Algebră și geometrie

Notițe de seminar

Adrian Manea

Curs: A. Niță

17 octombrie 2020

Cuprins

1 Recapitulare: Metoda lui Gauss **2**
1.1 Eliminare gaussiană 2
1.1.1 Exerciții 4

2 Spații vectoriale. Generalități **6**
2.1 Spații vectoriale 6
2.2 Subspații vectoriale 8
2.3 Operații cu subspații 8
2.4 Bază și dimensiune 9
2.5 Teorema lui Grassmann 10
2.6 Exerciții 11

Index **14**

SEMINAR 1

RECAPITULARE: METODA LUI GAUSS

1.1 Eliminare gaussiană

Metoda eliminării gaussiene (numită și metoda Gauss(-Jordan)) este folosită pentru a aduce matrice la o formă mai simplă, anume triunghiulară sau chiar forma matricei unitate.

Principalele aplicații ale eliminării gaussiene sînt în rezolvarea sistemelor de ecuații liniare și în inversarea matricelor.

În ambele situații, se trece de la o stare la alta făcînd *transformări elementare*, adică acele operații permise în determinanți, care nu schimbă valoarea determinantului. În general, operațiile pe care le putem face intră sub denumirea de *combinații liniare cu linii sau coloane.*

Un exemplu este următorul. Fie sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 & = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 & = m \\ x_1 + x_2 + mx_3 & = m^2, \end{cases}$$

unde $m \in \mathbb{R}$. Evident, soluția sistemului va implica o discuție după m.

Fie A matricea sistemului, iar B matricea-coloană a termenilor liberi. Prelucrăm matricea extinsă $(A \mid B)$ pînă cînd aducem pe A în formă (superior) triunghiulară.

Considerăm matricea $M = (A \mid B)$ de mai sus:

$$(A|B) = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & m & 1 & | & m \\ 1 & 1 & m & | & m^2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & | & m \\ m & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & m & | & m^2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_1]{L_2 \to L_2 - mL_1} \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & | & m \\ 0 & 1-m^2 & 1-m & | & 1-m^2 \\ 0 & 1-m & m-1 & | & m^2-m. \end{pmatrix}$$

În acest punct, avem o discuție:

(a) Dacă $m = 1$, atunci sistemul se reduce la prima ecuație, deci este compatibil dublu nedeterminat. Rezultă soluția

$$\{(1 - \alpha - \beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

(b) Dacă $m \neq 1$, atunci putem continua transformările și ajungem, în fine, la:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+m & | & m+m^2 \\ 0 & 1 & -1 & | & -m \\ 0 & 0 & 2 & | & (m+1)^2 \end{pmatrix}$$

Aici discutăm din nou:

(b1) Dacă $m = -2$, sistemul este incompatibil, deoarece ultima ecuație devine $0 = 1$.

(b2) Dacă $m \neq -2$, putem continua transformările și ajungem, în cele din urmă, la:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -(m+1)/2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1/(m+2) \\ 0 & 0 & 1 & | & (m+1)^2/(m+2) \end{pmatrix}$$

În acest ultim caz, sistemul este compatibil determinat, soluția fiind dată de ultima coloană:

$$\begin{cases} x_1 &= -\dfrac{m+1}{2} \\ x_2 &= \dfrac{1}{m+2} \\ x_3 &= \dfrac{(m+1)^2}{m+2}. \end{cases}$$

Concluzia generală este:

(a) Dacă $m \in \mathbb{R} - \{-2, 1\}$, sistemul are soluție unică;

(b) Dacă $m = -2$, sistemul este incompatibil;

(c) Dacă $m = -1$, sistemul este compatibil nedeterminat.

Similar, pentru a calcula inversa unei matrice, bordăm matricea dată cu matricea unitate și efectuăm transformări elementare pînă ce matricea inițială devine matricea unitate.

Iată un exemplu, notînd și transformările:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \to (1/2)L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & | & 1/2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \to -5L_1+L_3]{L_2 \to 2L_1+L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & | & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3/2 & -13/2 & | & -5/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \to (1/4)L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & | & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7/4 & | & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & -3/2 & -13/2 & | & -5/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \to (3/2)L_2+L_3]{L_1 \to (-1/2)L_2+L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/8 & | & 3/8 & -1/8 & 0 \\ 0 & 1 & 7/4 & | & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -31/8 & | & -17/8 & 3/8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \to (-8/31)L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/8 & | & 3/8 & -1/8 & 0 \\ 0 & 1 & 7/4 & | & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 17/31 & -3/31 & -8/31 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_2 \to (-7/4)L_3+L_2]{L_1 \to (-5/8)L_3+L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1/31 & -2/31 & 5/31 \\ 0 & 1 & 0 & | & -22/31 & 13/31 & 14/31 \\ 0 & 0 & 1 & | & 17/31 & -3/31 & -8/31 \end{pmatrix}$$

Rezultă că

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/31 & -2/31 & 5/31 \\ -22/31 & 13/31 & 14/31 \\ 17/31 & -3/31 & -8/31 \end{pmatrix}.$$

1.1.1 Exerciții

1. Rezolvați următoarele sisteme, atît cu metoda matriceală clasică, cît și cu metoda lui Gauss:

(a) $\begin{cases} x + 3y - z &= 1 \\ 3x + y + 2z &= 4 \\ 5x - 2y + z &= 2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 3x - y + 2z + 3t & = 4 \\ x + 3y - z + t & = -1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x - y + 3z & = 1 \\ 3x + 2y - z & = 4\,. \\ x + 3y - 4z & = 3 \end{cases}$

2. Calculați inversele matricelor, atît cu metoda folosind matricea adjunctă, cît și folosind metoda lui Gauss:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

(b) $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

SEMINAR 2

SPAȚII VECTORIALE. GENERALITĂȚI

2.1 Spații vectoriale

Noțiunea de spațiu vectorial face legătura între geometrie și algebră. De fapt, a permis utilizarea metodelor de structuri algebrice în geometria analitică. Exemplul de bază este acela al planului real $V = \mathbb{R}^2$, în care considerăm adunarea vectorilor și înmulțirea lor cu scalari. Astfel, fie vectorii:

$$\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}, \quad \vec{w} = c\vec{i} + d\vec{j},$$

unde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Definim operația de adunare a vectorilor, pe componente:

$$\vec{v} + \vec{w} = (a + c)\vec{i} + (b + d)\vec{j}.$$

Cu această definiție, observăm că $(V, +)$ are o structură de grup comutativ (justificați!).

În plus, mai avem la dispoziție și operația de înmulțire cu scalari. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ un scalar (număr real, în cazul de față). Se definește operația:

$$\alpha \cdot \vec{v} = \alpha a\vec{i} + \alpha b\vec{j}.$$

Cu această definiție, se verifică imediat proprietățile (pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ și $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$):

- $(\alpha\beta)\vec{v} = \alpha(\beta\vec{v})$;
- $\alpha \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \alpha\vec{v} + \alpha\vec{w})$;
- $1_{\mathbb{R}} \cdot \vec{v} = \vec{v}$;
- $0_{\mathbb{R}} \cdot \vec{v} = \vec{0}$.

Mai amintim, de asemenea, că mulțimea numerelor reale are o structură de corp comutativ, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

Sîntem, astfel, conduși la următoarea:

Definiție 2.1: Spunem că V are structură de *spațiu vectorial peste* K (echivalent, V este K-spațiu vectorial) dacă:

1. $(V, +)$ are structură de grup comutativ;

2. $(K, +, \cdot)$ are structură de corp comutativ;

3. există o *operație externă* $\cdot : V \times K \longrightarrow K$ care satisface

   - $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$;
   - $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$;
   - $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$;
   - $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$;
   - $1_K \cdot x = x$;
   - $0_K \cdot x = 0_V$;

   pentru orice $x, y \in V$ și $\alpha, \beta \in K$.

În general, elementele grupului V se vor nota cu litere din alfabetul latin și se vor numi *vectori*, iar elementele corpului K se vor nota cu litere grecești și se vor numi *scalari*.

Observație 2.1: Are sens, în general, să lucrăm și pe cazul necomutativ, adică, de exemplu, înmulțirea cu scalari să fie posibilă doar într-o parte sau să nu fie egală expresia αv cu $v\alpha$. Dar aceste cazuri depășesc scopul acestui seminar și vor fi omise. De aceea, comutativitatea va fi presupusă implicit în tot ceea ce urmează.

Spațiile vectoriale se mai numesc și *spații liniare*, deoarece toate expresiile și ecuațiile ce vor apărea vor fi liniare, i.e. de gradul întîi.

Dacă corpul K este $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$, vom mai numi spațiile reale, respectiv complexe. În acest seminar, majoritatea cazurilor vor fi de spații vectoriale reale.

Cîteva exemple de bază urmează. Cititorul este încurajat să verifice afirmațiile cu o scurtă demonstrație.

1. K este un K-spațiu vectorial, deci putem avea, de exemplu, $V = K = \mathbb{R}$;

2. $\mathbb{R}^n$ este un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial, unde vectorii sînt n-tupluri de numere reale, $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

3. $M_{m,n}(K)$ este un K-spațiu vectorial, indiferent de m, n, K. În particular, $M_4(\mathbb{R})$ este un spațiu vectorial real, iar $M_{2,7}(\mathbb{Z}_{13})$ este un $\mathbb{Z}_{13}$-spațiu vectorial.

4. $\mathbb{R}$ este un $\mathbb{Q}$-spațiu vectorial, dar nu este un $\mathbb{C}$-spațiu vectorial;

5. $\mathbb{R}[X]$ (mulțimea polinoamelor cu coeficienți reali) este un spațiu vectorial real;

6. $\mathbb{R}_n[X] = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \mathrm{grad} f \leq n\}$ este un spațiu vectorial real.

2.2 Subspații vectoriale

Ca de obicei, atunci cînd se introduc structuri algebrice noi, se caută și conceptul de *substructură* corespunzător. În cazul de față, este vorba despre *subspații vectoriale.* Ca în cazul grupurilor, acestea se definesc simplu:

Definiție 2.2: Fie V un K-spațiu vectorial. Submulțimea $W \subseteq V$ se numește *subspațiu vectorial* al lui V, notat $W \hookrightarrow V$ dacă W la rîndul său are structură de K-spațiu vectorial.

Tot ca în cazul grupurilor, avem o teoremă de caracterizare care ne este de ajutor în calcule. Cîteva exemple simple (justificați!):

1. Mulțimea $\{0_V\}$ formează un subspațiu vectorial al lui V, numit subspațiul nul sau trivial. De asemenea, V este la rîndul său subspațiu al lui V. Aceste exemple se numesc *subspații improprii*, iar noi vom fi interesați de celelalte cazuri, numite *subspații proprii.*

2. $\mathbb{R}_n[X] \hookrightarrow \mathbb{R}[X]$, pentru orice număr natural n.

3. Submulțimea $W = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 - 3x_2 = 0\}$ este un subspațiu al spațiului $\mathbb{R}^2$.

4. Mulțimea matricelor pătratice de mărime n, superior triunghiulare, este un subspațiu al spațiului de matrice pătratice de mărime n.

5. În spațiul $\mathbb{R}^3$, dreptele și planele care conțin originea sînt subspații.

6. În spațiul $\mathbb{R}^2$, mulțimea $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x - 1\}$ *nu* formează un subspațiu.

2.3 Operații cu subspații

Fie V un K-spațiu vectorial și V_1, V_2 două subspații ale sale.

Definiție 2.3: Mulțimea $V_1 + V_2 = \{x \in V \mid \exists x_1 \in V_1, x_2 \in V_2, x = x_1 + x_2\}$ se numește *suma subspațiilor* V_1 și V_2.

Dacă, în plus, $V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$, atunci suma se numește *directă* și se notează $V_1 \oplus V_2$.

Observație 2.2: Dacă $V_1, V_2 \hookrightarrow V$, este imposibil ca $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. (Justificați!)

Cazul în care suma a două subspații este directă este foarte util prin următorul rezultat.

Propoziţie 2.1: *Suma dintre subspațiile V_1 și V_2 ale spațiului V este directă dacă și numai dacă orice vector din v se descompune în mod unic în $v = v_1 + v_2$, cu $v_1 \in V_1$ și $v_2 \in V_2$.*

Dacă acesta este cazul, spunem că v_1 este proiecția lui V pe V_1 și similar pentru V_2.

O altă operație permisă cu subspații este intersecția: Dacă V_1, V_2 sînt subspații ale lui V, atunci și $V_1 \cap V_2$ este subspațiu.

Reuniunea de subspații, însă, nu este subspațiu, în general!

2.4 Bază și dimensiune

Fie V un K-spațiu vectorial și $S = \{x_1, \dots, x_n\} \leq V$ o submulțime nevidă de vectori din V.

O expresie de forma $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ se numește *combinația liniară* a vectorilor x_i cu scalarii $\alpha_i \in K$.

Definiţie 2.4: Mulțimea S de mai sus se numește:

- *sistem liniar independent* dacă orice combinație liniară a vectorilor din S cu scalari din K care este nulă are toți scalarii nuli. Cu alte cuvinte, dacă $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$, atunci toți $\alpha_i = 0, \forall i$, adică singura combinație liniară nulă care folosește toți vectorii din S este cea trivială.
- *sistem de generatori* dacă orice vectori $v \in V$ se poate scrie în funcție de vectorii din S. Cu alte cuvinte, pentru orice $v \in V$, există scalarii $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ astfel încît $v = \sum \alpha_i x_i$. Dacă un spațiu vectorial admite un sistem de generatori cu un număr finit de vectori, atunci spațiul se numește *finit generat*. Dacă mulțimea $\{x_1, \dots, x_n\}$ este un sistem de generatori pentru V, notăm aceasta cu $V = \mathrm{Sp}\{x_1, \dots, x_n\}$, de la englezescul *span* (acoperire, întindere).
- *bază* dacă este simultan sistem liniar independent și sistem de generatori. Cu alte cuvinte, orice vector din V se poate scrie în funcție de vectorii din S, iar această scriere este unică.

Dacă S este bază, numărul de elemente din S se numește *dimensiunea* spațiului vectorial V, notat $\dim_K V$ sau mai simplu $\dim V$, cînd corpul de scalari este clar din context.

Un rezultat esențial este:

Teoremă 2.1: *Orice spațiu vectorial admite (cel puțin) o bază și orice două baze ale unui spațiu vectorial au același număr de elemente.*

Așadar, fie că este vorba despre spații finit dimensionale sau infinit dimensionale, știm sigur că o bază există, iar conceptul de dimensiune este corect definit.

În plus, în toate cazurile pe care le vom discuta în continuare, vom lucra doar cu spații finit dimensionale.

Exemple fundamentale:

1. Pentru spațiul real $\mathbb{R}^n$, o bază este:

$$\{e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)\},$$

   care se numește *baza canonică.*

2. Pentru spațiul real $\mathbb{R}[X]$, o bază este $\{1, X, X^2, X^3, \dots, X^n, \dots, \}$.

3. Pentru spațiul de matrice $M_n(\mathbb{R})$, o bază este formată din matricele care au toate elementele nule, mai puțin unul, care este egal cu 1. De exemplu, pentru $M_2(\mathbb{R})$, o bază este:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

4. Pentru spațiul real $\mathbb{C}$, o bază este formată din $\{1, i\}$.

5. Pentru spațiul real $\mathbb{R}$, o bază este $\{1\}$.

Să mai dăm cîteva detalii pentru cazul binecunoscut al spațiului real $\mathbb{R}^2$. Dimensiunea lui este 2 și o bază (baza canonică) este $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$. Elementele bazei pot fi asimilate cu versorii $\vec{i} = (1, 0)$ și $\vec{j} = (0, 1)$. Mai mult, dat un vector oarecare, $v = (a, b)$, el poate fi scris în funcție de elementele bazei în mod unic:

$$(a, b) = a \cdot (1, 0) + b \cdot (0, 1).$$

Scalarii a și b de mai sus se numesc *coordonatele* vectorului v în baza canonică B.

Similar, de exemplu, în spațiul $V = \mathbb{R}_3[X]$, baza canonică este $B = \{1, X, X^2, X^3\}$, iar dacă luăm polinomul

$$f = 3 - 5X + 2X^2 + 7X^3,$$

atunci coordonatele sale în baza canonică sînt $3, -5, 2, 7$.

2.5 Teorema lui Grassmann

Fie V un K-spațiu vectorial finit dimensional și V_1, V_2 două subspații ale sale. Teorema următoare leagă conceptul de dimensiune de operațiile cu subspații.

Teoremă 2.2 (Hermann Grassmann)**:** *În contextul și cu notațiile de mai sus, are loc egalitatea:*

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).$$

Comparați rezultatul de mai sus cu unul cunoscut, despre cardinale:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

De aici rezultă că o bază în $V_1 + V_2$ este reuniunea bazelor din V_1, respectiv V_2.

2.6 Exerciții

1. Arătați că următoarele mulțimi sînt subspații vectoriale în spațiile indicate. Determinați o bază și dimensiunea fiecărui subspațiu.

(a) $V_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x - y = 0\} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$;

(b) $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - y = 0\} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$;

(c) $V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$;

(d) $V_4 = \{p \in \mathbb{R}_2[X] \mid p(1) = 0\} \hookrightarrow \mathbb{R}_2[X]$;

(e) $V_5 = \{p \in \mathbb{R}_2[X] \mid p'(1) = 0\} \hookrightarrow \mathbb{R}_2[X]$;

(f) $V_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - y + z = 0, 2x + y = 0\} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$;

(g) $V_7 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A = A^t\} \hookrightarrow M_2(\mathbb{R})$;

(h) $V_8 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}A = 0\} \hookrightarrow M_2(\mathbb{R})$.

2. Se consideră mulțimea:

$$W = \left\{ A \in M_{2,3}(\mathbb{R}) \mid A = \begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & u & z \end{pmatrix}, x, y, z, u \in \mathbb{R}, x = y + z \right\}.$$

(a) Să se arate că $W \hookrightarrow M_{2,3}(\mathbb{R})$;

(b) Găsiți o bază a lui W și $\dim_{\mathbb{R}} W$.

3. Arătați că sistemul de vectori $\{v_1, v_2, v_3\}$ este liniar independent, unde:

$$v_1 = (1, -1, 2), \quad v_2 = (3, -1, 1), \quad v_3 = (0, 1, 5).$$

Este acesta și sistem de generatori?

4. Fie mulțimea $B = \{p_1, p_2, p_3\} \subseteq \mathbb{R}_2[X]$, unde:

$$p_1 = X^2 - 1, \quad p_2 = 2X + 1, \quad p_3 = X^2 + 3.$$

Arătați că B este o bază a lui $\mathbb{R}_2[X]$ și găsiți coordonatele vectorului $q = 3X^2 - X + 4$ în baza B.

5. Fie subspațiile:

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\}$$
$$V_2 = \mathrm{Sp}\{(1, -1, 2), (3, 1, 0)\}.$$

Găsiți cîte o bază și dimensiunea subspațiilor: V_1, V_2, $V_1 + V_2$, $V_1 \cap V_2$.
Este suma $V_1 + V_2$ directă?

6. Aceeași cerință ca la exercițiul 5 pentru spațiile:

(a)

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - y + z = 0\}$$
$$V_2 = \mathrm{Sp}\{(1, -1, 0), (2, 1, 1), (1, 1, 0)\}$$

(b)

$$V_1 = \{p \in \mathbb{R}_2[X] \mid p(2) = 0\}$$
$$V_2 = \mathrm{Sp}\{X, 2X^2 + 1, 3\}$$

(c)

$$V_1 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A = -A^t\}$$
$$V_2 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A = A^t\}$$

(d)

$$V_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - y + z = 0 \text{ și } 5y - 2t = 0\}$$
$$V_2 = \mathrm{Sp}\{(1, -1, 1, 0), (1, 0, 1, 0), (2, 0, 0, 2)\}.$$

7. Verificați dacă mulțimile S de vectori din spațiul vectorial V sînt liniar independente, iar în caz afirmativ, completați-le pînă la o bază a lui V:

(a) $V = \mathbb{R}^3, S = \{(1, -1, 0), (2, 0, 0)\}$;

(b) $V = \mathbb{R}^3, S = \{(1, 1, 1), (2, 1, 2)\}$;

(c) $V = \mathbb{R}^3, S = \{(1, -1, 2), (0, 2, 0), (1, 1, 1)\}$;

(d) $V = \mathbb{R}^3, S = \{(1,1,1),(2,2,0),(-1,1,1),(0,0,2)\}$;

(e) $V = \mathbb{R}_2[X], S = \{X, 1+2X\}$;

(f) $V = \mathbb{R}_2[X], S = \{X^2, -X\}$;

(g) $V = M_2(\mathbb{R}), S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$;

(h) $V = \mathbb{R}_3[X], S = \{2+X, 5-X, 3-2X+X^2\}$.

8. Verificați dacă mulțimile S de vectori din spațiul vectorial V sînt sisteme de generatori, iar în caz afirmativ, extrageți din ele o bază a lui V:

(a) $V = \mathbb{R}^3, S = \{(-1,2,0),(3,1,1),(0,1,1),(-1,2,5),(0,2,2)\}$;

(b) $V = \mathbb{R}^3, S = \{(0,0,0),(2,0,0),(1,0,1),(-1,1,1),(2,1,2)\}$;

(c) $V = \mathbb{R}_2[X], S = \{X, X^2, 1-3X, 2+2X-X^2, 1+X^2, 1-X, 1+X\}$;

(d) $V = \mathbb{R}_2[X], S = \{1-X, 1+X, 1-X^2, 1+X^2\}$.

9. Pentru spațiile vectoriale V de mai jos, arătați că mulțimea B este o bază, apoi găsiți coordonatele vectorului v în baza B:

(a) $V = \mathbb{R}^3, B = \{(1,-1,0),(2,0,1),(0,-1,2)\}, v = (1,2,3)$;

(b) $V = \mathbb{R}^3, B = \{(0,-1,2),(3,1,1),(2,-1,3)\}, v = (3,2,1)$;

(c) $V = \mathbb{R}^3, B = \{(1,1,1),(-2,3,1),(3,1,1)\}, v = (2,2,2)$;

(d) $V = \mathbb{R}_2[X], B = \{1+X, 1-X^2, 5\}, v = X$;

(e) $V = \mathbb{R}_2[X], B = \{3+X-2X^2, 1+3X, 2\}, v = 2+3X^2$;

(f) $V = \mathbb{R}_3[X], B = \{5-X, 2, 4+3X^2, 1+2X\}, v = 1+X+X^2+X^3$.

INDEX

eliminare gaussiană, 2

spații
    bază, 9
    subspații, 8
    vectoriale, 6
        sumă de subspații, 8

teorema
    Grassmann, 10