Analiză 1

Notițe de seminar

Adrian Manea
Curs: R. Purnichescu-Purtan

17 octombrie 2020

Cuprins

SEMINAR 1

ȘIRURI DE NUMERE REALE ȘI POZITIVE

1.1 Exerciții recapitulative

În toate cele de mai jos, presupunem că lucrăm cu șiruri de numere reale și pozitive.

1. Găsiți valoarea de adevăr a afirmațiilor de mai jos. Dacă sînt adevărate, justificați. Dacă sînt false, găsiți un contraexemplu.

(a) Orice șir monoton este mărginit.

(b) Orice șir mărginit este monoton.

(c) Orice șir convergent este monoton.

(d) Orice subșir al unui șir monoton este monoton.

(e) Suma a două șiruri monotone este un șir monoton.

(f) Orice șir divergent este nemărginit.

(g) Dacă șirul format din pătratele termenilor unui șir este convergent, atunci șirul inițial este convergent.

2. Calculați limitele șirurilor cu termenul general a_n în cazurile de mai jos:

(a) $a_n = \dfrac{n^3 + 5n^2 + 1}{6n^3 + n + 4}$;

(b) $a_n = \dfrac{n^2 + 2n + 5}{5n^3 - 1}$;

(c) $a_n = \arcsin \dfrac{n+1}{2n+3}$;

(d) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1} + 4\sqrt{n^2+n+1}}{n}$;

(e) $a_n = \dfrac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2}{n^3}$;

(f) $a_n = \dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

(g) $a_n = \sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2+n}$;

(h) $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$;

(i) $a_n = \left(\dfrac{n+5}{3n+2}\right)^n$;

(j) $a_n = 1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{64} + \cdots + \dfrac{1}{4^n}$;

(k) $a_n = \dfrac{2 + \sin n}{n^2}$;

(l) $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$;

(m) $a_n = \dfrac{\ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n}{n+1}$;

(n) $a_n = \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right)$;

(o) $a_n = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$;

(p) $a_n = \dfrac{1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4}{n^5}$;

(q) $a_n = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\right)$;

(r) $a_n = \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \cdots + \dfrac{1}{2n-1}\right)$.

SEMINAR 2

SERII DE NUMERE REALE POZITIVE

Intuitiv, o serie poate fi gîndită ca o sumă infinită, dată de o regulă a unui termen general. De exemplu, seria:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{3n}{5n^2 + 2n - 1}$$

are termenul general de forma $x_n = \dfrac{3n}{5n^2 + 2n - 1}$ și putem rescrie seria mai simplu $\sum x_n$, presupunînd implicit că indicele n ia cea mai mică valoare permisă și merge pînă la ∞.

Natura seriilor este fundamental diferită de cea a șirurilor prin faptul că seriile *acumulează*. De exemplu, să considerăm șirul constant $a_n = 1, \forall n$. Atunci, evident, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. Pe de altă parte, dacă luăm seria de termen general a_n, adică $\sum a_n$, observăm că aceasta are suma ∞, deci este divergentă.

În continuare, vom studia criterii prin care putem decide dacă o serie este sau nu convergentă. Dar înainte de aceasta, vom folosi foarte des două serii particulare, pe care le detaliem în continuare.

2.1 Seria geometrică

Pornim de la progresiile geometrice studiate în liceu. Fie (b_n) o progresie geometrică, cu primul termen b_1 și cu rația q. Deci termenul general are formula $b_n = b_1 q^{n-1}$. Atunci suma primilor n termeni ai progresiei se poate calcula cu formula:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Dacă, însă, în această sumă considerăm „toți“ termenii progresiei, obținem *seria* geometrică, anume $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$.

Suma acestei serii coincide cu $\lim_{n\to\infty} S_n$ și se poate observa cu ușurință că seria geometrică este convergentă dacă și numai dacă $|q| < 1$. Mai mult, în caz de convergență, suma seriei se poate calcula imediat ca fiind $b_1 \cdot \frac{1}{1-q}$.

2.2 Seria armonică

Această serie se mai numește *funcția zeta a lui Riemann* și se definește astfel:

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}, \quad s \in \mathbb{Q}.$$

Remarcăm cîteva cazuri particulare:

$$\begin{aligned}
\zeta(0) &= \sum 1 = \infty \\
\zeta(1) &= \sum \frac{1}{n} = \infty \\
\zeta(2) &= \sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \\
\zeta(-1) &= \sum n = \infty \\
\zeta(-2) &= \sum n^2 = \infty.
\end{aligned}$$

Rezultatul general este:

Teoremă 2.1: *Seria armonică $\zeta(s)$ este convergentă dacă și numai dacă $s > 1$.*

2.3 Criterii de convergență

Ne păstrăm în continuare în contextul seriilor cu termeni reali și pozitivi, pe care le scriem în general $\sum x_n$.

Convergența poate fi decisă ușor folosind criteriile de mai jos.

Criteriul necesar: Dacă $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$, atunci seria $\sum x_n$ este divergentă.

Observaţie 2.1: Să remarcăm că, așa cum îi spune și numele, criteriul de mai sus dă doar condiții necesare, nu și suficiente pentru convergență! De exemplu, pentru $\zeta(1)$, termenul general tinde către 0, dar seria este divergentă.

Criteriul de comparație termen cu termen: Fie $\sum y_n$ o altă serie de numere reale și pozitive.

- Dacă $x_n \leq y_n, \forall n$, iar seria $\sum y_n$ este convergentă, atunci și seria $\sum x_n$ este convergentă;
- Dacă $x_n \geq y_n, \forall n$, iar seria $\sum y_n$ este divergentă, atunci și seria $\sum x_n$ este divergentă.

Acest criteriu seamănă foarte mult cu criteriul de comparație de la șiruri. Astfel, avem că un șir mai mare (termen cu termen) decît un șir divergent este divergent, iar un șir mai mic (termen cu termen) decît un șir convergent este convergent. Celelalte cazuri sînt nedecise.

De asemenea, mai remarcăm că, în studiul seriei $\sum x_n$ apare seria $\sum y_n$, care trebuie aleasă convenabil astfel încît să aibă loc condițiile criteriului. În practică, cel mai des vom alege această nouă serie ca fiind o serie geometrică sau una armonică, cu rația, respectiv exponentul alese convenabil.

Criteriul de comparație la limită: Fie $\sum y_n$ o altă serie de numere reale și pozitive, astfel încît $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} \in (0, \infty)$. Atunci cele două serii au aceeași natură, adică $\sum x_n$ este convergentă dacă și numai dacă $\sum y_n$ este convergentă.

Criteriul raportului: Fie $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$.

- Dacă $\ell > 1$, atunci seria $\sum x_n$ este divergentă;
- Dacă $\ell < 1$, atunci seria $\sum x_n$ este convergentă;
- Dacă $\ell = 1$, atunci criteriul nu decide.

Criteriul radical: Fie $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$.

- Dacă $\ell > 1$, atunci seria $\sum x_n$ este divergentă;
- Dacă $\ell < 1$, atunci seria $\sum x_n$ este convergentă;
- Dacă $\ell = 1$, atunci criteriul nu decide.

2.4 Exerciții

1. Studiați convergența seriilor $\sum x_n$ în cazurile de mai jos:

(a) $x_n = \left(\dfrac{3n}{3n+1}\right)^n$; (D, necesar)

(b) $x_n = \dfrac{1}{n!}$; (C, raport)

(c) $x_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n+1}}$; (C, comparație la limită cu $\zeta(3/2)$)

(d) $x_n = \arcsin \dfrac{n+1}{2n+3}$; (D, necesar)

(e) $x_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$; (D, necesar)

(f) $x_n = \dfrac{n!}{n^{2n}}$; (C, raport)

(g) $x_n = \left(\dfrac{n+1}{3n+1}\right)^n$; (C, radical)

(h) $x_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$; (C, radical)

(i) $x_n = \dfrac{1}{7^n + 3^n}$; (C, comparație cu geometrică)

(j) $x_n = \dfrac{2 + \sin n}{n^2}$; (C, comparație cu armonică)

(k) $x_n = \dfrac{\sin^2 n}{n^2 + 1}$; (C, comparație cu armonică)

(l) $x_n = \sqrt{n^4 + 2n + 1} - n^2$; (D, comparație cu armonică)

2.5 Alte criterii de convergență. Serii oarecare

Pe lîngă criteriile prezentate în secțiunile anterioare, vor mai fi de folos și altele, pe care le enumerăm mai jos. În continuare, menționăm că vom lucra cu o serie de forma $\sum x_n$ și sîntem în ipoteza $x_n \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}$.

Criteriul Raabe-Duhamel: Fie limita următoare:

$$\ell = \lim_{n \to \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right).$$

Atunci:

- Dacă $\ell > 1$, seria este convergentă;
- Dacă $\ell < 1$, seria este divergentă;
- Dacă $\ell = 1$ criteriul nu decide.

În multe situații, criteriul Raabe-Duhamel este folositor cînd criteriul raportului nu decide. Remarcați că, în acest caz, limita de mai sus este o nedeterminare de forma $\infty \cdot 0$, care de multe ori se poate calcula și este diferită de 1.

Criteriul logaritmic: Fie limita:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-\ln x_n}{\ln n}.$$

- Dacă $\ell > 1$, seria este convergentă;
- Dacă $\ell < 1$, seria este divergentă;
- Dacă $\ell = 1$, criteriul nu decide.

Criteriul condensării: Dacă (x_n) este un șir descrescător și cu termeni pozitivi, atunci seriile $\sum x_n$ și $\sum 2^n x_{2^n}$ au aceeași natură.

Criteriul integral: Fie $f : (0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ o funcție crescătoare și definim șirul:

$$a_n = \int_1^n f(t)dt.$$

Atunci seria $\sum f(n)$ este convergentă dacă și numai dacă șirul (a_n) este convergent.

2.6 Exerciții

1. Studiați natura următoarelor serii cu termeni pozitivi, cu termenul general x_n dat de:

(a) $x_n = \dfrac{1}{\ln n}$; (D, integral/comparație)

(b) $x_n = \dfrac{1}{n \ln n}$; (D, integral/condensare)

(c) $x_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}$ (D, Raabe)

(d) $x_n = \left(1 - \dfrac{3 \ln n}{2n}\right)^n$ (C, logaritmic)

(e) $x_n = \dfrac{1}{n \sqrt[n]{n}}$ (D, comparație/logaritmic)

(f) $x_n = \left(\dfrac{1}{\ln n}\right)^{\ln(\ln n)}$; (D, logaritmic)

(g) $x_n = n^2 e^{-\sqrt{n}}$ (C, logaritmic)

(h) $x_n = \dfrac{a^n (n!)^2}{(2n)!}, a > 0.$ (raport, discuție a?4)

2.7 Serii alternante

În continuare, discutăm și cazul cînd termenii seriei pot fi negativi. Dar vom fi interesați doar de un caz particular, anume acela al seriilor *alternante*, adică acelea în care un termen este negativ, iar celălalt pozitiv. Mai precis, o serie $\sum x_n$ se numește *alternantă* dacă $x_n \cdot x_{n+1} < 0$, pentru orice n.

Singurul criteriu de convergență pe care îl folosim pentru aceste cazuri este:

Criteriul lui Leibniz: Fie $\sum_n (-1)^n x_n$ o serie alternantă. Dacă șirul (x_n) este descrescător și converge către 0, seria este convergentă.

De asemenea, vom mai fi interesați și de:

- *serii absolut convergente*, adică acele serii pentru care și seria modulelor, și seria dată sînt convergente;
- *serii semiconvergente*, adică acele serii pentru care seria inițială este convergentă, dar seria modulelor este divergentă.

Evident, cum $x \leq |x|$, rezultă că orice serie absolut convergentă este convergentă, dar reciproca nu este adevărată.

Pentru acest caz, avem:

Criteriul Abel-Dirichlet: Presupunem că seria $\sum x_n$ se mai poate scrie sub forma $\sum \alpha_n y_n$, unde (α_n) este un șir monoton și mărginit (deci convergent). Dacă și seria $\sum y_n$ este convergentă, atunci seria inițială $\sum \alpha_n y_n$ este convergentă.

Formulare alternativă: Dacă (α_n) este un șir monoton, care tinde către 0, iar șirul cu termenul general $Y_n = y_1 + \cdots + y_n$ este mărginit, atunci seria $\sum \alpha_n y_n$ este convergentă.

De exemplu, studiem seria $\sum_n \dfrac{(-1)^n}{n}$. Este o serie alternantă, deci:

- seria modulelor este $\zeta(1)$, care este divergentă;
- pentru seria dată, aplicăm criteriul lui Leibniz, cu șirul $x_n = \frac{1}{n}$, care este descrescător către 0, deci seria este convergentă.

Concluzia este că seria $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ este *semiconvergentă.*

Exercițiu: Folosind criteriul Leibniz, studiați natura seriei cu termenul general:

$$x_n = (-1)^n \frac{\log_a n}{n}, a > 1.$$

2.8 Aproximarea sumelor seriilor convergente

Presupunem că avem o serie convergentă și alternantă. Se poate arăta foarte simplu că, dacă notăm cu S suma seriei, iar cu s_n suma primilor n termeni, cu x_n termenul general al seriei, are loc inegalitatea:

$$\varepsilon = |S - s_n| \leq x_{n+1}. \tag{2.1}$$

Cu alte cuvinte, eroarea aproximației are ordinul de mărime al primului termen neglijat.

Deocamdată, exemplele simple pe care le studiem sînt de forma:

Exercițiu: Să se aproximeze cu o eroare mai mică decît ε sumele seriilor definite de termenul general x_n de mai jos:

(a) $x_n = \frac{(-1)^n}{n!}, \varepsilon = 10^{-3}$;

(b) $x_n = \frac{(-1)^n}{n^3 \sqrt{n}}, \varepsilon = 10^{-2}$.

În ambele cazuri, se folosește inegalitatea din (2.1), de unde se scoate n. Se obține $n = 6$ pentru primul exercițiu și $n = 4$ pentru al doilea.

Concluzia este că, pentru a obține valoarea sumei seriei cu o precizie de 3, respectiv 2 zecimale, este suficient să considerăm primii 5, respectiv primii 3 termeni ai seriei. Eroarea este comparabilă cu primul termen *neglijat* din serie.

INDEX