Analiză 2

Notițe de seminar

ADRIAN MANEA

Curs: A. Niță

15 mai 2021

Cuprins

SEMINAR 1

ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDIN SUPERIOR

1.1 Ecuații liniare de ordinul n cu coeficienți constanți

Forma generală este:

$$L[y] = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x),$$

cu $a_i \in \mathbb{R}$ constante.

Dacă avem $f(x) = 0$, atunci ecuația se numește *omogenă*.

Avem o metodă algebrică de a rezolva această ecuație, folosind:

Definiție 1.1: Se numește *polinomul caracteristic* atașat ecuației omogene $L[y] = 0$ polinomul:

$$F(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n,$$

iar $F(r) = 0$ se numește *ecuația caracteristică* atașată ecuației diferențiale.

Folosind această noțiune, putem rezolva direct ecuația, ținînd seama de următoarele cazuri posibile:

Teoremă 1.1: *(1) Dacă ecuația caracteristică $F(r) = 0$ are rădăcini reale și distincte r_i, atunci un sistem fundamental de soluții este dat de:*

$$\left\{ y_i(x) = e^{r_i x} \right\}_{i=1,\dots,n}.$$

(2) Dacă printre rădăcinile lui $F(r)$ există și rădăcini multiple, de exemplu r_1, cu ordinul de multiplicitate p, atunci pentru această rădăcină avem p soluții liniar independente (pe lîngă celelalte):

$$y_1(x) = e^{r_1 x}, y_2(x) = x e^{r_1 x}, \dots, y_p(x) = x^{p-1} e^{r_1 x}.$$

(3) Dacă printre rădăcinile ecuației caracteristice avem și rădăcini complexe, de exemplu $r = a + ib$ și $\overline{r} = a - ib$, atunci fiecărei perechi de rădăcini complexe conjugate îi corespund două soluții liniar independente (pe lîngă celelalte):

$$y_1(x) = e^{ax}\cos bx, \quad y_2(x) = e^{ax}\sin bx.$$

(4) Dacă ecuația caracteristică are rădăcini complexe ca mai sus, cu ordinul de multiplicitate p, atunci lor le corespund $2p$ soluții liniar independente:

$$\left\{ y_j(x) = x^{j-1}e^{ax}\cos bx \right\}_{j=1,\dots p}, \quad \left\{ y_k(x) = x^{k-p-1}e^{ax}\sin bx \right\}_{k=p+1,\dots,2p}.$$

De exemplu: $y'' - y = 0$, cu condițiile $y(0) = 2$ și $y'(0) = 0$.

Soluție: Ecuația caracteristică este $r^2 - 1 = 0$, deci $r_{1,2} = \pm 1$. Sîntem în primul caz al teoremei, deci un sistem fundamental de soluții este:

$$y_1(x) = e^{-x}, \quad y_2(x) = e^x.$$

Soluția generală este $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^x$.

Folosind condițiile Cauchy, obținem $c_1 = c_2 = 1$, deci soluția particulară este:

$$y(x) = e^{-x} + e^x.$$

Observație 1.1: Dacă ecuația inițială $L[y] = f(x)$ *nu* este omogenă, putem rezolva folosind *metoda variației constantelor (Lagrange).*

În acest caz, metoda variației constantelor presupune următoarele etape. Fie ecuația neomogenă scrisă în forma:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = f(x).$$

Pentru simplitate, vom presupune $n = 2$ și fie o soluție particulară de forma:

$$y_p(x) = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2.$$

Atunci, prin metoda variației constantelor, vom determina funcțiile $c_1(x), c_2(x)$ ca soluții ale sistemului algebric:

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 &= 0 \\ c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' &= \dfrac{f(x)}{a_n(x)} \end{cases}$$

De exemplu: $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x+1}$.

Soluție: Asociem ecuația omogenă, care are ecuația caracteristică $r^2 + 3r + 2 = 0$, cu rădăcinile $r_1 = -1, r_2 = -2$. Așadar, soluția generală a ecuației omogene este:

$$\overline{y}(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}.$$

Determinăm o soluție particulară $y_p(x)$ cu ajutorul metodei variației constantelor. Mai precis, căutăm:

$$y_p(x) = c_1(x)e^{-x} + c_2(x)e^{-2x}.$$

Înlocuind în ecuația neomogenă, rezultă sistemul:

$$\begin{cases} c_1'(x)e^{-x} + c_2'(x)e^{-2x} & = 0 \\ -c_1'(x)e^{-x} - 2c_2'(x)e^{-2x} & = \frac{1}{1+e^x} \end{cases}$$

Rezolvînd ca pe un sistem algebric, obținem:

$$c_1'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}, \quad c_2'(x) = -\frac{e^{2x}}{1+e^x},$$

de unde obținem:

$$c_1(x) = \ln(1+e^x), \quad c_2(x) = -e^x + \ln(1+e^x).$$

În fine, înlocuim în soluția particulară y_p și apoi în cea generală, $y(x) = \overline{y}(x) + y_p(x)$.

Un alt exemplu: $y'' - y = 4e^x$.

Soluție: Ecuația caracteristică $r^2 - 1$ are rădăcinile $r_{1,2} = \pm 1$, deci soluția generală a ecuației liniare omogene este $y_0(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$.

Căutăm acum o soluție particulară a ecuației neomogene, folosind metoda variației constantelor. Așadar, căutăm $y_p(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{-x}$. Din condiția ca y_p să verifice ecuația liniară neomogenă, obținem sistemul:

$$\begin{cases} c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^{-x} = 0 \\ c_1'(x)e^x - c_2'(x)e^{-x} = 4e^x \end{cases}$$

Rezultă $c_1'(x)e^x = 2e^x$, deci $c_1'(x) = 2 \Longrightarrow c_1(x) = 2x$, iar $c_2'(x)e^{-x} = -2e^x$, deci $c_2(x) = -e^{2x}$.

În fine, soluția particulară este $y_p(x) = 2xe^x - e^x$, iar soluția generală:

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + e^x(2x - 1).$$

1.2 Metoda eliminării pentru sisteme diferențiale liniare

Putem reduce sistemele diferențiale de ordinul I la ecuații de ordin superior.

De exemplu, să pornim cu sistemul:

$$\begin{cases} x' + 5x + y & = 7e^t - 27 \\ y' - 2x + 3y & = -3e^t + 12 \end{cases}$$

Soluție: Din prima ecuație, scoatem y și derivăm:

$$y = 7e^t - 27 - 5x - x' \Longrightarrow y' = 7e^t - 5 - x''.$$

Înlocuim în a doua ecuație și obținem o ecuație liniară de ordin superior:

$$x'' + 8x' + 17x = 31e^t - 93.$$

Ecuația caracteristică este $r^2 + 8r + 17 = 0$, cu rădăcinile $r_{1,2} = -4 \pm i$. Atunci soluția generală a ecuației omogene este:

$$\overline{x}(t) = e^{-4t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t).$$

Mai departe, căutăm o soluție particulară a ecuației neomogene folosind metoda variației constantelor, a lui Lagrange:

$$x_p(t) = e^{-4t}(c_1(t) \cos t + c_2(t) \sin t).$$

Determinăm funcțiile $c_1(t)$, $c_2(t)$ din sistemul:

$$\begin{cases} c_1'(t) \cos te^{-4t} + c_2'(t) \sin te^{-4t} & = 0 \\ c_1'(t)(-\sin te^{-4t} - 4\cos te^{-4t}) + c_2'(t)(\cos te^{-4t} - 4\sin te^{-4t}) & = 31e^t - 93. \end{cases}$$

Rezultă:

$$\begin{aligned} c_1'(t) &= -31 \sin te^{5t} + 93 \sin te^{4t} \\ \Longrightarrow c_1(t) &= -\frac{31}{26}e^{5t}(5\sin t - \cos t) + \frac{93}{17}e^{4t}(4\sin t - \cos t) \\ c_2'(t) &= 31 \cos te^{5t} - 93 \cos te^{4t} \\ \Longrightarrow c_2(t) &= \frac{31}{26}e^{5t}(5\sin t + \cos t) - \frac{93}{17}e^{4t}(4\sin t + \cos t). \end{aligned}$$

În fine, obținem:

$$x(t) = e^{-4t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) + \frac{31}{26}e^t - \frac{93}{17},$$

iar mai departe:

$$y(t) = e^{-4t}[(c_1 - c_2)\sin t - (c_1(t) - c_2)\cos t) - \frac{2}{13}e^t + \frac{6}{17}.$$

1.3 Exerciții

1. Rezolvați următoarele ecuații diferențiale liniare de ordin superior:

(a) $y^{(3)} + 4y^{(2)} + 3y^{(1)} = 0;$

(b) $y^{(2)} + 4y^{(1)} + 4y = 0;$

(c) $y^{(3)} + y = 0;$

(d) $y^{(4)} + 4y^{(2)} = 0;$

(e) $y^{(2)} - 2y^{(1)} + y = \frac{1}{x}e^{x};$

(f) $y^{(2)} + y = \frac{1}{\cos x};$

(g) $y^{(3)} + y^{(1)} = \tan x;$

(h) $y^{(3)} + 2y^{(2)} = x + 2;$

(i) $y''' - y' - 2y = 3e^{2x};$

(j) $y''' + 2y'' - y' - 2y = e^{x} + 2 + \sin x;$

(k) $y'' - 5y' + 6y = 5x^2 - 10x + 2;$

(l) $y'' + y = x\cos x;$

(m) $y''' - 3y'' + 12y' - 10y = 0;$

(n) $y'' + yu' = 4x^2e^{x};$

(o) $y'' - 6y' + 9y = 25e^{x}\sin x;$

(p) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\cos 2x.$

2. Rezolvați următoarele sisteme diferențiale, folosind metoda eliminării:

(a) $\begin{cases} y' &= 2y + z \\ z' &= y + 2z \end{cases}, \quad y = y(x), z = z(x);$

(b) $\begin{cases} y' &= -3y - 4z \\ z' &= y + 2z \end{cases}, \quad y = y(x), z = z(x);$

(c) $\begin{cases} x' &= x + 3y \\ y' &= -x + 5y - 2e^t \end{cases}$, $x = x(t), y = y(t)$, cu condițiile inițiale $x(0) = 3, y(0) = 1$;

(d) $\begin{cases} y' &= -7y + z \\ z' &= -2y - 5z \end{cases}$, $y = y(x), z = z(x)$, cu condiția inițială $y(0) = 1, z(0) = -1$.

(e) $\begin{cases} x' &= -9y \\ y' &= x \end{cases}$, unde $x = x(t), y = y(t)$;

(f) $\begin{cases} x' &= y + t \\ y' &= x - t \end{cases}$, unde $x = x(t), y = y(t)$;

(g) $\begin{cases} x' &= 11x + 16y + 11t \\ y' &= -2x - y - t + 1 \end{cases}$, unde $x = x(t), y = y(t)$;

(h) $\begin{cases} x' + 2x + 4y &= 1 + 4t \\ y' + x - y &= \dfrac{3t^2}{2} \end{cases}$, unde $x = x(t), y = y(t)$.

SEMINAR 2

ALTE ECUAȚII DE ORDIN SUPERIOR

2.1 Ecuații rezolvabile prin cuadraturi

Acestea sînt ecuații care se pot rezolva prin integrări succesive. Astfel, forma lor generală este $y^{(n)} = f(x)$, în varianta neomogenă. Soluția generală va depinde de n constante arbitrare, rezultate în urma integrărilor succesive.

Exemplu:

$$y'' = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\pi}{6}.$$

Soluție: Integrăm succesiv și obținem:

$$\begin{aligned}
y' &= x \arcsin x - \frac{\pi}{6} x + c_1 \\
y &= \frac{x^2}{2} \arcsin x + \frac{1}{4} x \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4} \arcsin x - \frac{\pi}{12} x^2 + c_1 x + c_2.
\end{aligned}$$

Dacă nu se dau condiții inițiale, soluția rămîne exprimată ca mai sus, adică în funcție de constantele c_1 și c_2.

Cazul omogen se rezolvă și mai simplu: dacă $y^{(n)} = 0$, atunci y este un polinom de x de gradul $n-1$.

2.2 Ecuații de forma $f(x, y^{(n)}) = 0$

Avem două cazuri care trebuie tratate distinct:

(a) Dacă ecuația poate fi rezolvată în raport cu $y^{(n)}$, adică dacă $\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \neq 0$, atunci obținem una sau mai multe ecuații ca în secțiunea anterioară;

(b) Dacă ecuația nu este rezolvabilă cu ajutorul funcțiilor elementare în raport cu $y^{(n)}$, dar cunoaștem o reprezentare parametrică a curbei $f(u, v) = 0$, adică $u = g(t)$, $v = h(t)$, cu $t \in [\alpha, \beta]$, atunci soluția generală se poate da sub formă parametrică:

$$\begin{cases} x & = g(t) \\ dy^{(n-1)} & = y^{(n)} dx = h(t) g'(t) dt \end{cases},$$

de unde putem obține succesiv:

$$\begin{cases} y^{(n-1)} & = h_1(t, c_1) \\ \dots & \\ y(t) & = h_n(t, c_1, \dots, c_n). \end{cases}$$

Exemplu:

$$x - e^{y''} + y'' = 0.$$

Soluție: Putem nota $y'' = t$ și atunci $x(t) = e^t - t$. Deoarece avem $dy' = y'' dx$, rezultă:

$$dy' = t(e^t - 1)dt \Longrightarrow y' = -\frac{t^2}{2} + te^t - e^t + c_1.$$

Mai departe, $dy = y' dx$, deci:

$$dy = \left(-\frac{t^2}{2} + te^t - e^t + c_1 \right)(e^t - 1)dt.$$

În fine, soluția este:

$$y(t) = e^{2t}\left(\frac{t}{2} - \frac{3}{4}\right) + e^t\left(-\frac{t^2}{2} + 1 + c_1 \right) + \frac{t^3}{6} - c_1 t + c_2.$$

2.3 Ecuații de forma $f(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$

Din nou, distingem două cazuri:

(a) Dacă ecuația este rezolvabilă prin funcții elementare în raport cu $y^{(n)}$, atunci putem nota $z = y^{(n-1)}$ și avem $z' = f(z)$. Ecuația devine cu variabile separabile pentru z și se rezolvă corespunzător, conducînd la $z = y^{(n-1)} = f_1(x, c_1)$, care este de tipul anterior;

(b) Dacă ecuația nu este rezolvabilă prin funcții elementare în raport cu $y^{(n)}$, dar cunoaștem o reprezentare parametrică de forma:

$$y^{(n-1)} = h(t), \quad y^{(n)} = g(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

atunci putem folosi $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx$, pentru a obține soluția pas cu pas, sub formă parametrică:

$$\begin{aligned} x &= \int \frac{h'}{g} dt + c_1 \\ y^{(n-1)} &= h(t) \\ dy^{(n-2)} &= h(t) = \frac{hh'}{g} dt \\ y^{(n-2)} &= \int \frac{hh'}{g} dt + c_2 \\ &\vdots \\ y &= \int y' dx + c_n. \end{aligned}$$

Exemplu: $y'' = -\sqrt{1 - y'^2}$. *Soluție:* Facem schimbarea de funcție $z(x) = y'$ și ecuația devine:

$$-\frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = dx, \quad |z| < 1.$$

Soluția generală este: $\arccos z = x + c_1$, deci $z = \cos(x + c_1)$.

Mai departe, obținem $y(x) = \sin(x + c_1) + c_2$.

De asemenea, trebuie să mai remarcăm și soluțiile particulare $y = \pm x + c$.

2.4 Ecuații de forma $f(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$

Ecuația se rezolvă cu schimbarea de funcție $y^{(k)} = z(x)$ și rezultă o ecuație de ordin $n - k$:

$$f(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0,$$

pe care o integrăm.

Exemplu: $(1 + x^2)y'' = 2xy'$.

Soluție: Cu schimbarea de funcție $y' = z(x)$, obținem ecuația:

$$\frac{z}{z'} = \frac{2x}{1 + x^2},$$

iar apoi, prin integrare, rezultă $z = y' = c_1(1 + x^2)$. În fine:

$$y(x) = c_1 x + c_1 \frac{x^3}{3} + c_2.$$

Exemplu 2: $y \cdot y'' - yy'^2 = 0$.

Soluție: Notăm $y' = z$ și obținem:

$$y \cdot z' - yz^2 = 0 \Longrightarrow y(z' - z^2) = 0,$$

de unde rezultă $y = 0$ sau $z' - z^2 = 0$.

Din a doua variantă, deducem succesiv:

$$\frac{dz}{dx} = z^2 \Longrightarrow \frac{dz}{z^2} = dx \Longrightarrow -\frac{1}{z} = x + c_1.$$

Mai departe:

$$-\frac{1}{y'} = x + c_1 \Longrightarrow y' = \frac{-1}{x + c_1} \Longrightarrow y = -\ln(x + c_1) + c_2.$$

2.5 Ecuații de forma $f(y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$

Să remarcăm că astfel de ecuații nu conțin pe y. Deci putem lua pe y' ca variabilă independentă și pe y'' ca fiind funcție de y'. Astfel, reducem discuția la un caz anterior.

Exemplu: $x^2 y'' = y'^2 - 2xy' + 2x^2$.

Soluție: Facem schimbarea de funcție $y' = z(x)$ și obținem o ecuație Riccati:

$$z' = \frac{z^2}{x^2} - 2 \cdot \frac{z}{x} + 2.$$

Observăm soluția particulară $z_p = x$ și integrăm, cu $z = x + \dfrac{1}{u(x)}$.

Obținem succesiv:

$$\begin{aligned} z(x) &= x + \frac{c_1 x}{x + c_1} \Longrightarrow \\ y'(x) &= x + \frac{c_1 x}{x + c_1} \Longrightarrow \\ y(x) &= \frac{x^2}{2} + c_1 x - c_1^2 \ln|x + c_1| + c_2, \end{aligned}$$

2.6 Ecuații autonome (ce nu conțin pe x)

În cazul acestor ecuații, putem micșora ordinul cu o unitate, notînd $y' = p$ și luăm pe y variabilă independentă.

Observaţie 2.1: Există posibilitatea de a pierde soluții de forma $y = c$ prin această metodă, deci trebuie verificat dacă este cazul separat.

Exemplu: $1 + y'^2 = 2yy'$. *Soluție:* Putem lua $y' = p$ drept funcție, iar pe y drept variabilă independentă. Rezultă:

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = p\frac{dp}{dy}.$$

Atunci ecuația devine:

$$\frac{2pdp}{1 + p^2} = \frac{dy}{y} \Longrightarrow y = c_1(1 + p^2).$$

Acum trebuie să obținem pe x ca funcție de p și c_1. Deoarece $dx = \frac{1}{p}dy$, iar $dy = 2c_1pdp$, rezultă $dx = 2c_1dp$. Deci $x = 2c_1p + c_2$, iar soluția generală devine $x(p) = 2c_1p + c_2$. Din expresia lui y de mai sus, rezultă:

$$y = c_1 + \frac{(x - c_2)^2}{4c_1}.$$

Exemplu 2: $y'' = y'^2 = 2e^{-y}$.

Soluție: Notăm $y' = p$ și luăm ca necunoscută $p = p(y)$. Rezultă:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = p'p \Longrightarrow p'p + p^2 = 2e^{-y}.$$

Dacă notăm $p^2 = z$, obținem o ecuație liniară neomogenă:

$$z' + 2z = 4e^{-y},$$

ce are ca soluție generală $z(y) = c_1e^{-2y} + 4e^{-y}$.

Revenim la y și avem:

$$z = p^2 = y'^2 \Longrightarrow y' = \pm\sqrt{c_1e^{-2y} + 4e^{-y}},$$

adică:

$$\frac{dy}{\pm\sqrt{c_1e^{-2y} + 4e^{-y}}} = dx \Longrightarrow x + c_2 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{c_1 + 4e^y}.$$

Echivalent, putem scrie soluția și în forma implicită:

$$e^y + \frac{c_1}{4} = (x + c_2)^2.$$

2.7 Ecuații Euler

O ecuație Euler are forma generală:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k y^{(k)} = f(x),$$

pentru varianta omogenă și $f(x) = 0$ pentru varianta neomogenă, cu a_i constante reale.

Ecuațiile Euler se pot transforma în ecuații cu coeficienți constanți prin notația (schimbarea de variabilă) $|x| = e^t$.

De remarcat faptul că, deoarece funcția necunoscută este $y = y(x)$, pentru a obține $y' = \dfrac{dy}{dx}$ trebuie să aplicăm regula de derivare a funcțiilor compuse. Folosind notația de la fizică $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$, putem scrie:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \dot{y} \cdot e^{-t}.$$

Mai departe, de exemplu, pentru derivatele superioare:

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dt}\left(\dot{y} \cdot e^{-t}\right) \cdot \frac{dt}{dx} \\ &= e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y}). \end{aligned}$$

Exemplu: $x^2 y'' + xy' + y = x$.

Soluție: Facem substituția $|x| = e^t$ și, folosind calculele de mai sus, obținem:

$$e^{2t} \cdot e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y}) + e^t \cdot e^{-t} \cdot \dot{y} + y = e^t.$$

Echivalent: $\ddot{y} + y = e^t$.

Scriem ecuația caracteristică, $r^2 + 1 = 0$, cu rădăcinile $\pm i$, deci sistemul fundamental de soluții este $\{\cos t, \sin t\}$ etc.

2.8 Exerciții

1. Rezolvați următoarele ecuații Euler:

(a) $x^2 y^{(2)} - 3xy' + 4y = 5x, \quad x > 0;$

(b) $x^2 y^{(2)} - xy' + y = x + \ln x, \quad x > 0;$

(c) $4(x+1)^2 y^{(2)} + y = 0, x > -1;$

(d) $xy'' + 3y' = 1$;

(e) $x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = \dfrac{1}{x^2}$.

2. Rezolvați următoarele ecuații:

(a) $y^{(3)} = \sin x + \cos x$;

(b) $y^{(3)} + y^{(2)} = \sin x$;

(c) $xy^{(2)} + (x-2)y^{(1)} - 2y = 0$;

(d) $x^2y^{(2)} = y'^2$;

(e) $y^{(4)} - 3y^{(3)} + 3y^{(2)} - y^{(1)} = 0$;

(f) $y^{(2)} - y^{(1)} - 2y = 3e^{2x}$;

(g) $\begin{cases} x' &= x + ye^{2t} \\ y' &= y - xe^{2t} + 1 \end{cases}$, cu condițiile inițiale $x(0) = 1$ și $y(0) = 0$.

Amintim, pentru ecuații liniare și neomogene de ordinul întîi, cu forma generală:

$$y' = P(x)y + Q(x),$$

avem soluțiile:

$$\begin{aligned} y_p &= c \cdot \exp\Big(- \int_{x_0}^{x} P(t)dt \Big) \\ y_g &= \Big(c + \int Q(t) \cdot \exp\Big(\int_{x_0}^{t} P(s)ds \Big) dt \Big) \cdot \exp\Big(- \int_{x_0}^{x} P(t)dt \Big). \end{aligned}$$

Indicații:

(a) Integrări succesive;

(b) Notăm $y^{(2)} = z$, deci ecuația devine $z' + z = \sin x$, care este o ecuație liniară și neomogenă, de ordinul întîi. Soluția generală este:

$$z(x) = e^{-x}\Big(c + \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) \Big),$$

iar apoi $y'(x) = \int z(x)dx$ și $y(x) = \int y'(x)dx$ etc.

(c) Notăm $z = y' + y$, deci ecuația devine $xz' - 2z = 0$, care are soluția evidentă $z = c_1x^2$, din care obtinem $y' + y = c_1x^2$, care este o ecuație liniară și neomogenă, cu soluția generală:

$$y = c_2e^{-x} + c_1x^2 - 2c_1x + 2c_1.$$

(d) Notăm $y' = z$ și obținem $x^2z' = z^2$. Observăm soluția particulară $z = 0$, deci $y = c$, iar în celelalte cazuri, avem:

$$x^2\frac{dz}{dx} = z^2 \Longrightarrow \frac{dx}{x^2} = \frac{dz}{z^2}.$$

Aceasta conduce la $\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + c$ și ne întoarcem la y:

$$dx = dy\left(\frac{1}{x} + c\right) \Longrightarrow \frac{xdx}{cx + 1} = dy,$$

care, prin integrare, conduce la:

$$y = \frac{x}{c} - \frac{1}{c^2}\ln(cx + 1) + c_1,$$

pentru $c \neq 0$ și $y' = x$ dacă $c = 0$, adică $y = \frac{x^2}{2} + c_1$.

(e) Ecuația caracteristică este:

$$r^4 - 3r^3 + 3r^2 - r = 0 \Longrightarrow r(r^3 - 3r^2 + 3r - 1) = 0,$$

de unde observăm soluțiile $r = 0, r = 1$ etc.

(f) Ecuația caracteristică este $r^2 - r - 2 = (r + 1)(r - 2) = 0$.

(g) Aplicăm metoda substituției (eliminării).

SEMINAR 3

STABILITATE ȘI LINII DE CÎMP

Problema stabilității soluțiilor este una foarte importantă și dificilă, în general. Ideea de bază este că, dacă ne gîndim la interpretarea fizică a sistemelor de ecuații și soluțiilor lor, de exemplu în cazul mecanicii, soluția returnată este posibil să fie validă într-o vecinătate foarte mică a punctului în care a fost calculată. În cazul acesta, situația corespunde unei poziții de *echilibru (mecanic) instabil*, adică atunci cînd deplasarea corpului la o mică distanță de poziția curentă îl face să iasă din poziția de echilibru. Similar, putem avea și *echilibru (mecanic) stabil* sau *echilibru (mecanic) indiferent*.

Teoria stabilității soluțiilor sistemelor diferențiale este un subiect amplu, fondat și discutat în detaliu de *H. Poincaré* și *A. Liapunov*, de aceea, majoritatea teoremelor și rezultatelor importante le sînt atribuite.

Contextul în care lucrăm este următorul. fie un sistem diferențial de forma $x' = v(t, x)$, unde x poate fi vector (adică să țină loc de mai multe variabile). Presupunem că sînt îndeplinite condițiile teoremei fundamentale de existență și unicitate a soluției problemei Cauchy, pentru $t \in [t_0, \infty)$ și că avem $x \in U \subseteq \mathbb{R}^n$, un deschis. Așadar, pentru orice $x_0 \in U$, există și este unică o soluție $x = \varphi(t)$, cu $\varphi : [t_0, \infty) \longrightarrow U$¡ astfel încît $\varphi(t_0) = x_0$.

Tipurile de stabilitate sînt definite mai jos.

Definiție 3.1: O soluție $x = \varphi(t)$ ca mai sus se numește *stabilă spre* ∞ în sens Poincaré-Liapunov (sau, echivalent, $x_0 = \varphi(t_0)$ se numește *poziție de echilibru*) dacă la variații mici ale lui x_0 obținem variații mici ale soluției.

Formal, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît pentru orice $\tilde{x_0} \in \mathbb{R}^n$, cu $||\tilde{x_0} - x_0|| < \delta(\varepsilon)$, soluțiile corespunzătoare, $\tilde{\varphi}(t)$ și $\varphi(t)$ satisfac inegalitatea:

$$|\tilde{\varphi}(t) - \varphi(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

Definiție 3.2: Poziția de echilibru $x = 0$ se numește *stabilă în sens Poincaré-Liapunov* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$, care depinde doar de ε, astfel încît pentru orice $x_0 \in U$ pentru care

$||x_0|| < \delta$, soluția φ a sistemului cu condiția inițială $\varphi(0) = x_0$ se prelungește pe întreaga semiaxă $t > 0$ și satisface inegalitatea $||\varphi(t)|| < \varepsilon, \forall t > 0$.

Definiţie 3.3: Poziția de echilibru $x = 0$ a sistemului diferențial autonom se numește *asimptotic stabilă* dacă este stabilă și, în plus, pentru soluția $\varphi(t)$ din definiția de mai sus, are loc:

$$\lim_{t \to \infty} \varphi(t) = 0.$$

În exercițiile pe care le vom întîlni, vom folosi următorul rezultat fundamental.

Presupunem că avem un sistem diferențial scris în forma matriceală:

$$X' = AX, \quad A \in M_n(\mathbb{R}),$$

unde A este matricea sistemului. Mai presupunem, de asemenea, că matricea A este inversabilă, astfel încît sistemul admite soluția $X = 0$.

Atunci avem:

Teoremă 3.1 (Poincaré-Liapunov)**:** *Păstrînd contextul și notațiile de mai sus, dacă toate valorile proprii ale matricei A au partea reală negativă, atunci poziția de echilibru $x = 0$ este* asimptotic stabilă.

Dacă există $\lambda \in \sigma(A)$, cu $\mathrm{Re}\lambda > 0$, *atunci $x = 0$ este instabilă.*

3.1 Exerciții

1. Studiați stabilitatea poziției de echilibru $x = 0$ pentru sistemele diferențiale:

(a) $\begin{cases} x' &= -4x + y \\ y' &= -x - 2y \end{cases};$

(b) $\begin{cases} x' &= -x + z \\ y' &= -2y - z \\ z' &= y - z \end{cases};$

(c) $\begin{cases} x' &= 2y \\ y' &= x + ay \end{cases}, a \in \mathbb{R}.$

2. Să se afle pentru ce valori ale lui $a \in \mathbb{R}$ soluția nulă a sistemului de mai jos este asimptotic stabilă:

$$\begin{cases} x' &= ax + y \\ y' &= (2 + a)x + ay \\ z' &= x + y - z \end{cases}$$

3.2 Integrale prime și linii de cîmp

Definiţie 3.4: Un sistem diferențial de forma:

$$x_j' = v_j(x_1, \dots, x_n), \quad j = 1, \dots, n,$$

unde $v = (v_1, \dots, v_n) : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ este un cîmp de vectori definit într-un domeniu $U \subseteq \mathbb{R}^n$ se numește *sistem diferențial autonom.*

O altă formă de scriere a sistemului de mai sus este *forma simetrică*:

$$\frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} = \cdots = \frac{dx_n}{v_n}.$$

Dacă $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcție oarecare, de clasă $\mathcal{C}^1(U)$, atunci pentru orice $x \in U$ se poate scrie *derivata lui f în x în direcția vectorului v*, notată $\dfrac{df}{dv}(x)$, și definită prin formula cunoscută:

$$\frac{df}{dv}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} v_i(x).$$

Definiţie 3.5: Fie $v : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un cîmp de vectori și $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ o funcție de clasă $\mathcal{C}^1(U)$. Funcția se numește (o) *integrală primă* a sistemului diferențial autonom $x' = v(x), x \in U$ dacă derivata sa în direcția cîmpului de vectori v este nulă în fiecare punct din U, adică $\dfrac{df}{dv} = 0$.

Echivalent, putem înțelege definiția astfel: $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ este o integrală primă pentru sistemul diferențial autonom $x' = v(x)$ dacă și numai dacă pentru orice soluție $x = \varphi(t), \varphi : I \longrightarrow U$, funcția $f \circ \varphi$ este constantă pe I. De aceea, uneori mai putem scrie pe scurt $f(x_1, \dots, x_n) = c$, constant. Rezultă că putem înțelege integralele prime ca pe *legi de conservare.*

În exerciții, pentru a găsi integralele prime asociate unui sistem autonom, se rescrie sistemul în forma simetrică, iar apoi, folosind proprietățile rapoartelor egale, încercăm să ajungem la un raport de forma $\dfrac{df}{0}$, egal cu rapoartele precedente. Atunci f va fi integrală primă, deoarece va rezulta $df = 0$, adică f constantă în lungul curbelor integrale.

Exemplu: Să se găsească integralele prime ale sistemului simetric:

$$\frac{dx}{z - y} = \frac{dy}{x - z} = \frac{dz}{y - x}.$$

Soluție: Folosind proprietățile proporțiilor, rescriem sistemul:

$$\frac{dx}{z - y} = \frac{dy}{x - z} = \frac{dz}{y - x} = \frac{dx + dy + dz}{z - x + x - z + y - x} = \frac{dx + dy + dz}{0}.$$

O altă formă de a obține o integrală primă este:

$$\frac{xdx + ydy + zdz}{x(z-x) + y(x-z) + z(y-x)} = \frac{xdx + ydy + zdz}{0}.$$

Rezultă:

$$\begin{cases} dx + dy + dz & = 0 \\ xdx + ydy + zdz & = 0, \end{cases}$$

de unde obținem două integrale prime:

$$x + y + z = c_1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = c_2.$$

Mai trebuie să ne asigurăm de *independența funcțională* a celor două integrale prime. Astfel, dacă le notăm cu:

$$I_1(x, y, z) = x + y + z, \quad I_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

trebuie să ne asigurăm că:

$$\text{rang}\begin{pmatrix} I_{1x} & I_{2x} \\ I_{1y} & I_{2y} \\ I_{1z} & I_{2z} \end{pmatrix} = \max = 2, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

(Am folosit notația cunoscută, $I_{1x} = \dfrac{\partial I_1}{\partial x}$ etc.).

Într-adevăr, se vede imediat rezultatul, deoarece matricea de mai sus este $\begin{pmatrix} 1 & 2x \\ 1 & 2y \\ 1 & 2z \end{pmatrix}$ și putem lua orice minor, de pildă $\begin{vmatrix} 1 & 2x \\ 1 & 2y \end{vmatrix} = 2y - 2x$, care în general este nenul, cu excepția cazului $y = x$.

Așadar, spunem că cele două integrale prime sînt funcțional independente și am terminat.

Observaţie 3.1: Rezolvarea este identică în cazul în care cerința pornește cu un cîmp vectorial în spațiu, de forma:

$$\vec{V} = (z - y)\vec{i} + (x - z)\vec{j} + (y - x)\vec{k}.$$

Astfel, se asociază sistemul simetric de mai sus, etc.

Pentru acest caz, integralele prime se mai numesc *linii de cîmp* sau *curbe integrale.*

3.3 Exerciții

1. Să se determine liniile de cîmp pentru cîmpurile vectoriale de pe $\mathbb{R}^3$:

(a) $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + xyz\vec{k}$;

(b) $\vec{v} = (2z - 3y)\vec{i} + (6x - 2z)\vec{j} + (3y - 6x)\vec{k}$;

(c) $\vec{v} = (xz + y)\vec{i} + (x + yz)\vec{j} + (1 - z^2)\vec{k}$;

(d) $\vec{v} = (x^2 + y^2)\vec{i} + 2xy\vec{j} - z^2\vec{k}$;

(e) $\vec{v} = (y^2z^2, xyz^2, xy^2z)$;

(f) $\vec{v} = (xz, 2xz - yz, -x^2)$.

Indicație (a): Scriem sistemul autonom asociat cîmpului vectorial $\vec{v}$ sub forma:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{xyz}.$$

Din prima egalitate, rezultă $x = c_1 y$, deci a doua egalitate devine:

$$c_1 y dy = \frac{dz}{z} \Longrightarrow c_1 \frac{y^2}{2} = \ln|z| + c_2.$$

Așadar, obținem $\frac{x}{y} \cdot \frac{y^2}{2} = \ln|z| + c_2$.

Rezultă că liniile de cîmp pentru $\vec{v}$ sînt curbele:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} & = c_1 \\ xy - \ln|z| & = c_2. \end{cases}$$

(b) Sistemul poate fi scris sub forma:

$$\frac{dx}{2z - 3y} = \frac{dy}{6x - 2z} = \frac{dz}{3y - 6x} = \frac{dx + dy + dz}{0}.$$

Așadar, $dx + dy + dz = 0$, deci $x + y + z = c_1$.

Din forma inițială obținem și:

$$\frac{3xdx}{3x(2z - 3y)} = \frac{\frac{3}{2}ydy}{\frac{3}{2}y(3x - z)} = \frac{zdz}{z(y - 2x)} = \frac{3xdx + \frac{3}{2}ydy + zdz}{0},$$

deci $3xdx + \frac{3}{2}ydy + zdz = 0$, adică $3\frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}y^2 + \frac{z^2}{22} = c_2$.

(c) Obținem:

$$\frac{dx + dy}{(x + y)(z + 1)} = \frac{dz}{1 - z^2} \Longrightarrow \frac{d(x + y)}{x + y} = -\frac{dz}{z - 1}.$$

Rezultă $\ln|x+y| + \ln|z-1| = \ln c_1$, adică $(x+y)(z-1) = c_1$.

Apoi:

$$\frac{dy - dx}{x + zy - xz - y} = \frac{dy - dx}{(x-y)(1-z)} = \frac{dz}{1-z^2}.$$

Rezultă $-\dfrac{d(x-y)}{x-y} = \dfrac{dz}{z+1}$, de unde $(x-y)(z+1) = c_2$.

Așadar, liniile de cîmp sînt curbele:

$$\begin{cases} (x+y)(z-1) & = c_1 \\ (x-y)(z+1) & = c_2 \end{cases}$$

(d) Sistemul simetric rezultat este:

$$\frac{dx}{x^2+y^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{-z^2}.$$

Prin adunarea primelor două rapoarte, obținem:

$$\frac{d(x+y)}{(x+y)^2} = \frac{dz}{-z^2},$$

adică $\dfrac{1}{x+y} + \dfrac{1}{z} = c_1$.

Prin scădere, avem $\dfrac{d(x-y)}{(x-y)^2} = \dfrac{dz}{-z^2}$, deci $\dfrac{1}{x-y} + \dfrac{1}{z} = c_2$.

Liniile de cîmp se obțin:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} + \dfrac{1}{z} & = c_1 \\[2ex] \dfrac{1}{x-y} + \dfrac{1}{z} & = c_2 \end{cases}$$

2. Fie cîmpul vectorial:

$$\vec{V} = (x+y)\vec{i} + (y-x)\vec{j} - 2z\vec{k}.$$

Determinați liniile de cîmp care conțin punctul $M(1,0,1)$.

3. Rezolvați sistemele simetrice:

(a) $\dfrac{dx}{2y(2a-x)} = \dfrac{dy}{x^2+z^2-y^2-4ax} = \dfrac{dz}{-2yz}$, unde $a \in \mathbb{R}, x \neq 2a, y, z \neq 0$;

(b) $\dfrac{dx}{x(x+y)} = \dfrac{dy}{-y(x+y)} = \dfrac{dz}{(y-x)(2x+2y+z)}$;

(c) $\dfrac{dx}{1+x^2} = \dfrac{dy}{x(2-y)} = \dfrac{dz}{1+z^2}$;

(d) $\dfrac{dx}{x^2} = \dfrac{dy}{-xy} = \dfrac{dz}{y^2}$;

(e) $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{zdz}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

(f) $\dfrac{dx}{2y} = \dfrac{dy}{3x^2} = \dfrac{dz}{-6x^2y}$;

(g) $\dfrac{dx}{2xz} = \dfrac{dy}{2yz} = \dfrac{dz}{z^2-x^2-y^2}$;

(h) $\dfrac{dx}{2xz} = \dfrac{dy}{2yz} = \dfrac{dz}{x^2-y^2}$.

Rezolvare (a): Din primul și ultimul raport obținem:

$$\frac{dx}{x-2a} = \frac{dz}{z},$$

care conduce la integrala primă $\dfrac{x-2a}{z} = c_1$.

Pentru a doua integrală primă, amplificăm primul raport cu x, pe al doilea cu y și pe al treilea cu z și, prin egalare cu ultimul raport obținem:

$$\frac{xdx+ydy+zdz}{-y(x^2+y^2+z^2)} = \frac{dz}{-2yz} \implies \frac{d(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2} = \frac{dz}{z},$$

care conduce la integrala primă $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{z} = c_2$.

Se arată independența funcțională a celor două integrale prime etc.

3.4 Resurse suplimentare

Termenul în engleză pentru linii de cîmp este `(vector) field line`, iar cîteva explicații, împreună cu exemple cunoscute din cazul cîmpurilor fizice, se pot găsi pe Wikipedia.

Metoda rezolvării ecuațiilor diferențiale în mod grafic, folosind *cîmpul tangent* (eng. `slope field`), cu semnificația fizică a cîmpului de viteze, poate fi foarte utilă. Ea este prezentată succint pe Wikipedia și mai detaliat, inclusiv cu exerciții rezolvate, la Khan Academy.

Trecerea de la cîmpuri vectoriale în spațiu la ecuații diferențiale (sau sisteme) autonome este explicată pe scurt aici.

Alte materiale se mai pot găsi în cursul de la Iași (v. §2.1.2), în cursul prof. Crăciun și Barbu (cap. 2) și în aceste notițe de la UBB Cluj.

Vizualizarea grafică a liniilor de cîmp se poate face folosind GeoGebra, accesînd link-ul de aici.

De exemplu, reluăm primul exercițiu rezolvat:

$$\vec{V} = (z - y)\vec{i} + (x - z)\vec{j} + (y - x)\vec{k},$$

unde am găsit liniile de cîmp:

$$\begin{aligned} L_1 &: x + y + z = c_1 \\ L_2 &: x^2 + y^2 + z^2 = c_2. \end{aligned}$$

Prima linie de cîmp este un plan, iar a doua este o sferă. Grafic, acestea înseamnă că dacă reprezentăm în suficiente puncte din spațiu vectori care alcătuiesc cîmpul $\vec{V}$, vom vedea că apar „tipare", se disting forme care reprezintă plane, respectiv sfere. Într-adevăr, reprezentarea folosind GeoGebra pentru exemplul de mai sus arată, dintr-un punct de vedere, plane la diverse distanțe față de origine, dar paralele, iar din altul, sfere de raze diferite. Imaginea se poate obține interactiv, pentru a putea fi rotită, introducînd componentele cîmpului în link-ul de mai sus.

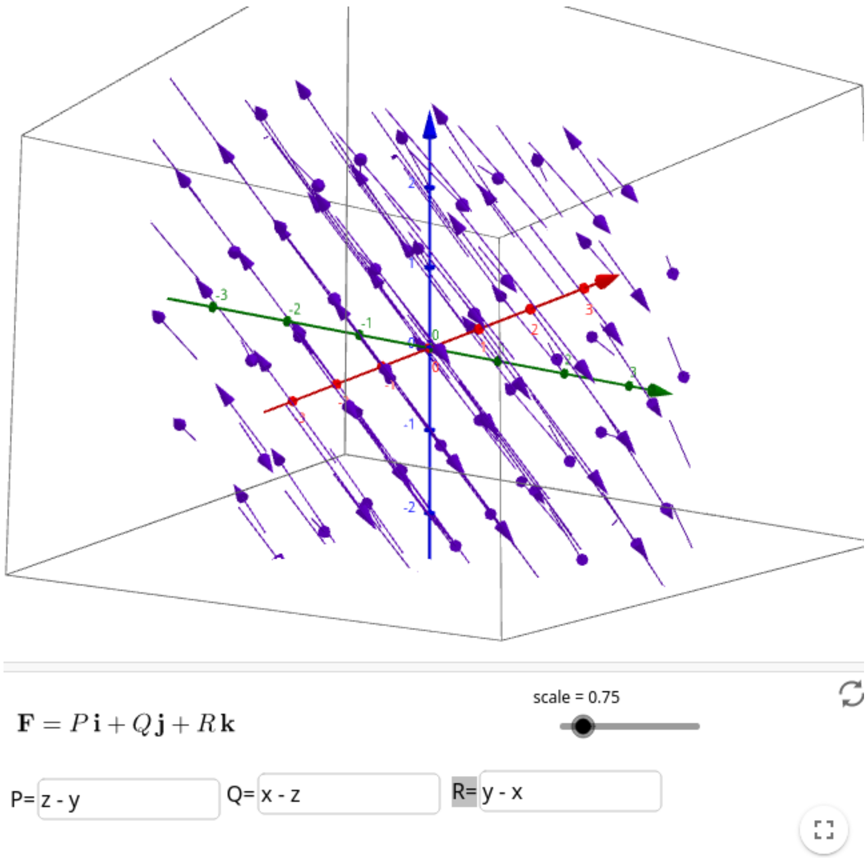

Figura 3.1: Liniile de cîmp L_1, plane paralele

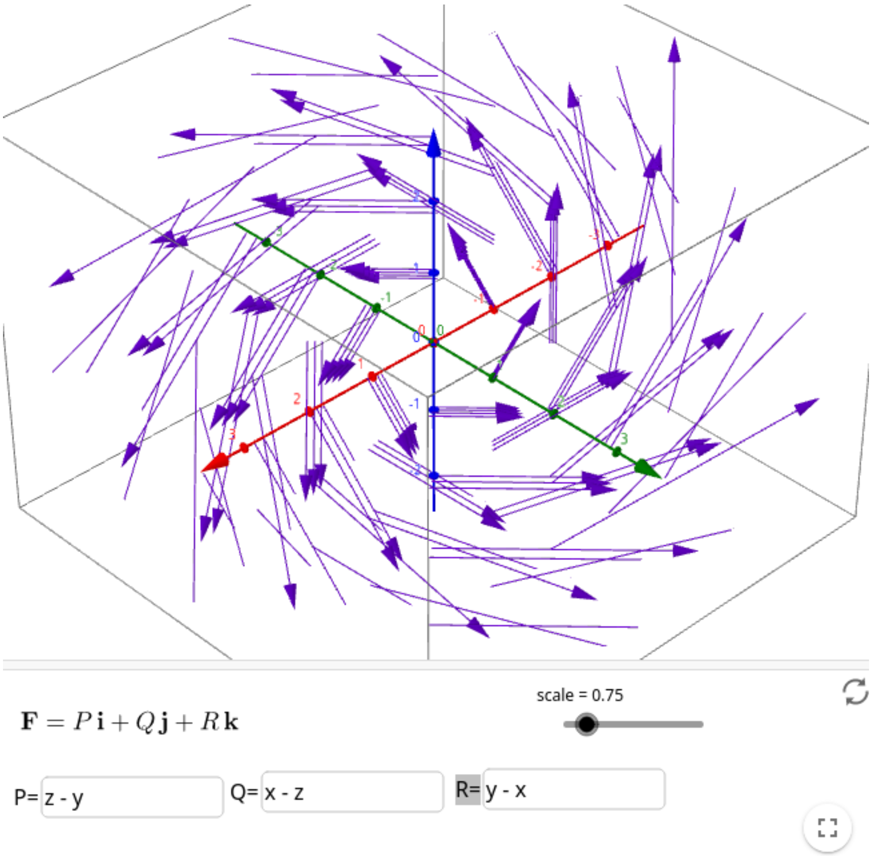

Figura 3.2: Liniile de cîmp L_2, sfere concentrice

SEMINAR 4

ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE ȘI SUPRAFEȚE DE CÎMP

4.1 Ecuații cu derivate parțiale de ordinul întîi

Forma generală a unei ecuații cu derivate parțiale (EDP) de ordinul întîi pentru funcția necunoscută $u = u(x, y, z)$ este:

$$P(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial y} + R(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

unde $P, Q, R : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ sînt funcții de clasă (cel puțin) $\mathcal{C}^1$.

Pentru rezolvare, se scrie sistemul simetric asociat, care are forma generală

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

și i se determină integralele prime. Dacă $I_1 = C_1$ și $I_2 = C_2$ sînt integralele prime ale sistemului, atunci soluția finală a ecuației inițiale este:

$$u(x, y, z) = \varphi(I_1, I_2),$$

unde φ este o funcție oarecare de clasă (cel puțin) $\mathcal{C}^1$.

Observație 4.1: Pentru simplitate, vom mai folosi notațiile cunoscute pentru derivate parțiale, anume $u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ etc.

Observație 4.2: Metoda de rezolvare de mai sus cere implică și verificarea independenței celor două integrale prime, în sensul exemplificat mai jos.

Exemplu: Rezolvăm ecuația cu derivate parțiale:

$$(4z - 5y)u_x + (5x - 3z)u_y + (3y - 4x)u_z = 0.$$

Soluție: Scriem sistemul simetric asociat, care este:

$$\frac{dx}{4z - 5y} = \frac{dy}{5x - 3z} = \frac{dz}{3y - 4x},$$

sistem care este valabil pe domeniul:

$$D = \{(x, y, z \in \mathbb{R}^3) \mid 4z \neq 5y, 5x \neq 3z, 3y \neq 4x\}.$$

Pentru a obține integralele prime, amplificăm prima fracție cu 3, a doua cu 4 și a treia cu 5 și obținem:

$$\frac{3dx}{12z - 15y} = \frac{4dy}{20x - 12z} = \frac{5dz}{15y - 20x} = \frac{3dx + 4dy + 5dz}{0},$$

de unde $I_1(x, y, z) = 3x + 4y + 5z = c_1$ este o integrală primă.

Mai putem amplifica și primul raport cu $2x$, pe al doilea cu $2y$ și pe al treilea cu $2z$ și obținem:

$$\frac{2xdx}{8xz - 10xy} = \frac{2ydy}{10xy - 6yz} = \frac{2zdz}{6yz - 8xz} = \frac{2xdx + 2ydy + 2zdz}{0},$$

deci o a doua integrală primă este $I_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = c_2$.

Evident, cele două integrale prime sînt definite pe același domeniu D.

Independența celor două înseamnă verificarea că matricea dată de derivatele lor parțiale are rangul maxim pe domeniul de definiție. Avem, așadar:

$$A = \begin{pmatrix} I_{1x} & I_{2x} \\ I_{1y} & I_{2y} \\ I_{1z} & I_{2z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2x \\ 4 & 2y \\ 5 & 2z \end{pmatrix},$$

matrice care se poate verifica imediat că are rangul 2, adică maxim, pentru orice $(x, y, z) \in D$. Deci integralele prime sînt independente și soluția finală a ecuației este:

$$u(x, y, z) = \varphi(3x + 4y + 5z, x^2 + y^2 + z^2),$$

unde φ este o funcție arbitrară de clasă $\mathcal{C}^1$.

4.2 Suprafețe de cîmp

Suprafețele de cîmp pentru un cîmp vectorial tridimensional se obțin scriind o ecuație cu derivate parțiale asociată, căreia îi determinăm soluția generală. Suprafața de cîmp este, atunci, dată de anularea soluției generale, scrisă în forma implicită.

Exemplu: Fie cîmpul vectorial:

$$\vec{V} = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j} + z(x^2 + y^2)\vec{k}.$$

Determinăm suprafețele de cîmp.

Soluție: Scriem ecuația cu derivate parțiale asociată cîmpului, pentru o funcție necunoscută $u = u(x, y, z)$. Avem:

$$xy^2u_x + x^2yu_y + z(x^2 + y^2)u_z = 0.$$

Rezolvarea ecuației se face ca mai sus, scriind sistemul asociat:

$$\frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{x^2y} = \frac{dz}{z(x^2 + y^2)},$$

definit pe domeniul potrivit, adică $D = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$.

Din prima egalitate, putem simplifica cu xy și avem $xdx = ydy$, deci o integrală primă este $x^2 - y^2 = c_1$.

Putem amplifica rapoartele cu y, x și respectiv 1 și avem:

$$\frac{ydx}{xy^3} = \frac{xdy}{x^3y} = \frac{dz}{z(x^2 + y^2)} = \frac{ydx + xdy}{xy(x^2 + y^2)}.$$

Din ultimele două rapoarte, obținem, după simplificare cu $x^2 + y^2$:

$$\frac{dz}{z} = \frac{d(xy)}{xy},$$

deci $\dfrac{xy}{z} = c_2$.

Acum soluția generală a ecuației cu derivate parțiale este:

$$u(x, y, z) = \varphi\left(x^2 - y^2, \frac{xy}{z}\right),$$

cu φ o funcție arbitrară de clasă $\mathcal{C}^1$, deci suprafețele de cîmp ale cîmpului $\vec{V}$ au forma:

$$\varphi\left(x^2 - y^2, \frac{xy}{z}\right) = 0.$$

În unele cazuri, se pot cere anume suprafețe de cîmp, de exemplu:

Exemplu: Să se determine suprafața de cîmp a cîmpului vectorial:

$$\vec{V} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k},$$

care trece prin curba dată de intersecția cilindrului $x^2 + z^2 = 4$ cu planul $y = 0$.

Soluție: Mai întîi, determinăm toate suprafețele de cîmp, ca mai sus. Scriem direct sistemul asociat:

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{xy}.$$

Amplificăm cu x, y, respectiv z și obținem $xdx = ydy = zdz$, adică $x^2 - y^2 = c_1, x^2 - z^2 = c_2$ sînt două integrale prime.

Aceste integrale prime dau o familie infinită de suprafețe, dintre care vrem să aflăm pe cea care trece prin curba dată. Așadar, avem de rezolvat sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = c_1 \\ x^2 - z^2 & = c_2 \\ x^2 + z^2 & = 4 \\ y & = 0 \end{cases}$$

pentru constantele c_1 și c_2, care ne vor identifica exact suprafața.

Este suficient să găsim condiția de compatibilitate a sistemului, care se poate obține din primele două ecuații. Înmulțim prima ecuație cu 2 și o scădem din ea pe a doua și comparăm cu a treia ecuație. Se obține $2c_1 - c_2 = 4$. Apoi, înlocuim în integralele prime și avem $2(x^2 - y^2) - (x^2 - z^2) = 4$, care se prelucrează și se aduce la forma canonică:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{4} = 1,$$

care este un *hiperboloid cu o pînză.*

4.3 Ecuații cu derivate parțiale cvasiliniare

Forma generală a ecuațiilor cu derivate parțiale cvasiliniare pentru o funcție $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ este:

$$P_1(x_1, \dots, x_n)u_{x_1} + P_2(x_1, \dots, x_n)u_{x_2} + \cdots + P_{n-1}(x_1, \dots, x_n)u_{x_{n-1}} + Q(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

adică apar toate derivatele parțiale ale lui u, mai puțin ultima.

În exercițiile pe care o să le întîlnim cel mai des, funcția u este înlocuită cu $z = z(x, y)$, iar atunci ultima derivată parțială o putem gîndi, de exemplu, ca $z_z = 1$.

Modul de rezolvare este explicat pe exemplul de mai jos.

Exemplu: Fie ecuația cvasiliniară:

$$(z - y)^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xz \frac{\partial z}{\partial y} = xy.$$

Soluție: Se poate vedea că ecuația este cvasiliniară, funcția necunoscută fiind $z = z(x, y)$.

Din teorie, ecuația trebuie să aibă o soluție scrisă în formă implicită $u(x, y, z) = 0$. De fapt, această funcție trebuie înțeleasă ca $u = u(x, y, z(x, y))$. Folosind formula de derivare a funcțiilor compuse, dacă vrem să scriem derivata parțială în raport cu x a lui u, trebuie să ținem cont că x apare și în $z(x, y)$, deci avem:

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x},$$

și similar pentru derivata în raport cu y. Rezultă:

$$z_x = -\frac{u_x}{u_z}, \quad z_y = -\frac{u_y}{u_z}.$$

Înlocuim în ecuația dată și înmulțim relația cu u_z, obținînd:

$$(z - y)^2 u_x + xzu_y + xyu_z = 0,$$

care este o ecuație cu derivate parțiale de ordinul întîi și o putem rezolva ca în prima secțiune.

Scriem sistemul asociat:

$$\frac{dx}{(z - y)^2} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{xy}.$$

Din a doua egalitate obținem direct $y^2 - z^2 = c_1$, care este o integrală primă.

Amplificăm primul raport cu x, pe al doilea cu $(y - z)$ și pe al treilea cu $(z - y)$ și obținem prin adunare:

$$xdx + (y - z)dy + (z - y)dz = 0 \Longrightarrow xdx + ydy + zdz - d(yz) = 0.$$

Rezultă a doua integrală primă $x^2 + y^2 + z^2 - 2yz = x^2 + (y - z)^2 = c_2$.

Soluția pentru u va fi:

$$u(x, y, z) = \varphi(y^2 - z^2, x^2 + (y - z)^2),$$

cu φ o funcție de clasă $\mathcal{C}^1$ pe domeniul de definiție.

Atunci soluția pentru z se obține din forma implicită $u(x, y, z) = 0$.

4.4 Exerciții

1. Rezolvați ecuațiile cvasiliniare:

(a) $x(y^3 - 2x^3)z_x + y(2y^3 - x^3)z_y = 9z(x^3 - y^3)$;

(b) $2xzz_x + 2yzz_y = z^2 - x^2 - y^2$;

(c) $2yz_x + 3x^2 z_y + 6x^2 y = 0$;

(d) $x\left(y^2 - z^2\right)z_x - y\left(x^2 + y^2\right)z_y = z\left(x^2 + y^2\right)$;

(e) $xzz_x + yzz_y = x + y$.

Indicații: (a) Sistemul diferențial autonom la care se ajunge este:

$$\frac{dx}{x(y^3-2x^3)}=\frac{dy}{y(2y^3-x^3)}=\frac{dz}{9z(x^3-y^3)}.$$

Rezultă:

$$\frac{ydx+xdy}{3xy(y^3-x^3)}=\frac{dz}{9z(x^3-y^3)}\Longrightarrow\frac{d(xy)}{xy}=-\frac{dz}{3z}\Longrightarrow x^3y^3z=c_1.$$

Din primele două rapoarte obținem:

$$\frac{y(2y^3-x^3)}{x(y^3-2x^3)}=\frac{dy}{dx}.$$

Simplificăm forțat cu $\dfrac{y}{x}=u$ și ajungem la ecuația:

$$\frac{u^3-2}{u(u+1)(u^2-u+1)}du=\frac{dx}{x}.$$

Rezultă $\ln(c_2x)=-2\ln u+\ln(u+1)+\ln(u^2-u+1)$, adică, în final, $c_2=\dfrac{x^3+y^3}{x^2y^2}$.

(b) Se ajunge la sistemul autonom:

$$\frac{dx}{2xz}=\frac{dy}{2yz}=\frac{dz}{z^2-x^2-y^2}.$$

Din primele două rapoarte avem $\dfrac{y}{x}=c_1$ și apoi:

$$\frac{2xdx}{2x^2}=\frac{2ydy}{2y^2}=\frac{2zdz}{z^2-x^2-y^2},$$

adică $c_2x=x^2+y^2+z^2$.

(d) Dacă $u(x,y,z)=0$ este soluția căutată în formă implicită, atunci ajungem la ecuația cu derivate parțiale de ordinul întîi:

$$x(y^2-z^2)u_x-y(x^2+z^2)u_y+z(x^2+y^2)u_z=0.$$

Din sistemul diferențial asociat, obținem:

$$xdx+ydy+zdz=0\Longrightarrow x^2+y^2+z^2=c_1.$$

Mai departe:

$$\frac{ydx-xdy}{xy(y^2-z^2)+xy(x^2+z^2)}=\frac{ydx-xdy}{xy(x^2+y^2)}=\frac{dz}{z(x^2+y^2)},$$

de unde rezultă:

$$\frac{ydx - xdy}{xy} = \frac{dz}{z} \Longrightarrow \frac{x}{yz} = c_2.$$

2. Determinați suprafețele de cîmp pentru cîmpurile vectoriale:

(a) $\vec{V} = (x + y + z)\vec{i} + (x - y)\vec{j} + (y - x)\vec{k}$;

(b) $\vec{V} = (x - y)\vec{i} + (x + y)\vec{j} + \vec{k}$.

Indicații: (a) Ajungem la sistemul:

$$\frac{dx}{x + y + z} = \frac{dy}{x - y} = \frac{dz}{y - x}.$$

Din prima egalitate, rezultă $dy + dz = 0 \Longrightarrow y + z = c_1$. Înlocuind în cea de-a doua egalitate $z = c_1 - y$, rezultă $(x - y)dx = (x + c_1)dy$, deci $xdx - d(xy) - c_1dy = 0$, adică $\frac{x^2}{2} - xy - c_1y = c_2$. Înlocuim $c_1 = y + z$ și obtinem $\frac{x^2}{2} - xy - y^2 - yz = c_2$.

Domeniul de definiție va fi $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z \neq 0\}$.

(b) Se ajunge la sistemul:

$$\frac{dx}{x - y} = \frac{dy}{x + y} = \frac{dz}{1}.$$

Rezultă:

$$\frac{xdx}{x^2 - xy} = \frac{ydy}{xy + y^2} = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = \frac{\frac{1}{2}d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \frac{dz}{1},$$

deci $x^2 + y^2 = c_1e^{2z}$, iar apoi, din $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y}$, putem nota $\frac{y}{x} = u$ și rezultă $x^2 + y^2 = c_2e^{2\arctan\frac{y}{x}}$.

3. Determinați suprafața de cîmp a cîmpului vectorial:

$$\vec{V} = 2xz\vec{i} + 2yz\vec{j} + (z^2 - x^2 - y^2)\vec{k},$$

care conține cercul dat de $z = 0$ și $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

Indicație: Integralele prime independente ale sistemului se determină din:

$$\frac{dx}{2xz} = \frac{dy}{2yz} = \frac{dz}{z^2 - x^2 - y^2}.$$

Din primele două rapoarte, obținem $y = c_1 x$, iar apoi, putem înmulți toate egalitățile cu $2z$ și prelucrăm mai departe:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{2z}{z^2 - x^2 - y^2} \Longrightarrow \frac{2xdx}{2x^2} = \frac{2ydy}{2y^2} = \frac{2zdz}{z^2 - x^2 - y^2} = \frac{2(xdx + ydy + zdz)}{x^2 + y^2 + z^2},$$

deci $x^2 + y^2 + z^2 = c_2 x$.

Pentru a obține intersecția cu cercul dat, avem condiția ca sistemul de mai jos să fie compatibil:

$$\begin{cases} y & = c_1 x \\ x^2 + y^2 + z^2 & = c_2 x \\ z & = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x & = 0 \end{cases}.$$

Din ultimele trei ecuații se obține că sistemul este compatibil dacă și numai dacă $c_2 = 2$.

Rezultă $x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$, care este o sferă.

4. Fie cîmpul vectorial:

$$\vec{V} = (x + y)\vec{i} + (y - x)\vec{j} - 2z\vec{k}.$$

Să se determine:

(a) liniile de cîmp;

(b) linia de cîmp ce conține punctul $M(1, 0, 1)$;

(c) suprafețele de cîmp;

(d) suprafața de cîmp care conține dreapta $z = 1, y - x\sqrt{3} = 0$.

Indicație: Pentru liniile de cîmp, ecuația dată de primele două rapoarte:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x + y}{y - x}$$

este o ecuație diferențială de ordinul întîi, omogenă, care se poate rezolva cu substituția $y = tx$.

5. Să se determine soluția ecuațiilor cu derivate parțiale de ordinul întîi:

(a) $yu_x - xu_y = 0$;

(b) $xzu_x - yzu_y + (x^2 + y^2)u_z = 0$;

(c) $xu_x - yu_y = 0$.

SEMINAR 5

EXERCIȚII SUPLIMENTARE EDP1

Exercițiile de mai jos au fost în lista pentru parțial din anul 2019-2020.

1. Determinați liniile și suprafața de câmp corespunzătoare câmpului vectorial:

$$\vec{v} = (x^3 + 3xy^2)\vec{i} + 2y^3\vec{j} + 2y^2z\vec{k}.$$

2. Determinați suprafața de câmp a câmpului vectorial:

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + (z - x^2 - y^2)\vec{k},$$

care conține curba dată de:

$$\gamma : \begin{cases} y & = -2 \\ z & = x - x^2 \end{cases}.$$

3. Să se afle liniile de câmp asociate câmpului vectorial:

$$\vec{v} = (xz)\vec{i} - (yz)\vec{j} + (x^2 + y^2)\vec{k}.$$

4. Să se afle liniile de câmp asociate câmpului vectorial:

$$\vec{v} = (3z - 4y)\vec{i} + (4x - 2z)\vec{j} + (2y - 3x)\vec{k}.$$

5. Să se afle liniile de câmp asociate câmpului vectorial:

$$\vec{v} = e^x \cdot \vec{i} + y^2\vec{j} + e^x y\vec{k}.$$

6. Aflați soluția generală a ecuației cu derivate parțiale de ordinul întâi:

$$2x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} + (4xy^2 - 2z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

7. Aflați soluția generală a ecuației cu derivate parțiale de ordinul întâi:

$$(2x - 3y)\frac{\partial u}{\partial x} + (3x - z)\frac{\partial u}{\partial y} + (y - 2x)\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

8. Aflați soluția generală a ecuației cu derivate parțiale de ordinul întâi:

$$(y - z)\frac{\partial u}{\partial x} + (z - x)\frac{\partial u}{\partial y} + (x - y)\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

9. Aflați soluția generală a ecuației cu derivate parțiale de ordinul întâi:

$$(xz + y)\frac{\partial u}{\partial x} + (x + yz)\frac{\partial u}{\partial y} + (1 - z^2)\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

10. Aflați soluția generală a ecuației cu derivate parțiale de ordinul întâi:

$$xy^2 + \frac{\partial u}{\partial x} + x^2y\frac{\partial u}{\partial y} + z(x^2 + y^2)\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

11. Aflați soluția generală a ecuației cu derivate parțiale de ordinul întâi:

$$xy\frac{\partial u}{\partial x} + (x^2 + y^2)\frac{\partial u}{\partial y} + yz\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

12. Aflați liniile de câmp asociate câmpului vectorial:

$$\vec{v} = (4z - 5y)\vec{i} + (5x - 3z)\vec{j} + (3y - 4x)\vec{k}.$$

13. Determinați liniile și suprafața de câmp corespunzătoare câmpului vectorial:

$$\vec{v} = (z - y)^2\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}.$$

14. Determinați liniile și suprafața de câmp corespunzătoare câmpului vectorial:

$$\vec{v} = (x^3 + 3xy^2)\vec{i} + 2y^3\vec{j} + 2y^2z\vec{k}.$$

15. Determinați suprafața de câmp corespunzătoare câmpului vectorial:

$$\vec{v} = x(y+z)\vec{i} + z(z-y)\vec{j} + y(y-z)\vec{k},$$

care conține curba:

$$\gamma : \begin{cases} x & = 4 \\ y^2 - z^2 & = 4 \end{cases}.$$

16. Determinați suprafața de câmp corespunzătoare câmpului vectorial:

$$\vec{v} = (x^2 + y^2)\vec{i} + 2xy\vec{j} + xz\vec{k},$$

care conține curba:

$$\gamma : \begin{cases} z & = 1 \\ x^2 - y^2 & = 1 \end{cases}.$$

Identificați tipul suprafeței.

17. Determinați suprafețele de câmp asociate câmpului vectorial:

$$\vec{v} = xz\vec{i} + yz\vec{j} + (x+y) \cdot z\vec{k}.$$

18. Determinați suprafețele de câmp asociate câmpului vectorial:

$$\vec{v} = xz^2\vec{i} + y(x^2 + z^2)\vec{j} + x^2 z\vec{k}.$$

19. Determinați suprafețele de câmp asociate câmpului vectorial:

$$\vec{v} = (x^2 + y^2)\vec{i} + 2xy\vec{j} - z^2\vec{k}.$$

20. Determinați suprafețele de câmp asociate câmpului vectorial:

$$\vec{v} = 2xz\vec{i} + 2zy\vec{j} + (z^2 - x^2 - y^2)\vec{k},$$

care conțin cercul dat de:

$$\gamma : \begin{cases} z & = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x & = 0 \end{cases}.$$

SEMINAR 6

ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE DE ORDINUL DOI (EDP 2)

6.1 Clasificare și forma canonică

O ecuație *cvasiliniară* cu derivate parțiale de ordinul al doilea, cu două variabile independente, are forma generală:

$$A(x,y)z_{xx} + 2B(x,y)z_{xy} + C(x,y)z_{yy} + D(x,y,z,z_x,z_y) = 0,$$

unde $A, B, C : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sînt funcții reale, continue pe un deschis din $\mathbb{R}^2$ (care este domeniul de definiție al ecuației), iar D este de asemenea funcție continuă.

Definiţie 6.1: Se numesc *curbe caracteristice* ale ecuației de mai sus curbele care se află pe suprafețele integrale ale ecuației, i.e. care satisfac *ecuația caracteristică*:

$$A(x,y)dy^2 - 2B(x,y)dxdy + C(x,y)dx^2 = 0.$$

Clasificarea ecuațiilor se face în funcție de curbele caracteristice. Astfel, avem:

- $AC - B^2 < 0 \Longrightarrow$ ecuația este de *tip hiperbolic*;
- $AC - B^2 = 0 \Longrightarrow$ ecuația este de *tip parabolic*;
- $AC - B^2 > 0 \Longrightarrow$ ecuația este de *tip eliptic*.

Exemple foarte des întîlnite provin din fizica matematică:

- **Ecuația coardei vibrante**, care are aceeași formă generală cu **ecuația undelor plane**:

$$u_{xx} - \frac{1}{a^2}u_{tt} = 0, \quad a^2 = \frac{\rho}{T_0},$$

unde ρ este densitatea liniară a coardei, iar T_0 este tensiunea la care este supusă coarda în poziția de repaus.

Ecuația este de tip hiperbolic, după cum se poate verifica imediat.

- **Ecuația căldurii**, cu forma generală:

$$u_{xx} = \frac{1}{a^2} u_t, \quad a^2 = \frac{k}{c\rho},$$

unde k este coeficientul de conductibilitate termică, c este căldura specifică, iar ρ este densitatea.

Ecuația are tip parabolic.

- **Ecuația lui Laplace**, cu forma generală:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

care este o ecuație de tip eliptic.

6.2 Forma canonică

Pornind de la ecuația caracteristică, o putem rezolva ca pe o ecuație de gradul al doilea și obținem, în general, două soluții:

$$\frac{dy}{dx} = \mu_1(x, y), \quad \frac{dy}{dx} = \mu_2(x, y).$$

Aceste ecuații se numesc *curbele caracteristice* ale ecuației de pornire.

Prin integrarea celor două ecuații, se obțin două familii de curbe în planul XOY, de forma $\varphi_1(x, y) = c_1$ și $\varphi_2(x, y) = c_2$, unde c_1 și c_2 sînt constante arbitrare.

Aducerea ecuației de pornire la forma canonică se face pe următoarele cazuri:

- Dacă ecuația este *de tip hiperbolic*, se face schimbarea de variabile:

$$\tau = \varphi_1(x, y), \quad \eta = \varphi_2(x, y),$$

iar prima formă canonică a ecuației se obține a fi:

$$z_{\tau\eta} + \Psi_1(\tau, \eta, z, z_\tau, z_\eta) = 0,$$

Putem face și transformarea $\tau = x + y$ și $\eta = x - y$, iar a doua formă canonică se obține a fi:

$$z_{xx} - z_{yy} + \Phi_1(\tau, \eta, z, z_x, z_y) = 0.$$

- Dacă ecuația este *de tip parabolic*, o să obținem $\varphi_1 = \varphi_1 = \varphi(x, y)$ și vom face schimbarea de variabilă:
$$\tau = \varphi(x, y), \quad \eta = x.$$
Forma canonică este:
$$z_{\eta\eta} + \Psi_2(\tau, \eta, z, z_\tau, z_\eta) = 0.$$
- Pentru ecuațiile *de tip eliptic*, funcțiile φ_1 și φ_2 sînt complex conjugate și putem nota $\alpha(x, y) = \mathrm{Re}\varphi_1(x, y)$, iar $\beta(x, y) = \mathrm{Im}\varphi_1(x, y)$. Schimbarea de variabile este:
$$\tau = \alpha(x, y), \quad \eta = \beta(x, y),$$
iar forma canonică este:
$$z_{\tau\tau} + z_{\eta\eta} + \Psi_3(\tau, \eta, z, z_\tau, z_\eta) = 0.$$

6.3 Cazul coeficienților constanți și $D = 0$

Ne ocupăm deocamdată de cazul coeficienților constanți și $D = 0$, ecuația prezentîndu-se în forma generală:
$$Az_{xx} + 2Bz_{xy} + Cz_{yy} = 0, \quad A, B, C \in \mathbb{R}.$$
Atunci ecuația diferențială a curbelor caracteristice este:
$$Ady^2 - 2Bdxdy + Cdx^2 = 0.$$
Obținem soluțiile de forma generală:
$$\begin{cases} dy - \mu_1 dx &= 0 \\ dy - \mu_2 dx &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y - \mu_1 x &= c_1 \\ y - \mu_2 x &= c_2 \end{cases}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
Aducerea la forma canonică se simplifică:

- Pentru cazul hiperbolic, substituția este:
$$\begin{cases} \tau &= y - \mu_1 x \\ \eta &= y - \mu_2 x \end{cases},$$
iar ecuația devine:
$$z_{\tau\eta} = 0,$$
care are soluția generală $z = f(\tau) + g(\eta)$, unde f și g sînt funcții arbitrare. Înlocuim în vechile variabile și obținem:
$$z(x, y) = f(y - \mu_1 x) + g(y - \mu_2 x).$$

- Pentru cazul parabolic, avem $\mu_1 = \mu_2 = \dfrac{B}{A}$, iar ecuația curbelor devine $Ady - Bdx = 0$, care are soluția $Ay - Bx = c \in \mathbb{R}$.

  Schimbarea de variabile este $\tau = Ax - By$, iar $\eta = x$, care conduce la forma canonică:

  $$z_{\eta\eta} = 0.$$

  Soluția generală este $z = \eta f(\tau) + g(\tau)$, cu f, g funcții arbitrare. Putem reveni la variabilele anterioare și găsim:

  $$z = xf(Ax - By) + g(x).$$

- Pentru cazul eliptic, forma canonică este chiar ecuația Laplace:

  $$z_{\tau\tau} + z_{\eta\eta} = 0,$$

  care nu se poate rezolva ușor pe cazul general.

6.4 Exerciții

1. Aduceți la forma canonică următoarele ecuații:

(a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} + 6\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0;$

(b) $3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 7\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$

(c) $4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0;$

(d) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 10\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} - 3\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0;$

(e) $2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 7\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$

(f) $y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (x + y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$

(g) $(1 + x^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 + y^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0;$

(h) $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + y \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0;$

Soluție: (a) Deoarece avem $A = 1, B = 1, C = -3$, rezultă $B^2 - AC = 4 > 0$, deci ecuația este de tip hiperbolic.

Scriem ecuația caracteristică:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\frac{dy}{dx} - 3 = 0,$$

care poate fi rezolvată ca o ecuație de gradul al doilea, de unde:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 3 & \Longrightarrow y - 3x = c_1 \\ \dfrac{dy}{dx} = -1 & \Longrightarrow y + x = c_2 \end{cases}.$$

Cu schimbarea de variabile:

$$\begin{cases} \tau & = y - 3x \\ \eta & = y + x \end{cases},$$

funcția căutată $u(x, y)$ devine $u(\tau, \eta)$, astfel că toate derivatele parțiale se calculează acum folosind formula funcțiilor implicite și derivarea funcțiilor compuse. Toate derivatele parțiale în raport cu x și y se calculează, deci, ținînd cont de legătura cu noile variabile η și τ. Practic, avem:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x}$$

și similar pentru y.

Obținem, succesiv:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \tau}\cdot\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\\
&= -3\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \tau}\cdot\frac{\partial \tau}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}\\
&= \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\cdot\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\cdot\frac{\partial \tau}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)\cdot\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \tau}\cdot\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\\
&= \left[\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)\cdot\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right]\cdot\frac{\partial \tau}{\partial x} +\\
&+ \left[\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right]\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} +\\
&+ \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}\cdot\left(\frac{\partial \tau}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \eta\partial \tau}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \eta}\cdot\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 +\\
&+ \frac{\partial^2 u}{\partial \tau\partial \eta}\cdot\frac{\partial \tau}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\\
&= 9\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - 6\frac{\partial^2 u}{\partial \tau\partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\\
&= -3\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \tau\partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \tau\partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.
\end{aligned}
$$

Rezultă că, în final, forma canonică este:

$$-16\frac{\partial^2 u}{\partial\tau\partial\eta} + 8\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial\tau\partial\eta} - \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0.$$

2. Determinați soluția ecuației:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

care satisface condițiile:

$$\begin{cases} u(x,0) & = 3x^2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) & = \cos x \end{cases}.$$

3. Rezolvați ecuația:

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 7\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

cu condițiile:

$$\begin{cases} u(x,0) & = x^3 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) & = 2x^2 \end{cases}.$$

Indicații pentru 2. și 3.: Aduceți ecuațiile la forma canonică și apoi verificați dacă vă aflați în unul dintre cazurile simple din §6.3, care se rezolvă simplu.

SEMINAR 7

REZOLVAREA EDP 2

7.1 Cazul coeficienților variabili

Ecuațiile cu derivate parțiale de ordinul al doilea, cu coeficienți variabili, se rezolvă similar celor cu coeficienți constanți. Vom prezenta două exemple.

Exemplu 1: Să se aducă la forma canonică ecuația:

$$(1+x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1+y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Soluție: Deoarece avem $AC - B^2 = (x^2+1)(y^2+1) > 0$, rezultă că ecuația este de tip eliptic.

Ecuația caracteristică este:

$$(1+x^2)dy^2 + (1+y^2)dx^2 = 0,$$

care înseamnă:

$$\sqrt{1+x^2}\,dy = \pm i\sqrt{1+y^2}\,dx.$$

Rezultă că familiile de curbe caracteristice sînt:

$$\begin{cases} \ln(y+\sqrt{1+y^2}) + i\ln(x+\sqrt{1+x^2}) & = c_1 \\ \ln(y+\sqrt{1+y^2}) - i\ln(x+\sqrt{1+x^2}) & = c_2 \end{cases}$$

În consecință, facem schimbarea de variabile:

$$\begin{cases} \tau & = \ln(y+\sqrt{1+y^2}) \\ \eta & = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) \end{cases}$$

Derivatele parțiale în funcție de noile variabile sînt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \cdot \frac{\partial u}{\partial \tau}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{1+y^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \frac{y}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\partial u}{\partial \tau}.$$

Rezultă că ecuația se reduce la forma canonică:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0.$$

Exemplu 2: Să se aducă la forma canonică și să se determine soluția generală a ecuației:

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Soluție: Deoarece $A = x^2, B = -xy, C = y^2$, avem $AC - B^2 = 0$, deci ecuația este de tip parabolic. Din ecuația caracteristică obținem:

$$x^2 \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2xy \cdot \frac{dy}{dx} + y^2 = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Longrightarrow xy = c.$$

Facem schimbarea de variabile:

$$\begin{cases} \tau & = xy \\ \eta & = x \end{cases}$$

și noile derivate parțiale sînt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = x \frac{\partial u}{\partial \tau}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + 2y \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial \tau} + xy \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + x \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial \eta}.$$

Atunci ecuația devine:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

Ea se poate rescrie și rezolva astfel:

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\eta \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0 \Longrightarrow \eta \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} = f(\tau) \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1}{\eta} f(\tau).$$

Integrăm în raport cu η și obținem, în final:

$$u(\tau, \eta) = f(\tau) \ln \eta + g(\tau) \Longrightarrow u(x, y) = f(xy) \ln x + g(xy).$$

În unele cazuri, poate fi necesară o discuție după x, y pentru tipul ecuației:
Exemplu 3: Fie ecuația:

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (x + y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Deoarece $A = y, B = \dfrac{x+y}{2}, C = x$, avem

$$\delta = AC - B^2 = \frac{-(x-y)^2}{4}$$

și studiem separat pentru:

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \delta < 0\}, \quad D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \delta = 0\},$$

care corespund, respectiv, cazurilor: *hiperbolic*, pentru $y \neq x$ și *eliptic*, pentru $y = x$.
Mai departe, ecuația se rezolvă cu metodele cunoscute, corespunzătoare celor două cazuri.

7.2 Coarda infinită. Metoda lui d'Alembert

Pornim de la ecuația coardei infinite, care constă în determinarea funcției $u(x, t)$, definită pentru $x \in \mathbb{R}$ și $t \geq 0$, soluție a ecuației coardei vibrante:

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \forall x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

Presupunem că avem condiții inițiale, astfel că problema devine o problemă Cauchy:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), \forall x \in \mathbb{R},$$

cu φ și ψ funcții date.

Cum ecuația este deja în forma canonică, asociem ecuația caracteristică:

$$a^2dt^2 - dx^2 = 0 \Longrightarrow \frac{dt}{dx} = \pm\frac{1}{a}.$$

Rezultă că familiile de curbe caracteristice sînt:

$$\begin{cases} x - at &= c_1 \\ x + at &= c_2 \end{cases}.$$

Facem schimbarea de variabile corespunzătoare:

$$\begin{cases} \tau &= x - at \\ \eta &= x + at \end{cases}$$

și rezultă ecuația în forma canonică, în noile variabile:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\tau\partial\eta} = 0.$$

Putem să o rezolvăm astfel:

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\tau}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial\tau} = f(\tau).$$

Acum putem integra în raport cu τ și găsim:

$$u(\tau,\eta) = \int f(\tau)d\tau + \theta_2(\eta) \Longleftrightarrow u(\tau,\eta) = \theta_1(\tau) + \theta_2(\eta).$$

Revenind la variabilele x, t, avem:

$$u(x,t) = \theta_1(x + at) + \theta_2(x - at)$$

și, folosind condițiile inițiale, avem:

$$\begin{cases} \theta_1(x) + \theta_2(x) &= \varphi(x) \\ a\theta_1'(x) - a\theta_2'(x) &= \psi(x) \end{cases}.$$

Integrăm a doua ecuație în raport cu x și obținem:

$$\begin{cases} \theta_1(x) + \theta_2(x) & = \varphi(x) \\ a\theta_1(x) - a\theta_2(x) = \int_0^x \psi(\alpha)d\alpha + c & \end{cases}$$

Adunăm egalitățile și găsim:

$$\theta_1(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(\alpha)d\alpha + \frac{c}{2a},$$

iar prin scădere, găsim:

$$\theta_2(x) = \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(\alpha)d\alpha - \frac{c}{2a}.$$

Revenind la variabilele inițiale, avem:

$$\begin{cases} \theta_1(x+at) &= \dfrac{\varphi(x+at)}{2} + \dfrac{1}{2a}\int_0^{x+at} \psi(\alpha)d\alpha + \dfrac{c}{2a} \\ \theta_2(x-at) &= \dfrac{\varphi(x-at)}{2} - \dfrac{1}{2a}\int_0^{x-at} \psi(\alpha)d\alpha - \dfrac{c}{2a} \end{cases}.$$

Putem asambla soluția finală în forma:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)\big] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)d\alpha, \tag{7.1}$$

care se numește **formula lui d'Alembert**.

Observaţie 7.1: Soluția problemei Cauchy asociată coardei vibrante există și este unică.

7.3 Coarda finită. Metoda separării variabilelor (*)

Pentru cazul lungimii finite a unei coarde, se folosește o metodă care este atribuită lui Fourier și utilizează dezvoltări în serie. Această metodă se numește *metoda separării variabilelor.*

Pornim cu o problemă Cauchy similară, doar că lungimea coardei este conținută într-un interval finit. Căutăm, deci, funcția $u(x,t)$, definită pentru $0 \le x \le l$ și $t \ge 0$, care satisface următoarele condiții:

$$\begin{cases} a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ u(x,0) &= \varphi(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= \psi(x) \\ u(0,t) &= u(l,t) = 0 \text{ (condiții la limită)} \end{cases}.$$

Metoda de separare a variabilelor constă în găsirea unui șir infinit de soluții de formă particulară, iar apoi, cu ajutorul acestora, formăm o serie ai cărei coeficienți se determină în ipoteza ca suma seriei să dea soluția problemei tratate.

Soluțiile particulare se caută în forma:

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

și cerem să satisfacă condițiile la limită:

$$\begin{cases} u(0,t) &= X(0)T(t) = 0 \\ u(l,t) &= X(l)T(t) = 0 \end{cases}$$

Rezultă că vrem $X(0) = X(l) = 0$. Altfel, am avea $T(t) = 0$, ceea ce ar conduce la soluția banală $u(x,t) = 0$.

Înlocuind în ecuația inițială, avem:

$$XT'' = a^2 X'' T \Longrightarrow \frac{1}{a^2}\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X}.$$

Să remarcăm că în membrul stîng, funcția depinde doar de variabila t, iar în membrul drept, doar de variabila x. Așadar, egalitatea nu poate avea loc decît dacă ambele funcții sînt egale cu o constantă. Pentru conveniență, o vom nota cu $-\lambda$. Obținem ecuațiile:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X & = 0 \\ T'' + a^2 \lambda T & = 0 \end{cases}$$

Prima dintre aceste ecuații este liniară, de ordinul al doilea, cu coeficienți constanți. Soluția se obține:

- Dacă $\lambda < 0$, atunci
  $$X(x) = c_1 e^{-\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x},$$
  iar ținînd seama de condițiile la limită, avem:
  $$\begin{cases} c_1 + c_2 & = 0 \\ c_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} & = 0 \end{cases},$$
  care se scrie echivalent:
  $$\begin{cases} c_1 + c_2 & = 0 \\ c_1 e^{2\sqrt{-\lambda}l} + c_2 & = 0 \end{cases}$$
  Determinantul matricei sistemului este nenul, deci el admite doar soluția banală.

- Dacă $\lambda = 0$, atunci $X(x) = c_1 x + c_2$ și, ținînd seama de condițiile la limită, obținem din nou soluția banală.

- Dacă $\lambda > 0$, soluția generală se scrie:
  $$X(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x.$$
  Din condițiile la limită, găsim:
  $$\begin{cases} X(0) & = c_1 = 0 \\ X(l) & = c_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases}$$
  Din a doua ecuație, deducem că $c_2 = 0$, care conduce la soluția banală, sau $\sin\sqrt{\lambda}l = 0$, care înseamnă $\lambda = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$. Putem scrie, atunci, soluția corespunzătoare acestei serii de valori în forma:
  $$X_n = c_n \sin\frac{n\pi}{l}x, \quad c_n \in \mathbb{R}.$$

Înlocuim și integrăm acum ecuația după t:

$$T'' + a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T = 0,$$

care are soluția generală:

$$T_n(t) = \alpha_n \cos\frac{n\pi}{l}at + \beta_n \sin\frac{n\pi}{l}at.$$

Punînd laolaltă soluția după x și pe cea după t, obținem:

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}at + b_n \sin\frac{n\pi}{l}at\right)\cdot \sin\frac{n\pi}{l}x, \tag{7.2}$$

unde a_n, b_n, c_n sînt constante ce provin din α_n, β_n, c_n.

Pentru a doua etapă a soluției, considerăm seria $\sum u_n(x,t)$, adică:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}at + b_n \sin\frac{n\pi}{l}at\right)\cdot \sin\frac{n\pi}{l}x.$$

Presupunem că există $u(x,t)$ suma seriei de mai sus, care este și soluția problemei Cauchy, deci satisface și condițiile la limită, adică:

$$\begin{cases} u(x,0) & = \sum_{n\geq 1} a_n \sin\frac{n\pi}{l}x = \varphi(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) & = \frac{n\pi}{l}a\sum_{n\geq 1} b_n \sin\frac{n\pi}{l}x = \psi(x) \end{cases}.$$

Putem privi aceste egalități ca dezvoltarea funcțiilor φ și ψ în serie Fourier de sinusuri. Rezultă că putem afla coeficienții:

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x dx \tag{7.3}$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x dx. \tag{7.4}$$

Observaţie 7.2: Calculele de mai sus, împreună cu rezultate din teoria seriilor Fourier, ne asigură că funcția $u(x,t)$ găsită este soluția problemei Cauchy.

7.4 Exerciții

1. Determinați soluția ecuației:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

care satisface condițiile:

$$\begin{cases} u(x,0) & = 3x^2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) & = \cos x \end{cases}.$$

Soluție: Cum $AC - B^2 = -4 < 0$, ecuația este de tip hiperbolic. Din ecuația caracteristică, obținem schimbarea de variabile:

$$\begin{cases} \tau & = -3x + y \\ \eta & = x + y \end{cases},$$

iar forma canonică este $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial \eta} = 0$, care are soluția:

$$u(\tau, \eta) = f(\tau) + g(\eta),$$

cu f, g funcții de clasă $\mathcal{C}^2$, arbitrare. Revenind la variabilele inițiale, avem:

$$u(x, y) = f(-3x + y) + g(x + y).$$

Ținînd seama de condițiile inițiale din problema Cauchy, obținem sistemul:

$$\begin{cases} f(-3x) + g(x) & = 3x^2 \\ f'(-3x) + g'(x) & = \cos x \end{cases}$$

Integrăm a doua ecuație și avem:

$$\begin{cases} f(-3x) + g(x) & = 3x^2 \\ -\dfrac{1}{3}f(-3x) + g(x) & = \sin x + c \end{cases}$$

și prin schimbarea semnului primei ecuații și adunîndu-le, obținem:

$$\begin{cases} f(-3x) & = \dfrac{9}{4}x^2 - \dfrac{3}{4}\sin x - \dfrac{3c}{4} \\ g(x) & = \dfrac{3}{4}x^2 + \dfrac{3}{4}\sin x + \dfrac{3c}{4} \end{cases}.$$

Dacă notăm $-3x = t$, atunci $x = -\dfrac{t}{3}$ și găsim:

$$f(t) = \frac{t^2}{4} + \frac{3}{4}\sin\frac{t}{3} - \frac{3c}{4}.$$

Așadar, soluția finală este:

$$\begin{cases} f(-3x + y) & = \dfrac{1}{4}(-3x + y)^2 + \dfrac{3}{4}\sin\dfrac{-3x + y}{3} - \dfrac{3c}{4} \\ g(x + y) & = \dfrac{3}{4}(x + y)^2 + \dfrac{3}{4}\sin(x + y) + \dfrac{3c}{4} \end{cases}.$$

Rezultă că soluția problemei Cauchy este:

$$u(x,y) = \frac{1}{4}(-3x+y)^2 + \frac{3}{4}\sin\frac{-3x+y}{3} + \frac{3}{4}(x+y)^2 + \frac{3}{4}\sin(x+y).$$

2. Rezolvați ecuația:

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 7\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

cu condițiile:

$$\begin{cases} u(x,0) & = x^3 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) & = 2x^2 \end{cases}.$$

Soluție: Ecuația este de tip hiperbolic, iar schimbarea de variabilă este:

$$\begin{cases} \tau & = 2x - y \\ \eta & = x - 3y \end{cases},$$

care conduce la forma canonică $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial \eta} = 0$, de unde rezultă soluția generală:

$$u(x,y) = \varphi(2x-y) + \psi(x-3y).$$

Din condițiile problemei Cauchy, obținem:

$$\begin{cases} \varphi(2x) + \psi(x) & = x^3 \\ -\varphi'(2x) - 3\psi'(x) & = 2x^2 \end{cases}.$$

Integrăm a doua relație și obținem:

$$-\frac{1}{2}\varphi(2x) - 3\psi(x) = \frac{2}{3}x^3 + k.$$

Atunci:

$$\begin{cases} \varphi(2x) & = \dfrac{19}{96}(2x)^3 + c_1 \\ \psi(x) & = -\dfrac{7}{12}x^3 - c_1 \end{cases},$$

de unde rezultă că soluția problemei Cauchy este:

$$u(x,y) = \frac{19}{96}(2x-y)^3 - \frac{7}{12}(x-3y)^3.$$

3. Rezolvați ecuația coardei vibrante infinite:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

cu condițiile inițiale:

$$\begin{cases} u(x,0) & = \dfrac{x}{1+x^2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) & = \sin x \end{cases}.$$

Soluție: Putem aplica direct formula lui d'Alembert (7.1):

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\left[\frac{x-t}{1+(x-t)^2} + \frac{x+t}{1+(x+t)^2}\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \sin y dy \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{x-t}{1+(x-t)^2} + \frac{x+t}{1+(x+t)^2}\right] - \frac{1}{2}[\cos(x+t) - \cos(x-t)] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{x-t}{1+(x-t)^2} + \frac{x+t}{1+(x+t)^2}\right] - \frac{1}{2}\left[-2\sin\frac{x+t+x-t}{2}\sin\frac{x+t-x+t}{2}\right] \\ &= \left[\frac{x-t}{1+(x-t)^2} + \frac{x+t}{1+(x+t)^2}\right] + \sin x \sin t. \end{aligned}$$

4(*). Determinați vibrațiile unei coarde de lungime l, avînd capetele fixate, dacă forma inițială a coardei este dată de funcția:

$$\varphi(x) = 4\left(x - \frac{x^2}{l}\right),$$

iar viteza inițială este 0.

Soluție: Aplicînd direct formula pentru coeficienții Fourier (7.3), avem $b_n = 0$, iar

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l 4\left(x - \frac{x^2}{l}\right)\sin\frac{n\pi}{l}x dx = \frac{8}{l}\int_0^l x\sin\frac{n\pi}{l}x dx - \frac{8}{l^2}\int_0^l x^2 \sin\frac{n\pi}{l}x dx.$$

Calculăm:

$$\int_0^l x\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx = -\frac{l}{n\pi}x\cos\frac{n\pi}{l}x\Big|_0^l + \frac{l}{n\pi}\int_0^l \cos\frac{n\pi}{l}x\,dx$$
$$= -\frac{l^2}{n\pi}(-1)^n + \frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{l}x\Big|_0^l$$
$$= (-1)^{n+1}\frac{l^2}{n\pi}.$$
$$\int_0^l x^2\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx = -\frac{l}{n\pi}x^2\cos\frac{n\pi}{l}x\Big|_0^l + \frac{2l}{n\pi}\int_0^l x\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx$$
$$= (-1)^{n+1}\frac{l^3}{n\pi} + \frac{2l}{n\pi}\left[\frac{l}{n\pi}x\sin\frac{n\pi}{l}x\Big|_0^l - \frac{l}{n\pi}\int_0^l \sin\frac{n\pi}{l}x\,dx\right]$$
$$= (-1)^{n+1}\frac{l^3}{n\pi} + \frac{2l}{n^3\pi^3}\cos\frac{n\pi}{l}x\Big|_0^l$$
$$= (-1)^{n+1}\frac{l^3}{n\pi} + \frac{2l}{n^3\pi^3}[(-1)^n+1].$$

Așadar:

$$a_n = (-1)^{n+1}\frac{8l}{n\pi} - (-1)^{n+1}\frac{8l}{n\pi} - \frac{16}{n^3\pi^3}[(-1)^n - 1],$$

de unde obținem $a_{2n} = 0$, $a_{2n+1} = \dfrac{32l}{(2n+1)^3\pi^3}$.

Punem laolaltă coeficienții și obținem soluția:

$$u(x,t) = \frac{32l}{\pi^3}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^3}\cos\frac{(2n+1)\pi}{l}t\cdot\sin\frac{(2n+1)\pi}{l}x.$$

5(*). Rezolvați problema Cauchy asupra coardei vibrante finite:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, t > 0,$$

cu condițiile inițiale și la limită:

$$\begin{cases} u(x,0) & = \sin 3x - 4\sin 10x \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) & = 2\sin 4x + \sin 6x, 0 \leq x \leq \pi \\ u(0,t) & = u(\pi,t) = 0, t \geq 0 \end{cases}.$$

Soluție: Determinăm coeficienții din seria Fourier:

$$u(x,0) = \sin 3x - 4\sin 10x \Rightarrow \sum a_n \sin nx = \sin 3x - 4\sin 10x.$$

Egalînd coeficienții, obținem $a_3 = 1$, $a_{10} = -4$, $a_n = 0$ în rest.

Mai departe:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 2\sin 4x + \sin 6x \Longrightarrow \sum 2nb_n \sin nx = 2\sin 4x + \sin 6x.$$

Egalînd coeficienții, avem: $b_4 = \dfrac{1}{4}$, $b_6 = \dfrac{1}{12}$, $b_n = 0$ în rest.

Rezultă:

$$u(x,t) = \cos 6t \sin 3x - 4\cos 20t \sin 10x + \frac{1}{4}\sin 8t \sin 4x + \frac{1}{12}\sin 12t \sin 6x.$$

6(*). Aceeași cerință pentru:

(a)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 \le x \le \pi, t \ge 0,$$

cu condițiile inițiale și la limită:

$$\begin{cases} u(x,0) & = \sin x \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) & = \sin x \\ u(0,t) & = u(\pi,t) = 0 \end{cases}.$$

(b)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \le x \le 1, t \ge 0$$

cu condițiile inițiale și la limită:

$$\begin{cases} u(x,0) & = x(1-x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) & = 0 \\ u(0,t) & = u(1,t) = 0 \end{cases}.$$

(c)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, 0 \le x \le \pi, t \ge 0$$

cu condițiile inițiale și la limită:

$$\begin{cases} u(x,0) & = \sin 3x - 4\sin 10x \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) & = 2\sin 4x + \sin 6x \\ u(0,t) & = u(\pi,t) = 0 \end{cases}.$$

7. Să se determine soluția problemei Cauchy:

$$u_{xx} - \frac{1}{4}u_{tt} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0,$$

cu condițiile inițiale:

$$u(x, 0) = e^x, \quad u_t(x, 0) = 4x.$$

Indicație: Metoda 1: Putem folosi direct formula lui D'Alembert. Avem $a = 2, f(x) = e^x, g(x) = 4x$, deci soluția se obține direct:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\left(e^{x-2t} + e^{x+2t}\right) + \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} 4\alpha d\alpha.$$

Metoda 2: Alternativ, putem folosi rezolvarea directă. Scriem ecuația atașată pentru $t = t(x)$, care ne conduce la substituțiile:

$$\tau = x - 2t, \quad \eta = x + 2t.$$

Forma canonică este $u_{\tau\eta} = 0$, a cărei soluție generală este:

$$u(\tau, \eta) = f(\tau) + g(\eta).$$

Folosim acum condițiile inițiale și determinăm f și g, ca funcții de x și t.

8. Rezolvați problema Cauchy:

$$u_{xx} - \frac{1}{a^2}u_{tt} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0,$$

cu condițiile inițiale:

$$u(x, 0) = \cos x, \quad u_t(x, 0) = 1.$$

SEMINAR 8

RECAPITULARE

1. Rezolvați ecuațiile diferențiale de ordin superior:

(a) $(1-y)y'' + 2y'^2 = 0$;

(b) $yy'' - y'^2 = 0$;

(c) $(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 0$, știind că are soluție particulară un polinom de gradul întîi;

(d) $y'' + y = x\cos x$;

(e) $(x-2)^2 y'' - 3(x-2)y' + 4y = x, \quad x > 2$;

Indicații:

(a) Ecuația se poate rescrie ca:

$$\frac{y''}{y'} = \frac{2y'}{y-1},$$

pe care o putem integra direct și obținem:

$$\ln|y'| = 2\ln|y-1| + \ln c.$$

Apoi separăm y' și mai integrăm o dată pentru a obține pe y.

(b) Ecuația se poate rescrie:

$$\frac{y''}{y'} = \frac{y'}{y}.$$

Putem integra direct și obținem:

$$\ln|y'| = \ln|y| + \ln c,$$

de unde calculăm y.

(c) Putem deriva direct ecuația inițială și rezultă imediat $y''' = 0$, de unde y este un polinom de gradul al doilea în raport cu x.

Înlocuind în ecuația dată, găsim legături între coeficienții polinomului.

Cît despre soluția particulară ca polinom de gradul întîi, fie $y_p(x) = ax + b$. Înlocuind în ecuație, obținem că $a \neq 0$ și $b = 0$.

(d) Ecuație de ordin superior, cu ecuația algebrică asociată $r^2 + 1 = 0$ etc.

(e) Ecuație Euler, cu schimbarea de variabilă $a = x - 2$, apoi $a = e^t$ etc.

2. Rezolvați sistemele de ecuații diferențiale:

(a) $\begin{cases} y' & = -2z + 1 \\ x^2 z' & = -2y + x^2 \ln x \end{cases}$, cu $y = y(x), z = z(x)$.

(b) $\begin{cases} x' & = x + 3y \\ y' & = -x + 5y - 2e^t \end{cases}$, cu condițiile inițiale $x(0) = 3, y(0) = 1$.

Indicații:

(a) Derivăm prima ecuație din nou și obținem $z' = -y''$. Înlocuim în a doua ecuație și rezultă o ecuație Euler pentru y, pe care o rezolvăm și revenim și calculăm $z(x)$.

(b) Se aplică metoda substituției și se ajunge la o ecuație de ordin superior, neomogenă.

3. Fie cîmpul vectorial:

$$\vec{V} = (x + y)\vec{i} + (y - x)\vec{j} - 2z\vec{k}.$$

Să se determine:

(a) liniile de cîmp;

(b) linia de cîmp ce conține punctul $M(1, 0, 1)$;

(c) suprafețele de cîmp;

(d) suprafața de cîmp care conține dreapta $z = 1, y - x\sqrt{3} = 0$.

Indicații:

(a) Sistemul caracteristic asociat este:

$$\frac{dx}{x+y} = \frac{dy}{y-x} = \frac{dz}{-2z}.$$

Din primele două, rezultă:

$$\frac{xdx + ydy}{x^2+y^2} = \frac{dz}{-2z} \Longrightarrow z(x^2+y^2) = c_1.$$

Tot din primele rapoarte obținem:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{x+y}.$$

Dacă notăm $y' = \dfrac{dy}{dx}$, putem rezolva fie ca pe o ecuație liniară de ordinul întîi, anume:

$$y'(x+y) - y = x$$

sau putem face substituția $y = tx$. Rezultă:

$$x\frac{dt}{dx} + t = \frac{t-1}{t+1} \Longleftrightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{t+1}{t^2+1}dt \Longrightarrow \ln(x^2+y^2) + 2\arctan\frac{y}{x} = c_2.$$

Deci liniile de cîmp sînt date de:

$$\begin{cases} (x^2+y^2)z & = c_1 \\ \ln(x^2+y^2) + 2\arctan\dfrac{y}{x} & = c_2 \end{cases}.$$

(b) Folosind condiția ca punctul $M(1,0,1)$ să se găsească pe linia de cîmp, găsim condiția de compatibilitate a sistemului de mai sus $c_1 = c_2 = 0$.

(c) Ecuația suprafeței de cîmp este dată de:

$$\Phi\left((x^2+y^2)z, \ln(x^2+y^2) + 2\arctan\frac{y}{x}\right) = 0.$$

(d) Pentru condiția ca suprafața de cîmp să conțină dreapta $z = 1, y - \sqrt{3}x = 0$, avem sistemul:

$$\begin{cases} (x^2+y^2)z & = c_1 \\ \ln(x^2+y^2) + 2\arctan\dfrac{y}{x} & = c_2 \\ z & = 1 \\ y - x\sqrt{3} & = 0 \end{cases}.$$

Înlocuim pe x, y, z în funcție de constante în ecuația a doua și rezultă:

$$\ln c_1 + 2 \arctan \sqrt{3} = c_2.$$

Pentru a afla suprafața, din prima ecuație avem:

$$\ln(x^2 + y^2) + \ln z = \ln c_1.$$

Atunci a doua ecuație devine:

$$\ln(x^2 + y^2) + 2 \arctan \frac{y}{x} = c_2 = \ln c_1 + \frac{2\pi}{3} \Longrightarrow -\ln z = 2\left(\arctan \frac{y}{x} - \frac{2\pi}{3} \right),$$

de unde se obține $z(x, y)$, ecuația suprafeței căutate.

4. Rezolvați ecuația cu derivate parțiale de ordinul întîi, cvasiliniară:

$$(1 + \sqrt{z - x - y}) z_x + z_y = 2.$$

Indicație: Se caută o soluție implicită sub forma $u = u(x, y, z) = 0$, se calculează noile derivate parțiale și se ajunge la sistemul caracteristic de forma:

$$\frac{dx}{1 + \sqrt{z - x - y}} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{2}.$$

Ultimele două rapoarte dau $z - 2y = c_1$ și, prin scădere, obținem:

$$dy = \frac{dz - dx - dy}{-\sqrt{z - x - y}},$$

care poate fi integrată pentru a obține $y + 2\sqrt{z - x - y} = c_2$.

Rezultă soluția generală sub forma implicită:

$$\Phi(z - 2y, y + 2\sqrt{z - x - y}) = 0.$$

5. Aduceți la forma canonică ecuațiile liniare cu coeficienți constanți:

(a) $4u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} - 2u_y = 0$;

(b) $u_{xx} - 6u_{xy} + 10u_{yy} + u_x - 3u_y = 0$;

(c) $2u_{xx} - 7u_{xy} + 3u_{yy} = 0$.

Indicații:

(a) Ecuația este parabolică. Noile derivate parțiale sînt:

$$\begin{aligned} u_y &= -2u_\tau \\ u_{xx} &= u_{\tau\tau} + 2u_{\tau\eta} + 2_{\eta\eta} \\ u_{yy} &= 4u_{\tau\tau} \\ u_{xy} &= -2u_{\tau\tau} - 2u_{\tau\eta}. \end{aligned}$$

Forma canonică rezultă $u_{\eta\eta} + u_\tau = 0$.

(b) Ecuația este de tip eliptic. Noile derivate parțiale sînt:

$$\begin{aligned} u_x &= 3u_\tau + u_\eta \\ u_y &= u_\tau \\ u_{xx} &= 9u_{\tau\tau} + 6u_{\tau\eta} + u_{\eta\eta} \\ u_{xy} &= 3u_{\tau\tau} + u_{\tau\eta} \\ u_{yy} &= u_{\tau\tau}. \end{aligned}$$

Forma canonică rezultă: $u_{\tau\tau} + u_{\eta\eta} + u_\eta = 0$.

(c) Ecuația este de tip hiperbolic. Noile derivate parțiale sînt:

$$\begin{aligned} u_{xx} &= 9u_{\tau\tau} + 6u_{\tau\eta} + u_{\eta\eta} \\ u_{xy} &= 3u_{\tau\tau} + 7u_{\tau\eta} + 2u_{\eta\eta} \\ u_{yy} &= u_{\tau\tau} + 4u_{\tau\eta} + 4u_{\eta\eta}. \end{aligned}$$

Forma canonică rezultă a fi $u_{\tau\eta} = 0$.

6. Rezolvați ecuația:

$$u_{tt} - 9u_{xx} = 0,$$

cu condițiile inițiale $u(x,0) = x^2$, $u_t(x,0) = 3x^2$.

Indicație: Avem $a = 3$ și putem aplica metoda lui D'Alembert pentru coarda vibrantă infinită.

7. Rezolvați următoarele ecuații cu derivate parțiale de ordinul al doilea:

(a) $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0$, cu condițiile $u(x,0) = 0$, $u_y(x,0) = x + \cos x$

(b) $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = 0$, cu condițiile $u(1,y) = y^2$, $u_x(1,y) = y^2 + y$;

(c) $u_{tt} = 4u_{xx}$, cu condițiile $u(x, 0) = 2x$, $u_t(x, 0) = e^x \cos x$;

(d) $u_{tt} = u_{xx}$, cu condițiile $u(x, 0) = x^2$, $u_t(x, 0) = 0$.

Indicații:

(a) Ecuație hiperbolică. Cum $D = 0$, se poate scrie direct forma canonică, dar mai determinăm și substituțiile care trebuie făcute (τ și η).

(b) Ecuație parabolică, cu $D = 0$.

(c) Formula lui D'Alembert sau calcul direct.

(d) Formula lui D'Alembert sau calcul direct.

SEMINAR 9

NUMERE ȘI FUNCȚII COMPLEXE — RECAPITULARE

9.1 Numere complexe – Noțiuni de bază

Începem cu cîteva noțiuni esențiale și recapitulative privitoare la mulțimea numerelor complexe. Amintim definiția:

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\},$$

precum și faptul că avem, în general, șirul de incluziuni:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}.$$

Dat un număr complex $z = a + bi$, se numește *partea reală*, notată $\mathrm{Re}(z)$, numărul real a, iar *partea imaginară*, notată $\mathrm{Im}(z)$, numărul real b.

De asemenea, *conjugatul* numărului complex z de mai sus este $\overline{z} = z^* = a - bi$, iar *modulul* numărului complex z este $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Există mai multe forme de reprezentare a numerelor complexe:

- *forma algebrică*, dată mai sus, $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$;
- *forma trigonometrică*, $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, unde $r = |z|$, iar $\theta = \mathrm{Arg}(z)$ se numește *argumentul principal*;
- *forma polară*, $z = re^{i\theta} = r\exp(i\theta)$, unde r și θ au înțelesul din forma trigonometrică;
- *forma geometrică*, în care $z = a + bi$ reprezintă *afixul* punctului din plan $A(a, b)$. Pentru acest caz, menționăm că $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ reprezintă lungimea vectorului de poziție al punctului A, iar θ reprezintă unghiul pe care îl face acest vector de poziție cu axa OX, măsurat în sens trigonometric.

Operațiile cu numere complexe se fac în modul uzual, ținînd seama de proprietatea $i^2 = -1$. Mai amintim *formula lui Moivre*, utilă în special atunci cînd numărul complex a fost scris sub formă trigonometrică. Fie, așadar, numerele complexe:

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), \quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2).$$

Atunci înmulțirea acestora se face cu formula:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right),$$

formulă care se generalizează ușor în forma:

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)), \forall n.$$

Tot folosind numere complexe, putem reprezenta și curbe:

- *Cercul* centrat în punctul de afix z_0 și de rază R are ecuația:

$$|z - z_0| = r;$$

- *Elipsa* cu focarele în punctele de afixe z_0 și w_0, iar axa mare are lungimea d are ecuația:

$$|z - z_0| + |z - w_0| = d.$$

Amintim și *formele canonice* ale ecuațiilor acestor conice:

- *Cercul* centrat în (x_0, y_0) și de rază R are ecuația:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2;$$

- *Elipsa* de semiaxe a, b are ecuația:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Tot din punct de vedere geometric, mai amintim și că *distanța* între două puncte $A(z)$ și $B(w)$ este $AB = |z - w|$.

9.2 Funcții complexe elementare

Cea mai simplă funcție complexă este *funcția exponențială*, definită prin:

$$\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \exp z = e^z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}.$$

Se observă imediat că au loc proprietățile așteptate:

- $\exp(0) = 1$;
- $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2), \forall z_{1,2} \in \mathbb{C}$;
- $\exp(iy) = \cos y + i \sin y, \forall y \in \mathbb{R}$ (formula lui Euler).

Mai departe, putem calcula simplu *logaritmul complex*, dacă numărul complex a fost adus în forma polară. Fie, așadar, $z = re^{i\theta}$. Rezultă:

$$\ln z = \ln r + i\theta.$$

În general, cum argumentul unui număr complex nu este unic (θ de mai sus reprezintă *argumentul principal*, dar $\theta + 2k\pi$ este argumentul general), spunem că funcția logaritm este *multiformă*, deoarece valoarea ei generală este:

$$\mathrm{Ln} z = \{\ln |z| + i(\mathrm{Arg} z + 2k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

iar $\ln z$ se numește *valoarea principală* a logaritmului.

Funcția putere se definește acum simplu pornind de la formula:

$$a^b = \exp\left(b \ln a\right).$$

Rezultă:

$$z^m = \exp\left(m \ln z\right) = \exp\left(m(\ln |z| + i\mathrm{Arg} z)\right),$$

folosind valoarea principală.

Similar se definește și puterea rațională, adică *funcția radical*:

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln z\right).$$

Folosind funcțiile exponențiale și identitatea lui Euler, putem defini și *funcții trigonometrice complexe:*

$$\cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}$$
$$\sin z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}$$
$$\tan z = -i\frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{\exp(iz) + \exp(-iz)}$$

Mai avem nevoie și de *funcțiile trigonometrice hiperbolice*:

$$\sinh z = \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}$$
$$\cosh z = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2}$$
$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}$$

și au loc legăturile:

$$\sinh z = -i \sin(iz), \quad \cosh z = \cos(iz).$$

Funcțiile trigonometrice inverse se pot obține din rezolvarea unor ecuații trigonometrice[1]:

$$w = \mathrm{arcsin} z \Longrightarrow z = \sin w \Longrightarrow z = \frac{\exp(iw) - \exp(-iw)}{2i} \Longleftrightarrow \exp(2iw) - 2iz \exp(iw) - 1 = 0,$$

care se rezolvă (pentru w) ca o ecuație de gradul al doilea și se obține:

$$w = \mathrm{arcsin} z = -i \ln(iz \pm \sqrt{1 - z^2})$$

și se procedează similar pentru arccos și arctan.

9.3 Funcții olomorfe

Fie o funcție complexă oarecare $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$, cu $A \subseteq \mathbb{C}$. Pentru orice $z \in A \subseteq \mathbb{C}$, deoarece z are o parte reală și o parte imaginară, și imaginea sa prin f se poate separa. Deci, în general, orice funcție complexă f ca mai sus poate fi scrisă sub forma

$$f = P + iQ, \quad P, Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Rezultă că noțiunile de *limită, continuitate, derivabilitate* pot fi puse pe componente.

Definiție 9.1: O funcție complexă $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ se numește *olomorfă* dacă este derivabilă în orice punct din domeniul de definiție.

Nu intrăm în detalii, deoarece nu vom rezolva exerciții cu derivate complexe.

Vor fi foarte importante, însă, rezultatele:

Teoremă 9.1: *Funcție $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, f = P + iQ$ este olomorfă dacă $P, Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt diferențiabile, iar derivatele lor parțiale verifică* condițiile Cauchy-Riemann, *adică:*

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}.$$

[1]Pentru corectitudine, ar trebui să notăm funcțiile trigonometrice cu inițială mare, Arcsin, Arccos etc. Dar vom folosi de fiecare dată doar valoarea principală, astfel că, prin abuz de notație, folosim scrierea din cazul real. Însă trebuie reținut că majoritatea funcțiilor complexe sînt *multiforme*, i.e. pot avea mai multe valori!

Observaţie 9.1: Pentru simplitate, vom mai nota derivatele parțiale cu indici, adică, de exemplu:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \stackrel{\text{not.}}{=} f_x$$

și similar $f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}$ etc.

Corola 9.1: *Dacă funcția complexă $f = P + iQ$ este olomorfă, atunci P și Q sînt armonice, adică:*

$$\Delta P = P_{xx} + P_{yy} = \Delta Q = Q_{xx} + Q_{yy} = 0.$$

Atenție, însă, la formularea rezultatului: condiția de olomorfie este *necesară*, în niciun caz suficientă! Negarea corolarului de mai sus este:

Corola 9.2: *Dacă una dintre funcțiile P sau Q nu este armonică, atunci funcția $f = P + iQ$ nu poate fi olomorfă.*

9.4 Exerciții

1. Verificați dacă funcția de mai jos este olomorfă:

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = z^2 + \exp(iz).$$

Indicație: Se separă partea reală și partea imaginară a funcției și se verifică condițiile Cauchy-Riemann și faptul că cele două componente sînt armonice.

2. Fie $P(x, y) = e^{2x} \cos 2y + y^2 - x^2$. Determinați funcția olomorfă $f = P + iQ$ astfel încît $f(0) = 1$.

Indicație: Verificăm dacă $\Delta P = 0$ (condiție necesară!). Apoi, prin integrarea condițiilor Cauchy-Riemann, se obține componenta Q. În final, $f(z) = e^{2z} - z^2 + ki, k \in \mathbb{C}$ și folosind condiția din enunț, obținem $k = 0$.

3. Rezolvați ecuațiile:

(a) $\exp w = -2i$;

(b) $z^3 + 2 - 2i = 0$;

(c) $\sin z = 2$.

4. Calculați:

(a) $\sin(1 + i)$;

(b) $\sinh(1 - i)$;

(c) $\ln i$;

(d) $\ln(1 - i)$;

(e) $(1 + i)^{20}$;

(f) $\sqrt[5]{1 - i}$;

(g) $\arcsin(i\sqrt{3})$;

(h) $\arccos(i\sqrt{3})$;

(i) $\tan(1 - i)$.

5. Determinați funcția olomorfă $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$, pentru:

(a) $P(x, y) = x^2 - y^2 - 2y$, știind că $f(0) = 1$;

(b) $P(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$, știind că $f(1) = 1$;

(c) $P(x, y) = (x \cos y - y \sin y)e^x$;

(d) $P(x, y) = xy + x + 2y$, știind că $f(2i) = -1 + 5i$;

(e) $P(x, y) = 4xy^3 - 4x^3y + x$, știind că $f(1 + i) = 5 + 4i$;

(f) $P(x, y) = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$;

(g) $P(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^2$;

(h) $Q(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$.

6. Scrieți sub formă trigonometrică și polară numerele complexe și reprezentați-le grafic:

(a) $z = 3 - i$;

(b) $z = 3 + i$;

(c) $z = i$;

(d) $z = 1$;

(e) $z = 1 + 2i$;

(f) $z = 2 + i$.

7. Găsiți forma canonică și ecuația complexă pentru:

(a) Cercul centrat în $(0, 1)$ și cu raza 2;

(b) Cercul centrat în $(1, 0)$ și cu raza 1;

(c) Cercul centrat în $(1, 2)$ și cu raza 1;

(d) Elipsa cu focarele în $(-1, 0)$ și $(3, 0)$ și cu axa mare de lungime 6;

(e) Elipsa cu focarele în $(0, 1)$ și $(0, -2)$ și cu axa mare de lungime 5.

Reprezentați grafic fiecare dintre cazurile de mai sus.

8. Fie punctele $A(1 + 2i)$ și $B(-1)$, iar M, mijlocul segmentului $[AB]$. Calculați distanța de la punctul M la punctul N, de afix $-2 + 3i$. Reprezentare grafică.

Observație: De data aceasta, pentru temă NU mai este suficient să rezolvați un singur subpunct de la un exercițiu, cel puțin nu pentru toate exercițiile. Astfel, tema poate conține oricare dintre variantele de mai jos:

- exercițiul 1;
- exercițiul 2;
- un subpunct de la exercițiul 3 și unul de la exercițiul 4;
- două subpuncte care folosesc funcții diferite de la exercițiul 4 (exemple: c și f, g și e, a și f etc.);
- un subpunct de la exercițiul 5;
- un subpunct de la exercițiul 6 și un subpunct de la exercițiul 7;
- un subpunct de la exercițiul 7 și exercițiul 8.

Temă specială: Propun și o temă specială pentru această lecție. Alegeți un subiect din cartea lui Paul Nahin despre istoria numerelor complexe și faceți un clip în care să îl prezentați. Detalii și cerințe:

- puteți alege orice subiect din carte, DAR trebuie să mă anunțați cînd ați ales prin email și să-l validez eu;
- după validare, aveți maximum 2 săptămîni la dispoziție;
- videoclipul trebuie să dureze minimum 10 minute;
- conținutul matematic sofisticat nu este obligatoriu; puteți insista pe aspecte istorice;
- puteți folosi și alte surse, dar subiectul să fie legat de istoria descoperirilor și aplicațiilor numerelor complexe;
- dacă nu știți ce subiect să alegeți, scrieți-mi și vi-l propun eu.

Punctaje:

- **video ≥ 10 minute = 5 puncte de seminar și ≥ 5, ≤ 10 puncte la examenul final;**
- **eseu ≥ 5 pagini = 5 puncte de seminar;**
- **video + eseu = 8 puncte la seminar și ≥ 5, ≤ 10 puncte la examenul final**[2]**.**

[2]Asta înseamnă că *sigur* rotunjim în sus de la o notă $x, 5$ și, în funcție de cum vă descurcați la examen, *este posibil* să rotunjim chiar și de la $x, 2$ sau $x, 3$ sau $x, 4$.

SEMINAR 10

INTEGRALE COMPLEXE

10.1 Teorema lui Cauchy

În multe situații, putem calcula integralele complexe direct, într-o manieră asemănătoare cu integralele curbilinii. Un exemplu simplu:

$$I_1 = \int_{|z|=1} z|dz|.$$

Folosind forma polară, $z = e^{it}$, deoarece integrala se face pe $|z| = 1$, iar $t \in [0, 2\pi]$. Rezultă $dz = ie^{it}dt$, deci $|dz| = dt$. Atunci:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} e^{it}dt = \frac{1}{i}e^{it}\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Un alt exemplu:

$$I_2 = \int_S z|dz|,$$

unde S este segmentul care unește pe 0 și i. Putem parametriza acest segment: $S : z = ti, t \in [0, 1]$, deci $dz = idt$ și din nou $|dz| = dt$. Rezultă:

$$I_2 = \int_0^1 tidt = \frac{1}{2}.$$

Dar în unele situații, putem calcula chiar mai ușor:

Teoremă 10.1 (Cauchy)**:** *Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu simplu conex și $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ o funcție olomorfă pe D, cu $P = \mathrm{Re}f$ și $Q = \mathrm{Im}f$, funcții de clasă $\mathcal{C}^1(D)$.*

Fie $\gamma : [a, b] \longrightarrow D$ o curbă închisă și jordaniană (fără autointersecții) de clasă $\mathcal{C}^1$ pe porțiuni, astfel încît $\mathrm{Int}\gamma$ *să verifice condițiile formulei Green-Riemann.*

Atunci $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 0.$

Acesta este un caz simplu în care calculul se termină imediat cu rezultat nul.

În exerciții, vom folosi adesea următoarea:

Teoremă 10.2 (Formula integrală Cauchy)**:** *Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu și $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ o funcție olomorfă pe D. Fie $\overline{\Delta} \subseteq D$, unde Δ este un domeniu simplu conex, mărginit, cu frontiera γ, care este o curbă închisă, jordaniană, de clasă $\mathcal{C}^1$ pe porțiuni, orientată pozitiv.*

Atunci pentru orice $a \in \Delta$ fixat are loc:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}dz.$$

Principala aplicație a acestei teoreme este să ne ajute să calculăm integrale pe domenii în interiorul cărora funcția pe care o integrăm are probleme. Un exemplu:

$$\int_{|z-2i|=1} \frac{1}{z^2+4}dz.$$

Observăm că $z = 2i$ este un punct cu probleme pentru funcția considerată și aplicăm formula integrală Cauchy.

Putem rescrie integrala astfel, izolînd punctul cu probleme:

$$\int_{|z-2i|=1} \frac{1}{z^2+4}dz = \int_{|z-2i|=1} \frac{\frac{1}{z+2i}}{z-2i}dz = \frac{f(z)}{z-2i}dz,$$

unde am introdus exact funcția cu probleme, adică $f(z) = \dfrac{1}{z+2i}$.

Aplicăm formula integrală Cauchy și obținem:

$$f(2i) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-2i|=1} \frac{f(z)}{z-2i}dz \Longrightarrow \int_{|z-2i|=1} \frac{f(z)}{z-2i}dz = 2\pi i f(2i) = \frac{\pi}{2}.$$

Vor exista situații cînd punctul izolat nu poate fi eliminat atît de ușor (sau chiar deloc), cazuri în care vom aplica un rezultat fundamental, *teorema reziduurilor.*

10.2 Exerciții

1. Calculați integrala $\displaystyle\int_\Gamma z^2 dz$, unde:

(a) $\Gamma = [-1, i] \cup [i, 1]$;

(b) $\Gamma = \{z(t) = 2 + it^2 \mid 0 \leq t \leq 1\}$;

(c) $\Gamma = \{z(t) = t + i \cos \dfrac{\pi t}{2} \mid -1 \leq t \leq 1\}$;

(d) $\Gamma = OA$, cu $O(0, 0)$ și $A(2, 1)$.

Indicații: Se parametrizează drumurile și se calculează ca în exemplele de mai sus.

2. Folosind teorema Cauchy sau formula integrală Cauchy, calculați:

(a) $\displaystyle\int_{|z-1|=3} z^4 dz$;

(b) $\displaystyle\int_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2 - 6z + 5} dz$;

(c) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z(z-2)} dz$;

(d) $\displaystyle\int_{\Gamma} \frac{\exp(z^2)}{z^2 - 6z} dz$, unde $\Gamma : |z - 2| = r, r \in \{1, 3, 5\}$;

(e) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\exp(3z)}{z^4} dz$;

(f) $\displaystyle\int_{|z-i|=1} \frac{1}{(z^2 + 1)^2} dz$;

(g) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2(z-2)} dz$.

Indicații: Ideea de bază este să identificăm punctele cu probleme ale funcțiilor de integrat în interiorul domeniilor pe care integrăm, apoi să descompunem integrandul cu o funcție căreia i se poate aplica teorema Cauchy.

(a) funcția z^4 este olomorfă, deci integrala este nulă;

(b) avem $\dfrac{\cos z}{(z-1)(z-5)}$, dar singurul punct cu probleme din interiorul domeniului este $z_1 = 1$. Definim $f(z) = \dfrac{\cos z}{z - 5}$, iar integrala devine $\displaystyle\int_{|z|=4} \frac{f(z)}{z-1} dz$, care se calculează cu formula Cauchy.

(c) pentru $r = 1$, funcția este olomorfă, deci integrala este nulă. Pentru $r = 3$, $z = 0$ este punct cu probleme, deci definim $f(z) = \dfrac{\exp(z^2)}{z - 6}$.

10.3 Teorema reziduurilor

Similar cu orice funcție reală, și funcțiile complexe pot fi dezvoltate în serii de puteri. În cazul complex, seriile se numesc *serii Laurent* și pot conține și puteri negative.

Informal, punctele cu probleme care ne interesează se numesc *poli* sau *puncte singulare*. Ordinul unui pol $z = a$ este multiplicitatea algebrică a rădăcinii $z = a$ în dezvoltarea în serie Laurent a funcției f. În particular, avem *poli simpli, dubli* etc.

Definiție 10.1: Fie $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ o funcție complexă și dezvoltarea sa în serie Laurent în jurul unui punct $z_0 \in \mathbb{C}$:

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z - z_0)^n, \quad a_n \in \mathbb{R}.$$

Se numește *reziduul* funcției f în punctul singular z_0 coeficientul a_{-1} din dezvoltarea de mai sus, notat $\text{Rez}(f, z_0)$.

Următoarea teoremă ne dă metode de calcul al reziduurilor, în funcție de multiplicitatea lor:

Teoremă 10.3 (Calculul reziduurilor)**:** *(1)* $\text{Rez}(f, a) = c_{-1}$, *unde* c_{-1} *este coeficientul lui* $\dfrac{1}{z-a}$ *în dezvoltarea în serie Laurent a funcției* f *în vecinătatea singularității* $z = a$.

(2) Dacă $z = a$ *este pol de ordinul* $p \geq 2$ *pentru* f, *atunci:*

$$\text{Rez}(f, a) = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z\to a} \left[(z-a)^p f(z)\right]^{(p-1)};$$

(3) Dacă $z = a$ *este pol simplu pentru* f, *atunci, particularizînd formula de mai sus, avem:*

$$\text{Rez}(f, a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z);$$

(4) Dacă f *se poate scrie ca un cît de funcții,* $f = \dfrac{A}{B}$, *olomorfe în jurul lui* a *și dacă* $z = a$ *este pol simplu pentru* f, *adică* $B(a) = 0$, *atunci:*

$$\text{Rez}(f, a) = \lim_{z\to a} \frac{A(z)}{B'(z)}.$$

Rezultatul esențial al acestei secțiuni ne arată că, dacă integrăm o funcție cu probleme, valoarea integralei este dată în mod esențial de reziduurile sale:

Teoremă 10.4 (Teorema reziduurilor)**:** *Fie* $D \subseteq \mathbb{C}$ *un domeniu și* $f : D - \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \longrightarrow \mathbb{C}$ *o funcție olomorfă pentru care* α_i *sînt poli.*

Fie $K \subseteq D$ *un compact cu frontiera* $\Gamma = \partial K$, *o curbă de clasă* $\mathcal{C}^1$, *jordaniană, orientată pozitiv și care conține toate* α_i *în interior. Atunci:*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \text{Rez}(f, \alpha_j).$$

De exemplu, să calculăm integrala:

$$I = \int_{|z|=r} \frac{e^z}{(z-i)(z-2)} dz, r > 0, r \neq 1, 2.$$

Soluție: Dacă $0 < r < 1$, putem aplica teorema lui Cauchy (10.1) și găsim $I = 0$.
Dacă $1 < r < 2$, aplicăm formula integrală a lui Cauchy (10.2) și găsim:

$$\int_{|z|=r} \frac{e^z}{(z-i)(z-2)} dz = \int_{|z|=r} \frac{\frac{e^z}{z-2}}{z-i} dz = \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z-i} dz,$$

unde $f(z) = \dfrac{e^z}{z-2}$. Rezultă:

$$\int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z-i} dz = 2\pi i f(i) = 2\pi i \frac{e^i}{i-2}.$$

Dacă $r > 2$, aplicăm teorema reziduurilor, cu i și 2 poli simpli. Avem:

$$\begin{aligned} \text{Rez}(f, i) &= \lim_{z \to i} (z-i) \frac{e^z}{(z-i)(z-2)} = \frac{e^i}{i-2} \\ \text{Rez}(f, 2) &= \lim_{z \to 2} \frac{e^z}{(z-i)(z-2)} = \frac{e^2}{2-i}. \end{aligned}$$

Rezultă, din teorema reziduurilor:

$$\int_{|z|=r} \frac{e^z}{(z-i)(z-2)} dz = 2\pi i \left(\frac{e^i}{i-2} + \frac{e^2}{2-i} \right).$$

10.4 Exerciții

1. Calculați reziduurile funcțiilor în punctele a indicate:

(a) $f(z) = \dfrac{\exp\left(z^2\right)}{z-1}, a = 1;$

(b) $f(z) = \dfrac{\exp\left(z^2\right)}{(z-1)^2}, a = 1;$

(c) $f(z) = \dfrac{z+2}{z^2-2z}, a = 0;$

(d) $f(z) = \dfrac{1+e^z}{z^4}, a = 0;$

(e) $f(z) = \dfrac{\sin z}{4z^2}$, $a = 0$;

(f) $f(z) = \dfrac{z}{1 - \cos z}$, $a = 0$.

Indicație: Verificăm multiplicitatea polului $z = a$ și aplicăm formula corespunzătoare din teorema 10.3.

2. Să se calculeze următoarele integrale:

(a) $I = \displaystyle\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 - 1}$;

(b) $I = \displaystyle\int_{\gamma} \frac{dz}{z^4 + 1}$, $\gamma : x^2 + y^2 - 2x = 0$;

(c) $I = \displaystyle\int_{|z|=3} \frac{z^2 + 1}{(z - 1)^2(z + 2)} dz$.

Soluție: (a) Punctele $z = \pm 1$ sînt poli de ordinul 1 pentru funcția $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 1}$. Ele sînt situate în interiorul discului pe care integrăm, cu $|z| = 2$, deci putem aplica teorema reziduurilor:

$$I = 2\pi i \cdot \Big(\mathrm{Rez}(f, z_1) + \mathrm{Rez}(f, z_2)\Big).$$

Calculăm separat reziduurile:

$$\mathrm{Rez}(f, z_1) = \lim_{z \to 1} (z - 1) \cdot \frac{1}{z^2 - 1} = \frac{1}{2}$$
$$\mathrm{Rez}(f, z_2) = \lim_{z \to -1} (z + 1) \cdot \frac{1}{z^2 - 1} = -\frac{1}{2}.$$

Rezultă:

$$I = \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 - 1} = 2\pi i \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

(b) Curba γ este un cerc centrat în $(1, 0)$ și cu raza 1. Căutăm polii funcției $f(z) = \dfrac{1}{z^4 + 1}$ care se află în interiorul lui γ.

Avem succesiv:

$$z^4 + 1 = 0 \Longrightarrow z^4 = -1 = \cos\pi + i \sin\pi \Longrightarrow$$
$$z = \sqrt[4]{\cos\pi + i\sin\pi} \Longrightarrow$$
$$z_k = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}, k = 0, 1, 2, 3.$$

Doar punctele z_0, z_3 se află în interiorul discului delimitat de γ și calculăm reziduurile în aceste puncte.

Putem aplica formula din Teorema 10.3 (4) și avem:

$$\mathrm{Rez}(f, z_0) = \frac{A(z)}{B'(z)}\Big|_{z_0} = \frac{1}{4z^3}\Big|_{z_0} = -\frac{1}{4}e^{\frac{\pi i}{4}}$$
$$\mathrm{Rez}(f, z_3) = \frac{A(z)}{B'(z)}\Big|_{z_3} = \frac{1}{4z^3}\Big|_{z_3} = -\frac{1}{4}e^{\frac{7\pi i}{4}}.$$

Rezultă:

$$I = \int_\gamma \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i\Big(-\frac{1}{4}e^{\frac{\pi i}{4}} - \frac{1}{4}e^{\frac{7\pi i}{4}}\Big) = -\frac{\pi\sqrt{2}i}{2}.$$

(c) Avem doi poli, $z = 1, z = -2$ în interiorul conturului. Se vede că $z_1 = 1$ este pol de ordinul 2, iar $z_2 = -2$ este pol de ordinul 1. Calculăm reziduurile:

$$\begin{aligned}\mathrm{Rez}(f, z_1) &= \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\Big[(z-1)^2\frac{z^2+1}{(z-1)^2(z+2)}\Big]' \\ &= \frac{1}{1!}\lim_{z\to 1}\frac{z^2+4z-1}{(z+2)^2} \\ &= \frac{4}{9} \\ \mathrm{Rez}(f, z_2) &= \lim_{z\to -2}(z+2)\frac{z^2+1}{(z-1)^2(z+2)} = \frac{5}{9}.\end{aligned}$$

Rezultă:

$$I = \int_{|z|=3}\frac{z^2+1}{(z-1)^2(z+2)}dz = 2\pi i.$$

3. Să se calculeze integralele:

(a) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{dz}{\sin z}$;

(b) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z^2}dz$;

(c) $\displaystyle\int_{|z|=5} z e^{\frac{3}{z}} dz$;

(d) $\displaystyle\int_{|z-1|=1} \frac{dz}{(z+1)(z-1)^3}$;

(e) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^4} dz$.

Indicații: (a) $z = 0$ este singurul pol din interiorul domeniului;

(b), (c): Dezvoltăm în serie Laurent și identificăm reziduurile folosind definiția.

(d) Avem $z = 1$ pol de ordin 3 și $z = -1$ pol simplu. Doar $z = 1$ se află în interiorul domeniului și dezvoltăm în serie Laurent după puterile lui $z - 1$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z+1} &= \frac{1}{2-(-(z-1))} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(-\frac{z-1}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^n} \\ &= \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}},\end{aligned}$$

pentru $|z-1| < 2$.

Rezultă:

$$\frac{1}{(z+1)(z-1)^3} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{(z-1)^{n-3}}{2^{n+1}} = \frac{1}{2(z-1)^3} - \frac{1}{4(z-1)^2} + \frac{1}{8(z-1)} - \frac{1}{16} + \dots,$$

deci $\mathrm{Rez}(f, 1) = \frac{1}{8}$.

10.5 Aplicații ale teoremei reziduurilor

Putem folosi teorema reziduurilor pentru a calcula integrale trigonometrice de forma:

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta,$$

unde R este o funcție rațională.

Facem schimbarea de variabilă $z = e^{i\theta}$ și atunci, pentru $\theta \in [0, 2\pi]$, z descrie cercul $|z| = 1$, o dată, în sens direct.

Folosim formulele lui Euler:

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) \\ \sin\theta &= \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right).\end{aligned}$$

Atunci, dacă $z = e^{i\theta}$, rezultă $dz = ie^{i\theta}\ d\theta = izd\theta$, iar integrala devine:[1]

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta = \oint_{|z|=1} R_1(z)dz,$$

unde:

$$R_1(z) = \frac{1}{iz} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right).$$

Această funcție poate avea poli și deci putem folosi teorema reziduurilor. Dacă $a_1, \dots, a_n$ sînt polii din interiorul cercului unitate, avem:

$$I_1 = 2\pi i \sum_{k \geq 1} \text{Rez}(R_1, a_k).$$

Să vedem cîteva exemple:

(a) $\displaystyle\int_0^{2\ \pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}$;

(b) $\displaystyle\int_0^{2\ \pi} \frac{d\theta}{1+3\cos^2\theta}$;

(c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{1+i\sin\theta}\ d\theta$;

(d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+a\sin\theta}$, $|a| < 1, a \in \mathbb{R}$.

Soluție:

(a) Notăm $z = e^{i\theta}$, cu $\theta \in [0, 2\pi]$. Atunci avem succesiv:

$$\begin{aligned}
dz = ie^{i\theta}d\theta = izdz &\Longrightarrow d\theta = \frac{dz}{iz} \\
\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} &= \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) \\
\frac{1}{2+\cos\theta} &= \frac{2z}{z^2+4z+1} \\
\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta} &= \oint_{|z|=1} \frac{2z}{z^2+4z+1}\frac{dz}{iz} \\
&= -2i \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+4z+1}.
\end{aligned}$$

[1] $\oint$ marchează o integrală pe un contur *închis*

Acum folosim teorema reziduurilor. Singularitățile funcției $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 4z + 1}$ sînt $z = -2 \pm \sqrt{3}$, care sînt poli simpli. Numai $z = -2 + \sqrt{3}$ se află în interiorul cercului $|z| = 1$ și calculăm reziduul folosind Teorema 10.3(2).

SEMINAR 11

SERII LAURENT ȘI REZIDUURI

11.1 Serii de puteri. Serii Laurent

Noțiunile privitoare la scrierea funcțiilor cu ajutorul seriilor de puteri, întîlnite în cazul real prin serii Taylor, se pot generaliza și în cazul complex. Situația este ceva mai problematică în acest caz, deoarece argumentele sînt obiecte bidimensionale. În orice caz, multe dintre noțiunile din cazul real pot fi preluate aproape fără modificare și în cazul complex.

Definiţie 11.1: O serie de forma $\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$, cu $z \in \mathbb{C}$ oarecare, $z_0 \in \mathbb{C}$ fixat și $a_n \in \mathbb{C}$ coeficienți, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, se numește *serie de puteri* centrată în z_0.

Ca în cazul real, se poate calcula *raza de convergență* a seriilor de puteri cu una dintre formulele:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Atunci, deoarece lucrăm în planul complex, se definește *discul de convergență* al seriei prin:

$$B(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}.$$

Știm, de asemenea, că:

- seria este absolut convergentă pe $|z - z_0| < R$;
- seria este divergentă pe $|z - z_0| > R$;
- seria este uniform convergentă pe $|z - z_0| \leq \rho$, pentru orice $\rho < R$,

iar pe frontiera discului trebuie testat separat.

În interiorul discului de convergență, suma seriei este o funcție olomorfă $S(z)$ și au sens rezultate de forma derivării sau integrării termen cu termen.

Definiție 11.2: O funcție $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ se numește *analitică* dacă poate fi dezvoltată într-o serie de puteri complexă cu discul de convergență inclus în A.

Dacă acesta este cazul, avem formula cunoscută:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

Are loc rezultatul important:

Teoremă 11.1 (Weierstrass-Riemann-Cauchy)**:** *O funcție complexă definită pe o mulțime deschisă este analitică dacă și numai dacă este olomorfă.*

Deducem de aici că, dacă domeniul de definiție A al funcției complexe studiate, $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$, este o mulțime deschisă, atunci olomorfia (pe care o verificăm cu condițiile Cauchy-Riemann, de exemplu) este echivalentă cu analiticitatea, verificată cu ajutorul seriilor de puteri. Rezultă implicit că orice funcție olomorfă definită pe un deschis poate fi dezvoltată în serie de puteri.

Dar pentru cazul complex, avem și serii ceva mai complicate:

Definiție 11.3: O serie de puteri de forma $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(z - z_0)^n$, cu $a_n, z, z_0 \in \mathbb{C}$ se numește *serie Laurent* centrată în punctul $z_0 \in \mathbb{C}$.

O serie Laurent este convergentă dacă și numai dacă atît partea pozitivă $a_n > 0$, cît și partea negativă, $a_n \leq 0$ sînt simultan convergente.

Partea pozitivă se numește *partea Taylor*, iar partea negativă se numește *partea principală.*

Pentru cazul Taylor, seriile uzuale pentru funcțiile elementare, împreună cu domeniile de convergență, sînt date mai jos. În toate cazurile, $x \in \mathbb{R}$ se poate înlocui cu $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} x^n, x \in \mathbb{R} \\
\frac{1}{1-x} &= \sum_{n\geq 0} x^n, |x| < 1 \\
\frac{1}{1+x} &= \sum_{n\geq 0} (-1)^n x^n, |x| < 1 \\
\cos x &= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, x \in \mathbb{R} \\
\sin x &= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, x \in \mathbb{R} \\
(1+x)^\alpha &= \sum_{n\geq 0} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, |x| < 1, \alpha \in \mathbb{R} \\
\arctan x &= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, |x| \leq 1.
\end{aligned}$$

Seriile pentru alte funcții se pot obține fie prin calcul direct, fie prin substituții, fie prin derivare sau integrare termen cu termen a seriilor de mai sus.

11.2 Singularități și reziduuri

În cazul funcțiilor reale, domeniul de definiție trebuie ales atent astfel încît să evităm „punctele cu probleme". Exemplele tipice sînt cele în care se anulează numitorul unei fracții, cînd apar logaritmi sau radicali etc. Pentru funcții reale, cel mult putem calcula asimptote verticale în acele „puncte cu probleme". Dar în cazul complex, distincția se face mult mai fin.

Definiție 11.4: Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ o mulțime deschisă nevidă și $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ o funcție complexă, olomorfă pe A. Fie un punct $z_0 \in \mathbb{C}$.

Punctul z_0 se numește *punct singular izolat* (*singularitate izolată*) pentru f dacă există un disc centrat în z_0, de forma $B(z_0, r)$, cu $r \neq 0$, astfel încît, dacă eliminăm centrul discului, funcția este olomorfă pe $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$.

Amintim că, dacă funcția este olomorfă pe *discul punctat* (i.e. discul $B(z_0, r)$, din care am scos centrul), atunci ea are o dezvoltare în serie Laurent, conform teoremei Weierstrass-Riemann-Cauchy.

Definiție 11.5: În condițiile și cu notațiile din definiția anterioară, punctul $z_0 \in \mathbb{C}$ se numește *punct singular izolat* (*singularitate izolată*) dacă seria Laurent asociată funcției f are partea principală nulă, adică este o serie Taylor.

Definiţie 11.6: În condițiile și cu notațiile din definiția anterioară, punctul $z_0 \in \mathbb{C}$ se numește *pol* dacă în seria Laurent asociată funcției f există un număr finit de termeni nenuli în partea principală. Indicele ultimului termen nenul m (în sensul că $|m|$ este cel mai mare, iar $m < 0$) se numește *ordinul polului.*

Definiţie 11.7: În condițiile și cu notațiile din definiția anterioară, punctul $z_0 \in \mathbb{C}$ se numește *punct singular esențial* (*singularitate esențială*) dacă în partea principală a seriei Laurent asociată funcției f există o infinitate de termeni nenuli.

Idee intuitivă: Singularitățile, în general, sînt „puncte cu probleme". Chiar și în cazul real există această noțiune, întîlnită în analiză. De exemplu, un punct unghiular sau de întoarcere al unei funcții reale se numește singularitate. Alt exemplu la îndemînă: găurile negre sînt interpretate în cosmologie (ramura fizicii teoretice care utilizează geometria pentru studiul „formei" Universului) ca *singularități ale spațiu-timpului.* Dar, din fericire, în majoritatea cazurilor, singularitățile fie pot fi „ignorate" sau „eliminate" i.e. se poate extrage informația de bază și din domeniul din care ele au fost scoase. Amintiți-vă, de exemplu, că în analiza de liceu există o teoremă care afirmă că *dacă se scoate un număr numărabil de puncte din graficul unei funcții, integrala sa definită nu se schimbă.*

Similar este și cazul singularităților din analiza complexă: toate, cu excepția celor esențiale, pot fi „eliminate", adică se poate extrage informație foarte importantă despre comportamentul funcțiilor și în lipsa lor (sau, uneori, chiar *numai* din ele, ca în cazul reziduurilor, precum vom vedea).

Polii vor fi elementul central de studiu mai departe. Pentru ei, mai avem o caracterizare utilă:

Propoziţie 11.1: *În condițiile și cu notațiile de mai sus, punctul $z_0 \in \mathbb{C}$ este pol pentru funcția f dacă și numai dacă $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$.*

Exemplu: Putem vedea foarte simplu acest lucru pentru funcția $f(z) = \dfrac{z}{z-1}$. Atunci $z = 1$ este pol simplu, deoarece $\lim_{z \to 1} f(z) = \infty$ și mai mult, putem scrie dezvoltarea în serie Laurent a funcției f în jurul lui $z = 1$, sub forma:

$$f(z) = \frac{1 + z - 1}{z - 1} = \frac{1}{z - 1} + 1,$$

care are partea principală $\dfrac{1}{z-1}$, cu un singur termen (care dă ordinul polului).

Propoziţie 11.2: *În condițiile și cu notațiile de mai sus, punctul $z_0 \in \mathbb{C}$ este singularitate esențială dacă și numai dacă nu există $\lim_{z \to z_0} f(z)$.*

Ajungem la o altă noțiune esențială:

Definiţie 11.8: În condițiile și cu notațiile de mai sus, fie z_0 o singularitate izolată a funcției f. Coeficientul a_{-1} din seria Laurent a funcției f în coroana $B(z_0; 0, r)$ se numește *reziduul* funcției în z_0 și se notează $\text{Rez}(f, z_0)$.

Observaţie 11.1: În multe situații, reziduurile se pot calcula simplu cu teorema 10.3, dar uneori sîntem obligați să folosim definiția, pentru că limitele complexe se calculează mult mai dificil decît în cazul real.

Un exemplu este următorul: considerăm funcția $f(z) = \dfrac{1}{z \sin z^2}$. Vrem să calculăm $\text{Rez}(f, 0)$. Evident, acest punct este pol, deoarece $\lim\limits_{z \to 0} f(z) = \infty$, dar orice formulă am folosi din teorema 10.3, nedeterminarea nu este eliminată. Astfel că sîntem obligați să folosim definiția, cu ajutorul seriei Laurent.

Ca în cazul seriei Taylor pentru funcția sinus, avem:

$$\begin{aligned}
\sin z &= \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \\
\Rightarrow z \sin z^2 &= z \cdot \left(\frac{z^2}{1!} - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^{10}}{5!} - \dots \right) \\
&= z^3 \left(1 - \frac{z^4}{3!} + \frac{z^8}{5!} - \dots \right).
\end{aligned}$$

Atunci, inversînd, obținem funcția scrisă sub forma:

$$f(z) = z^{-3} \cdot \left(1 - \frac{z^4}{3!} + \frac{z^8}{5!} - \dots \right)^{-1}.$$

Vrem să inversăm seria din paranteză (admitem fără demonstrație că acest lucru este posibil), pentru ca în final, să putem scrie toată funcția ca o serie de puteri (în forma actuală nu este așa ceva!). Așadar, căutăm o serie de forma $\sum a_n z^n$, cu $n \in \mathbb{N}$, astfel încît:

$$\left(1 - \frac{z^4}{3!} + \frac{z^8}{5!} - \dots \right) \cdot \left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \right) = 1.$$

Prin identificarea coeficienților, rezultă $a_0 = 1$, $a_2 = 0$. Făcînd acum înmulțirea, avem:

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \sum_{n \geq 0} a_n z^n = \frac{a_0}{z^3} + \frac{a_1}{z^2} + \frac{a_2}{z} + a_3 + \dots.$$

Partea principală a seriei are 3 termeni nenuli, deci $z = 0$ este pol triplu (intuitiv, simplu pentru z și dublu pentru $\sin z^2$), deci rezultă $\text{Rez}(f, 0) = a_2 = 0$.

11.3 Exerciții

1. Determinați dezvoltarea în serie Taylor sau Laurent pentru funcțiile următoare, în jurul punctelor indicate z_0, precizînd și domeniile pe care sînt valabile:

(a) $f(z) = \cos^2 z$, $z_0 = 0$;

(b) $f(z) = \dfrac{z+3}{z^2 - 8z + 15}$, $z_0 = 4$;

(c) $f(z) = \sin \dfrac{1}{1-z}$, $z_0 = 1$;

(d) $f(z) = \dfrac{2z^2 + 9z + 5}{z^3 + z^2 - 8z - 12}$, $z_0 = 1$;

(e) $f(z) = \dfrac{z-1}{z-2}$, $z_0 = 1$;

(f) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 3z + 2}$, pe domeniile $|z| < 1$, $1 < |z| < 2$ și $|z| > 2$.

Indicație: Se pot folosi seriile uzuale, cu anumite substituții, dar atenție la domeniile de convergență, precum și la eventualii poli ai funcțiilor. A se vedea exemplul rezolvat de mai jos.

2. Determinați punctele singulare și precizați natura lor pentru funcțiile:

(a) $f(z) = \dfrac{z^5}{(z^2+1)^2}$;

(b) $f(z) = z^3 \exp\left(-\dfrac{3}{z}\right)$;

(c) $f(z) = \sin \dfrac{1}{z}$;

(d) $f(z) = \dfrac{\sin 2z}{z^6}$;

(e) $f(z) = \dfrac{6z+1}{z-3}$;

(f) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 \sin z}$;

Indicație: După identificarea „punctelor cu probleme“, se cercetează existență limitei către punctele respective și/sau se utilizează dezvoltarea în serie Taylor/Laurent.

3. Calculați:

(a) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z^2 + \exp(z)}{z^3} dz;$

(b) $\displaystyle\int_\gamma (z+1)\exp\left(\frac{1}{z+1}\right) dz$, unde $\gamma : x^2 + y^2 + 2x = 0;$

(c) $\displaystyle\int_{|z|=r} \frac{\exp(z^{-1})}{1-z} dz$, pentru $r \in \left\{\frac{1}{2}, 1, 2\right\}$.

Indicație: Se folosește teorema reziduurilor.

Exemplu rezolvat pentru seria Laurent: Să se dezvolte funcția

$$f(z) = \frac{2z^2 + 3z - 1}{z^3 + z^2 - z - 1}$$

în jurul originii și în jurul punctelor $z = \pm 1$.

Soluție: Numitorul se descompune sub forma $(z-1)(z+1)^2$, deci avem un pol simplu $z = 1$ și un pol dublu $z = -1$.

Putem descompune funcția în fracții simple, sub forma:

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2}.$$

Primii doi termeni sînt sume de serii geometrice, iar al treilea poate fi obținut prin derivarea seriei geometrice:

$$\frac{1}{z+1} = \sum (-1)^n z^n \Longrightarrow -\frac{1}{(z+1)^2} = \sum (-1)^{n+1}(n+1)z^n,$$

după ce am făcut trecerea $n \mapsto n+1$, întrucît seria derivatelor ar fi pornit de la $n = 1$, dat fiind termenul z^{n-1}.

Pe cazuri acum:

Pentru $|z| < 1$: funcția este olomorfă, deoarece nu avem niciun pol în acest disc deschis. Atunci putem scrie direct seria ca sumă a celor trei serii corespunzătoare:

$$f(z) = -\sum_{n\geq 0} z^n + \sum_{n\geq 0} (-1)^n z^n + \sum_{n\geq 0} (-1)^n (n+1) z^n = \sum_{n\geq 0} z^n \left(-1 + (-1)^n + (-1)^n(n+1)\right).$$

În jurul punctului $z = -1$, unde avem pol, trebuie să rescriem funcția sub forma:

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{z+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z+1}{2}},$$

astfel punînd în evidență puteri (negative!) ale lui $z+1$. Primii doi termeni nu necesită prelucrare, iar pentru al treilea, întrucît ne aflăm în domeniul de convergență a seriei geometrice, adică $|z+1| < 2$ putem scrie:

$$\frac{1}{1 - \frac{z+1}{2}} = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{z+1}{2}\right)^n.$$

În jurul punctului $z = 1$, unde avem din nou pol, rescriem funcția sub forma:

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z-1}{2}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{z-1}{2}\right)^2}.$$

Primul termen nu necesită prelucrare, iar pentru al doilea, remarcăm că ne aflăm în interiorul domeniului său de convergență, căci $|z-1| < 2$ și atunci avem direct suma seriei geometrice:

$$\frac{1}{1 + \frac{z-1}{2}} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \left(\frac{z-1}{2}\right)^n.$$

Al treilea termen se obține prin derivarea termen cu termen a seriei de mai sus (ca în cazul de la început) și avem:

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{z-1}{2}\right)^2} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{(n+1)(z-1)^n}{2^n}$$

și în fine, funcția se obține ca sumă a acestor trei serii, adică, după calcule:

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \sum_{n \geq 0} \frac{n+3}{2^{n+2}} (z-1)^n.$$

SEMINAR 12

RECAPITULARE ANALIZĂ COMPLEXĂ

(1) Determinați partea reală sau partea imaginară a funcției $f = P + iQ$ olomorfă (dacă există) pentru:

(a) $P(x, y) = x^2 - y^2$ și $f(0) = 0$;

(b) $Q(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$;

(c) $P(x, y) = xy + x + 2y$ și $f(2i) = -1 + 5i$;

(d) $P(x, y) = 4xy^3 - 4x^3y + x$ și $f(1 + i) = 5 + 4i$;

(e) $P(x, y) = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$;

(f) $Q(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$;

(g) $Q(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$.

(2) Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încît $P(x, y) = 2xy + 3x^2 - ay^2 + 2ax + 3y - 4$ să fie partea reală a unei funcții olomorfe. Determinați funcția $f(z)$ pentru care $f(i) = 1$.

(3) Calculați integralele complexe:

(a) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\exp(z)}{(z-1)(z-3i)} dz$;

(b) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{z^2 - 5z + 4} dz$;

(c) $\displaystyle\int_{|z-1|=2} \frac{z}{z^2 + 2} dz$;

(d) $\displaystyle\int_{|z-i|=1} \frac{\exp(z)}{z^2+1}\,dz;$

(e) $\displaystyle\int_{|z-1|=1} \frac{z+2}{(z-1)^2(z+2)}\,dz;$

(f) $\displaystyle\int_{|z+i|=2} \frac{\exp(2z)}{z^2(z^2+1)(z^2+2)}\,dz;$

(g) $\displaystyle\int_{|z-2i|=1} \frac{\exp 3z}{z^2+10} + \frac{z^2+1}{z^3(z+2)}\,dz.$

(4) Folosind funcții complexe, calculați integralele trigonometrice:

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2+\cos t)^2}\,dt;$

(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\cos t}\,dt;$

(c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{4+\cos t}\,dt;$

(d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5+3\cos t}\,dt;$

(e) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3+2\cos^2 t}\,dt.$