențială câmpului, anume:

$$\omega = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

## 5.2 Formula Green-Riemann

Această formulă, care face parte din formulele integrale esențiale pe care le vom studia, ne permite să transformăm o integrală curbilinie de speța a doua într-una dublă.

Mai precis, avem formula:

$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy = \iint_K \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy,$$

unde  $K$  este suprafața bidimensională închisă de curba  $\gamma$ .

**Observație importantă:** Pentru a putea aplica formula Green-Riemann, este necesar ca drumul  $\gamma$  să fie închis, pentru a putea descrie o suprafață închisă  $K$ ! De asemenea, evident, forma diferențială trebuie să fie de clasă  $\mathcal{C}^1$ , inclusiv în  $K$ , pentru a putea calcula derivatele parțiale.

---

<sup>1</sup>Circulația unui câmp vectorial este analogul fluxului, dar în dimensiune 1. Astfel, dacă fluxul se calculează pentru câmpuri care traversează o suprafață (vom întâlni conceptul în lecția despre integrale de suprafață), circulația se calculează pentru câmpuri în lungul unor curbe.

### 5.2.1 Forme diferențiale închise

Fie  $\alpha = Pdx + Qdy$  o 1-formă diferențială de clasă  $\mathcal{C}^1$  pe o vecinătate a  $K = \text{Int}(\gamma)$ . Această formă diferențială se numește *închisă* dacă are loc:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Se poate observa, folosind formula Green-Riemann, că pentru forme diferențiale închise, integrala curbilinie în lungul oricărui drum este nulă. Această observație se mai numește *independența de drum a integralei curbilinii* sau *teorema Poincaré*.

### 5.3 Exerciții

1. Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de speța întâi:

(a)  $\int_{\gamma} x ds$ , unde  $\gamma : y = x^2, x \in [0, 2]$ ;

(b)  $\int_{\gamma} y^5 ds$ , unde  $\gamma : x = \frac{y^4}{4}, y \in [0, 2]$ ;

(c)  $\int_{\gamma} x^2 ds$ , unde  $\gamma : x^2 + y^2 = 2, x, y \geq 0$ ;

(d)  $\int_{\gamma} y^2 ds$ , unde  $\gamma : x^2 + y^2 = 4, x \leq 0, y \geq 0$ .

2. Calculați, direct și aplicînd formula Green-Riemann, integrala curbilinie  $\int_{\gamma} \alpha$  în următoarele cazuri:

(a)  $\alpha = y^2 dx + x dy$ , unde  $\gamma$  este pătratul cu vîrfurile  $A(0, 0), B(2, 0), C(2, 2), D(0, 2)$ ;

(b)  $\alpha = y dx + x^2 dy$ , unde  $\gamma$  este cercul centrat în origine și de rază 2.

3. Calculați următoarele integrale curbilinii de speța a doua:

(a)  $\int_{\gamma} x dy - y dx$ , unde  $\gamma : x^2 + y^2 = 4, y = x\sqrt{3} \geq 0$  și  $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ ;

(b)  $\int_{\gamma} (x + y) dx + (x - y) dy$ , pe domeniul:

$$\gamma : x^2 + y^2 = 4, y \geq 0;$$

(c)  $\int_{\gamma} \frac{y}{x+1} dx + dy$ , unde  $\gamma$  este triunghiul cu vîrfurile  $A(2, 0), B(0, 0), C(0, 2)$ .

4. Să se calculeze  $\int_{\gamma} ydx + xdy$  pe un drum de la  $A(2, 1)$  la  $B(1, 3)$ .

5. Să se calculeze circulația cîmpului de vectori  $\vec{V}$  de-a lungul curbei  $\gamma$ , pentru:  $\vec{V} = -(x^2 + y^2)\vec{i} - x^2\vec{j} - y^2\vec{j}$ , cu:

$$\gamma : \{x^2 + y^2 = 4, y < 0\} \cup \{x^2 + y^2 - 2x = 0, y \geq 0\}$$

6. Să se calculeze masa firului material  $\gamma$ , cu ecuațiile parametrice:

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2/2, t \in [0, 1] \\ z(t) = t^3/3 \end{cases}$$

iar densitatea  $f(x, y, z) = \sqrt{2y}$ .

7. Fie forma diferențială:

$$\alpha = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

Să se calculeze  $\int_{\gamma} \alpha$ , unde  $\gamma$  este cercul centrat în origine și cu raza 2.

8. Să se calculeze integrala curbilinie  $\int_{\gamma} xydx + \frac{x^2}{2} dy$ , pe conturul:

$$\gamma : \{x^2 + y^2 = 1, x \leq 0 \leq y\} \cup \{x + y = -1, x, y < 0\}.$$

*Indicație:* Curba  $\gamma$  nu este închisă, deci nu putem aplica formula Green-Riemann. Considerăm segmentul orientat  $[AB]$ , cu  $A(0, -1), B(0, 1)$ , cu care închidem curba. Definim  $C = \gamma \cup [AB]$  și acum putem aplica Green-Riemann pe  $C$ . Vom avea, de fapt:

$$\int_C \alpha = \int_{\gamma} \alpha + \int_{[AB]} \alpha,$$

unde  $\alpha$  este forma diferențială de integrat.

Putem calcula acum integrala pe  $C$  cu Green-Riemann, iar cea pe  $[AB]$  cu definiția, obținînd în final integrala pe  $\gamma$ .

9. Calculați, folosind integrala curbilinie:

(a) lungimea unui cerc de rază 2;

- (b) lungimea segmentului  $AB$ , cu  $A(1, 2)$  și  $B(3, 5)$ ;
- (c) lungimea arcului de parabolă  $y = 3x^2$ , cu  $x \in [-2, 2]$ ;
- (d) lungimea arcului de hiperbolă  $xy = 1$ , cu  $x \in [1, 2]$ .

## 5.4 Exerciții suplimentare (ETTI)

Calculați integralele curbilunii de mai jos:

**Speta întâi:**

- (a)  $\int_{\gamma} ye^{-x} ds$ , unde parametrizarea curbei  $\gamma$  este dată de:

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = \ln(1 + t^2) \\ y(t) = 2 \arctan t - t \end{cases}, \quad t \in [0, 1];$$

- (b)  $\int_{\gamma} (x^2 + y^2) \ln z ds$ , unde parametrizarea curbei  $\gamma$  este dată de:

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = e^t \cos t \\ y(t) = e^t \sin t \\ z(t) = e^t \end{cases}, \quad t \in [0, 1];$$

- (c)  $\int_{\gamma} xyz ds$ , unde parametrizarea curbei  $\gamma$  este:

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \frac{2}{3} \sqrt{2t^3} \\ z(t) = \frac{1}{2} t^2 \end{cases}, \quad t \in [0, 1];$$

- (d)  $\int_{\gamma} x^2 y ds$ , unde  $\gamma = [AB] \cup [BC]$ , iar capetele segmentelor sînt  $A(-1, 1)$ ,  $B(2, 1)$ ,  $C(2, 5)$ ;

- (e)  $\int_{\gamma} x^2 ds$ , unde  $\gamma$  este dată de:

$$\gamma : x^2 + y^2 = 2, \quad x, y \geq 0;$$



(f)  $\int_{\gamma} (x^2 + y^2) ds$ , unde  $\gamma$  este sectorul de cerc  $x^2 + y^2 = 1$ , parcurs de la  $A(0, -1)$  la  $B(1, 0)$ ;

(g) Calculați lungimea segmentului  $[AB]$ , unde  $A(1, 2)$ ,  $B(3, 5)$ .

**Speța a doua:**  $\int_{\gamma} \omega$  pentru:

(a)  $\omega = (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$ , unde  $\gamma$  este dată de:

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = \sqrt{t} \\ y(t) = \sqrt{t+1} \end{cases}, \quad t \in [1, 4];$$

(b)  $\omega = \frac{1}{y^2 + 1} dx + \frac{y}{x^2 + 1} dy$ , unde  $\gamma$  este dată de:

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t \end{cases}, \quad t \in [0, 1];$$

(c)  $\omega = \sqrt{x} dx + xy^2 dy$ , unde  $\gamma$  este parabola  $y = x^2$ , pentru  $x \in [0, 1]$ .

## SEMINAR 6

## RECAPITULARE PARȚIAL

### Integrale $B, \Gamma$

Folosind integralele Euler  $B, \Gamma$ , calculați:

$$(a) \int_0^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^4)^2} dx;$$

$$(b) \int_0^{\infty} \frac{x}{x^6+1} dx;$$

$$(c) \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x(1+x^2)}};$$

$$(d) \int_1^{\infty} e^{-x^2+2x-3} dx.$$

### Integrale duble

1. Calculați integralele duble:

$$(a) \iint_D \sqrt{x^2+y^2} dx dy, \text{ unde } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 16, x, y \geq 0\};$$

$$(b) \iint_D 3 - \sqrt{x^2+y^2} dx dy, \text{ unde } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 9, x, y \geq 0\}.$$

2. Calculați ariile domeniilor:

$$(a) D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y \leq 3x^3, x \in [0, 2]\};$$

$$(b) D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^3 \leq y \leq 5x^2, x \in [0, 1]\};$$

(c)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \geq y \geq x^2 + 2x - 3, -1 \leq x \leq 1\}$ .

### Integrale triple

Calculați volumul mulțimilor  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ , delimitate de cuadricele date:

(a)  $z = 2x^2 + 2y^2$  și  $\frac{9}{2} - z = x^2 + y^2$ ;

(b)  $z = 3x^2 + 3y^2$  și  $2 - z = x^2 + y^2$ ;

(c)  $2z = x^2 + y^2$  și  $1 - z = 2x^2 + 2y^2$ .

### Integrale curbilinii

1. Aflați  $m \geq 0$  astfel încât lungimea drumului parametrizat:

$$\gamma : \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = (t, m \cos t, -m \sin t)$$

să fie  $\pi\sqrt{10}$ .

2. Fie funcția  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1 + x^2$ . Calculați masa unui fir de densitate  $\rho(x) = x$ , definit de graficul funcției date.

3. Calculați circulația câmpului vectorial  $\vec{v} = (xy^2 + x^3, x + y^2)$  de-a lungul curbei:

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4, x < 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, y \in [-2, 2]\}.$$

4. Aceeași cerință ca la exercițiul 3 pentru câmpul  $\vec{v} = (x^2y + y^3, xy + x)$ , de-a lungul curbei:

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 9, y < 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0, x \in [-3, 3]\}$$

## 7.1 Integrale de suprafață de speța întii

Integralele de suprafață reprezintă generalizarea într-o dimensiune superioară pentru integralele curbilini. Astfel, multe dintre formulele și abordările de calcul pe care le vom folosi vor fi similare.

Fie  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  o pînză parametrizată și fie  $\Sigma = \Phi(D)$  imaginea ei (i.e. suprafață pe care vom integra). Fie  $f : U \subseteq \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă (deci integrabilă), definită pe (o porțiune din) imaginea pînzei.

Vom fi interesați de un caz particular (și, totodată, cel mai des întîlnit) pentru integrala de suprafață, anume cînd pînza este dată într-o *parametrizare carteziană*. Adică ecuația suprafeței poate fi scrisă în forma  $z = z(x, y)$ .

Integrala de suprafață de speța întii a funcției  $f$  pe suprafața  $\Sigma$  parametrizată cartezian prin  $z = z(x, y)$  este:

$$\int_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy,$$

unde:

- $D$  este domeniul de definiție al parametrizării carteziene, adică proiecția pe planul XOY a suprafeței ( $z : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ );
- coeficienții de sub radical sînt  $p = \frac{\partial z}{\partial x}$  și  $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ .

În cazul particular în care  $f = 1$ , se obține *aria suprafeței*  $\Sigma$ .

## 7.2 Integrale de suprafață de speța a doua

Fie, ca mai sus, o pînă tridimensională, pe care o considerăm a fi parametrizată:

$$\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Phi(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)).$$

Fie, de asemenea, o 2-formă diferențială<sup>1</sup>:

$$\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy.$$

Integrala pe suprafața orientată  $\Sigma = \Phi(D)$  a 2-formei diferențiale  $\omega$  se definește prin:

$$\int_{\Sigma} \omega = \iint_D (P \circ \Phi) \cdot \frac{D(Y, Z)}{D(u, v)} + (Q \circ \Phi) \cdot \frac{D(Z, X)}{D(u, v)} + (R \circ \Phi) \cdot \frac{D(X, Y)}{D(u, v)} dudv,$$

unde  $D$  este domeniul parametrizării ( $(u, v) \in D$ ), iar  $\frac{D(Y, Z)}{D(u, v)}$  etc. sînt jacobienii parametrizării  $(X, Y, Z)$  în funcție de  $u, v$ . Concret, de exemplu, avem:

$$\frac{D(X, Y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} X_u & X_v \\ Y_u & Y_v \end{vmatrix},$$

și celelalte, folosind notația simplificată  $X_u = \frac{\partial X}{\partial u}$  etc.<sup>2</sup>

Într-o formă simplificată, putem scrie integrala folosind un determinant formal:

$$\int_{\Sigma} \omega = \int \begin{vmatrix} P \circ \Phi & Q \circ \Phi & R \circ \Phi \\ X_u & Y_u & Z_u \\ X_v & Y_v & Z_v \end{vmatrix} dudv.$$

## 7.3 Formula Gauss-Ostrogradski

Această formulă ne permite să schimbăm o integrală de suprafață de speța a doua cu una triplă, similar formulei Green-Riemann, dar în dimensiune superioară.

---

<sup>1</sup> $\omega$  este o 2-formă diferențială deoarece ea conține produse de cîte 2 elemente diferențiale  $dx, dy, dz$ . De asemenea, notația  $\wedge$  (citită „wedge” sau „produs exterior”) este o notație specifică pentru produsul care se definește între diferențialele  $dx, dy, dz$ . Alternativ, puteți găsi scrierea și prin juxtapunere:

$$\omega = Pdydz + Qdzdx + Rdx dy.$$

Însă acest produs *nu este comutativ*, deci ordinea în care scriem 2-forma diferențială este esențială! (observați permutările circulare:  $dydz \rightarrow dzdx \rightarrow dx dy$ ).

<sup>2</sup>Ordinea scrierii jacobienilor este, evident, esențială. Pentru a-i reține mai ușor, observați că ordinea urmează tot o permutare circulară, asemănătoare diferențialelor din 2-forma diferențială  $\omega$ .

Păstrînd notațiile și contextul de mai sus, formula Gauss-Ostrogradski se scrie:

$$\int_{\Sigma} \omega = \iiint_K P_x + Q_y + R_z dx dy dz,$$

unde  $K = \text{Int}\Sigma$  este solidul care are drept frontieră suprafața  $\Sigma$ , iar  $P_x, Q_y, R_z$  notează derivatele parțiale corespunzătoare coeficienților din 2-forma diferențială  $\omega$ .

**Observație 7.1:** Formula Gauss-Ostrogradski are, ca și formula Green-Riemann, *condiții de aplicare (existență)*. Încercați să le formulați, analizînd formula.

Formula Gauss-Ostrogradski se mai numește *formula flux-divergență*. Într-adevăr, folosind o interpretare fizică, se poate asocia 2-formei diferențiale  $\omega$  cîmpul vectorial  $\vec{V} = (P, Q, R)$ , iar membrul stîng, adică integrala de suprafață, calculează *fluxul cîmpului  $\vec{V}$  prin suprafața  $\Sigma$* . În fizică, acesta se definește ca produsul scalar dintre cîmpul vectorial și versorul normal la suprafață. Membrul drept este, după cum se poate vedea ușor, divergența cîmpului vectorial în *solidul*  $\text{Int}\Sigma$ , deci avem:

$$\int_{\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_K \nabla \cdot \vec{V} dx dy dz.$$

Pentru cazul cînd suprafața este parametrizată, adică avem:

$$\Phi = \Phi(X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)),$$

se pot calcula *vectorii tangenți* la suprafață, după direcțiile lui  $u$  și  $v$ , prin derivate parțiale:

$$\vec{T}_u = \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \quad \vec{T}_v = \frac{\partial \Phi}{\partial v}.$$

Apoi, normala la suprafață se poate calcula prin produs vectorial<sup>3</sup>. O variantă simplă de a reține formula de calcul pentru produsul vectorial folosește determinantul formal:

$$\vec{N} = \vec{T}_u \times \vec{T}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \vec{T}_u^1 & \vec{T}_u^2 & \vec{T}_u^3 \\ \vec{T}_v^1 & \vec{T}_v^2 & \vec{T}_v^3 \end{vmatrix},$$

unde  $\vec{T}_{u,v}^i$  notează componenta  $i$  a vectorului  $\vec{T}_{u,v}$ .

Ulterior, *vectorul normal  $\vec{N}$  devine versorul normal  $\vec{n}$* , prin normare, adică  $\vec{n} = \frac{1}{\|\vec{N}\|} \vec{N}$ .

Dar, ținînd cont că avem relația între diferențiale  $d\sigma = \|\vec{N}\| dudv$ , rezultă că obținem:

$$\int_{\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\Sigma} \vec{V} \cdot \frac{1}{\|\vec{N}\|} \vec{N} \cdot \|\vec{N}\| dudv = \iint_D \vec{V} \cdot \vec{N} dudv.$$

<sup>3</sup>amintiți-vă, produsul vectorial al doi vectori este un vector perpendicular pe planul dat de cei doi factori

## 7.4 Parametrizări uzuale

Următoarele formule de parametrizare pot fi folosite în calcule:

(1) **Sfera:** Fie  $R > 0$  și  $(u, v) \in D = [0, \pi] \times [0, 2\pi)$ . Parametrizarea sferei  $\Phi = \Phi(u, v)$  este:

$$\Phi(u, v) = (R \sin u \cos v, R \sin u \sin v, R \cos u);$$

(2) **Elipsoidul:** Fie  $a, b, c > 0$  și  $(u, v) \in D = [0, \pi] \times [0, 2\pi)$ . Parametrizarea elipsoidului este:

$$\Phi(u, v) = (a \sin u \cos v, b \sin u \sin v, c \cos u);$$

(3) **Paraboloidul:** Fie  $a > 0, h > 0$  și  $(u, v) \in D = [0, h] \times [0, 2\pi)$ . Parametrizarea paraboloidului este:

$$\Phi(u, v) = (au \cos v, au \sin v, u^2);$$

(4) **Conul:** Fie  $h > 0$  și  $(u, v) \in D = [0, 2\pi) \times [0, h]$ . Parametrizarea conului este:

$$\Phi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, v);$$

(5) **Cilindrul:** Fie  $a > 0, 0 \leq h_1 \leq h_2$  și  $(u, v) \in [0, 2\pi) \times [h_1, h_2]$ . Parametrizarea cilindrului este:

$$\Phi(u, v) = (a \cos u, a \sin u, v).$$

## 7.5 Exerciții

1. Calculați vectorii tangenți și versorul normalei la suprafețele parametrizate din secțiunea anterioară.

2. Să se calculeze integrala de suprafață de prima speță:

$$\int_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma,$$

unde  $f(x, y, z) = y\sqrt{z}$ , iar  $\Sigma : x^2 + y^2 = 6z, z \in [0, 2]$ .

3. Folosind integrala de suprafață, calculați aria suprafeței  $\Sigma$ , unde:

$$\Sigma : 2z = 4 - x^2 - y^2, \quad z \in [0, 1].$$

4. Calculați fluxul câmpului vectorial  $\vec{V}$  prin suprafața  $\Sigma$  pentru:

$$\vec{V} = y\vec{i} + x\vec{j} + z^2\vec{k}, \quad \Sigma : z = x^2 + y^2, z \in [0, 1].$$

5. Calculați  $\int_{\Sigma} \omega$ , unde:

- (a) •  $\omega = ydy \wedge dz + zdz \wedge dx + xdx \wedge dy$ ;  
 •  $\Sigma : x^2 + y^2 = z^2, z \in [1, 2]$ .
- (b) •  $\omega = x(z+3)dy \wedge dz + yzdz \wedge dx - (z+z^2)dx \wedge dy$ ;  
 •  $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ .

6. Calculați fluxul câmpului:

$$\vec{V} = (x+y)dy \wedge dz + (y+z)dz \wedge dx - 2zdx \wedge dy$$

prin emisfera  $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = 4, z > 0$ .

## 7.6 Formula lui Stokes

Această ultimă formulă integrală ne permite să schimbăm o integrală curbilinie de speța a doua cu una de suprafață de speța a doua.

Fie  $\Sigma$  o suprafață cu bord (frontieră) și fie o 1-formă diferențială

$$\alpha = Pdx + Qdy + Rdz,$$

care este de clasă  $\mathcal{C}^1$  într-o vecinătate a lui  $\Sigma$ .

Notăm frontiera lui  $\Sigma$  prin  $\partial\Sigma$ , care este o curbă (conturul suprafeței) sau, mai precis, un *drum neted*.

Are loc *formula lui Stokes*:

$$\int_{\partial\Sigma} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\Sigma} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy.$$

În notație vectorială, dacă asociem câmpul vectorial  $\vec{V} = (P, Q, R)$  1-formei diferențiale  $\alpha$ , atunci formula lui Stokes se scrie:

$$\int_{\partial\Sigma} \vec{V} \cdot d\vec{r} = \int_{\Sigma} (\nabla \times \vec{V}) \cdot \vec{n} d\sigma,$$

unde  $\nabla \times \vec{V} = \text{rot } \vec{V}$  se numește *rotorul* câmpului vectorial, calculat cu ajutorul produsului vectorial formal între operatorul diferențial  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  și câmpul  $\vec{V} = (P, Q, R)$ .

## 7.7 Exerciții

7. Să se calculeze, folosind formula lui Stokes, integrala curbilinie  $\int_{\gamma} \alpha$  pentru cazurile:

- (a)  $\alpha = (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$ , iar curba  $\gamma$  este frontiera suprafeței  $\Sigma : z = x^2 + y^2, z = 1$ ;  
 (b)  $\alpha = ydx + zdy + xdz$ , iar curba  $\gamma$  este frontiera suprafeței  $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0$ .



## 7.8 Resurse suplimentare

**Formula Green-Riemann, formula Gauss-Ostrogradski și formula Stokes** se numesc, în general, *formule integrale*. Pentru coerență, le-am introdus în capitolele potrivite, în loc să le dedic un capitol separat.

Recomand materialele Prof. Purta, care conțin exerciții rezolvate complet:

- integrale de suprafață;
- formule integrale.

## 7.9 Exerciții suplimentare

1. Calculați  $\int_{\Sigma} x^2 d\sigma$ , unde  $\Sigma$  este suprafața sferei  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

2. Calculați aria suprafeței paraboloidului  $z = x^2 + y^2$ , aflat sub planul de ecuație  $z = 2$ .

3. Calculați aria suprafeței paraboloidului  $z = 4 - x^2 - y^2$ , care se află deasupra planului  $XOY$ .

4. Calculați aria suprafeței paraboloidului  $z = x^2 + y^2$ , aflată între planele  $XOY$  și  $z = 4$ .

5. Calculați aria emisferei superioare a sferei centrate în origine și cu raza  $R = 2$ .

6. Fie câmpul vectorial  $\vec{V} = (-x, z, y^2)$ . Aflați fluxul câmpului  $\vec{V}$  prin suprafața  $\Sigma$ , delimitată de partea paraboloidului  $z = x^2 + y^2$ , situată sub planul  $z = 3$ .

7. Calculați  $\int_{\Sigma} xydy \wedge dz + yzdz \wedge dx + (x + y)dx \wedge dy$ , unde  $\Sigma$  este suprafața definită prin:

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 4, x > 0, y > 0, 0 < z < 4\}.$$

8. Determinați fluxul câmpului vectorial  $\vec{V} = (0, y, -z)$  prin suprafața delimitată de sfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ , situată în primul octant.

9. Determinați fluxul câmpului vectorial  $\vec{V} = (x, 0, z)$  prin suprafața delimitată de paraboloidul  $y = x^2 + z^2$ , cu  $0 \leq y \leq 1$ .

10. Calculați  $\int_{\Sigma} xdy \wedge dz + xydz \wedge dx + (x - y)dx \wedge dy$ , unde  $\Sigma$  este definită prin:

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4, y \geq 0\}.$$

## SEMINAR 8

### RECAPITULARE FORMULE INTEGRALE

Folosind, eventual, **formula Green-Riemann**, calculați integralele:

(a)  $\int_{\gamma} xy dx + xy^2 dy$ , unde  $\gamma : x^2 - 4x + y^2 = 0$ ;

(b)  $\int_{\gamma} y^2 dx + (x + y) dy$ , unde  $\gamma : x^2 + y^2 + 4y = 0$ ;

(c)  $\int_{\gamma} (x + y) dx + (x^2 - y) dy$ , unde  $\gamma$  este pătratul cu vîrfurile în  $A(1, 1), B(3, 1), C(3, 3), D(1, 3)$ ;

(d)  $\int_{\gamma} (x^2 - y) dx + (2x + 3y) dy$ , unde  $\gamma$  este triunghiul cu vîrfurile în  $A(1, 1), B(1, 3), C(4, 1)$ ;

(e)  $\int_{\gamma} 2xy dx + x^2 dy$ , unde  $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4, x \leq 0\}$ ;

(f)  $\int_{\gamma} x dx + 2x^2 y dy$ , unde  $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 9, x, y \leq 0\}$ ;

(g)  $\int_{\gamma} 2xy dx + (x - y) dy$ , unde  $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4, x \geq y\}$ .

Folosind, eventual, **formula Gauss-Ostrogradski**, calculați fluxul cîmpului vectorial  $V$  prin suprafața  $\Sigma$ , unde:

(a)  $V = (2x, y, 2xy), \Sigma = x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ;

(b)  $V = (x^2, y, 3z - 1), \Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2, z \leq 2\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 2, z = 2\}$ ;

- (c)  $V = (xz, z, z^2 - 1), \Sigma = x^2 + y^2 + z^2 = 4, x \geq 0$ ;
- (d)  $V = (x^2, xz, xz), \Sigma = z = 2x^2 + 2y^2, z \leq 6$ ;
- (e)  $V = (yz, x^2, y^2), \Sigma = y = x^2 + z^2, y \leq 2$ ;
- (f)  $V = (x + z, y + x, z + y), \Sigma = 2x = y^2 + z^2, x \leq 1$ .

Folosind, eventual, **formula Stokes**, calculați circulația câmpului vectorial  $V$ , prin curba de intersecție a suprafețelor  $\Sigma_1$  și  $\Sigma_2$  date:

- (a)  $V = (x, y, z), \Sigma_1 = x^2 + y^2 + z^2 = 4, \Sigma_2 = x = 1$ ;
- (b)  $V = (x - y, z - y, x - z), \Sigma_1 = z = x^2 + y^2, z \leq 3, \Sigma_2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ;
- (c)  $V = (2xy, x, x), \Sigma_1 = y = x^2 + z^2, y \leq 1, \Sigma_2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

**Bonus:** Calculați ariile suprafețelor:

- (a)  $\Sigma = 2y = x^2 + z^2, y \leq 2$ ;
- (b)  $\Sigma = x = 3y^2 + 3z^2, x \leq 1$ ;
- (c)  $\Sigma = x^2 + y^2 + z^2 = 4, x \geq 0, y \geq 0$ .

- coordonate
  - cilindrice, 17
  - polare, 13
  - sferice, 17
- formula
  - flux-divergență, 27
  - Gauss-Ostrogradski, 27
  - Green-Riemann, 19
  - Stokes, 30
- integrale
  - Beta, 10
  - curbilinii, 18
  - de suprafață
    - speta a doua, 27
    - speta întâi, 26
  - duble, 12
  - Gamma, 10
  - improprii, 4
  - jacobian, 13
  - triple, 15
- teorema
  - Fubini, 12
  - Green-Riemann, 19
  - Poincaré, 20