Analiză 1

Notițe de seminar

Adrian Manea
Curs: R. Purnichescu-Purtan

13 ianuarie 2020

Cuprins

SEMINAR 1

SERII DE NUMERE REALE POZITIVE

Intuitiv, o serie poate fi gîndită ca o sumă infinită, dată de o regulă a unui termen general. De exemplu, seria:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{3n}{5n^2 + 2n - 1}$$

are termenul general de forma $x_n = \dfrac{3n}{5n^2 + 2n - 1}$ și putem rescrie seria mai simplu $\sum x_n$, presupunînd implicit că indicele n ia cea mai mică valoare permisă și merge pînă la ∞.

Natura seriilor este fundamental diferită de cea a șirurilor prin faptul că seriile *acumulează*. De exemplu, să considerăm șirul constant $a_n = 1, \forall n$. Atunci, evident, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. Pe de altă parte, dacă luăm seria de termen general a_n, adică $\sum a_n$, observăm că aceasta are suma ∞, deci este divergentă.

În continuare, vom studia criterii prin care putem decide dacă o serie este sau nu convergentă. Dar înainte de aceasta, vom folosi foarte des două serii particulare, pe care le detaliem în continuare.

1.1 Seria geometrică

Pornim de la progresiile geometrice studiate în liceu. Fie (b_n) o progresie geometrică, cu primul termen b_1 și cu rația q. Deci termenul general are formula $b_n = b_1 q^{n-1}$. Atunci suma primilor n termeni ai progresiei se poate calcula cu formula:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Dacă, însă, în această sumă considerăm „toți“ termenii progresiei, obținem *seria* geometrică, anume $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$.

Suma acestei serii coincide cu $\lim_{n\to\infty} S_n$ și se poate observa cu ușurință că seria geometrică este convergentă dacă și numai dacă $|q| < 1$. Mai mult, în caz de convergență, suma seriei se poate calcula imediat ca fiind $b_1 \cdot \frac{1}{1-q}$.

1.2 Seria armonică

Această serie se mai numește *funcția zeta a lui Riemann* și se definește astfel:

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}, \quad s \in \mathbb{Q}.$$

Remarcăm cîteva cazuri particulare:

$$\begin{aligned}
\zeta(0) &= \sum 1 = \infty \\
\zeta(1) &= \sum \frac{1}{n} = \infty \\
\zeta(2) &= \sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \\
\zeta(-1) &= \sum n = \infty \\
\zeta(-2) &= \sum n^2 = \infty.
\end{aligned}$$

Rezultatul general este:

Teoremă 1.1: *Seria armonică $\zeta(s)$ este convergentă dacă și numai dacă $s > 1$.*

1.3 Criterii de convergență

Ne păstrăm în continuare în contextul seriilor cu termeni reali și pozitivi, pe care le scriem în general $\sum x_n$.

Convergența poate fi decisă ușor folosind criteriile de mai jos.

Criteriul necesar: Dacă $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$, atunci seria $\sum x_n$ este divergentă.

Observaţie 1.1: Să remarcăm că, așa cum îi spune și numele, criteriul de mai sus dă doar condiții necesare, nu și suficiente pentru convergență! De exemplu, pentru $\zeta(1)$, termenul general tinde către 0, dar seria este divergentă.

Criteriul de comparație termen cu termen: Fie $\sum y_n$ o altă serie de numere reale și pozitive.

- Dacă $x_n \leq y_n, \forall n$, iar seria $\sum y_n$ este convergentă, atunci și seria $\sum x_n$ este convergentă;
- Dacă $x_n \geq y_n, \forall n$, iar seria $\sum y_n$ este divergentă, atunci și seria $\sum x_n$ este divergentă.

Acest criteriu seamănă foarte mult cu criteriul de comparație de la șiruri. Astfel, avem că un șir mai mare (termen cu termen) decît un șir divergent este divergent, iar un șir mai mic (termen cu termen) decît un șir convergent este convergent. Celelalte cazuri sînt nedecise.

De asemenea, mai remarcăm că, în studiul seriei $\sum x_n$ apare seria $\sum y_n$, care trebuie aleasă convenabil astfel încît să aibă loc condițiile criteriului. În practică, cel mai des vom alege această nouă serie ca fiind o serie geometrică sau una armonică, cu rația, respectiv exponentul alese convenabil.

Criteriul de comparație la limită: Fie $\sum y_n$ o altă serie de numere reale și pozitive, astfel încît $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} \in (0, \infty)$. Atunci cele două serii au aceeași natură, adică $\sum x_n$ este convergentă dacă și numai dacă $\sum y_n$ este convergentă.

Criteriul raportului: Fie $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$.

- Dacă $\ell > 1$, atunci seria $\sum x_n$ este divergentă;
- Dacă $\ell < 1$, atunci seria $\sum x_n$ este convergentă;
- Dacă $\ell = 1$, atunci criteriul nu decide.

Criteriul radical: Fie $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$.

- Dacă $\ell > 1$, atunci seria $\sum x_n$ este divergentă;
- Dacă $\ell < 1$, atunci seria $\sum x_n$ este convergentă;
- Dacă $\ell = 1$, atunci criteriul nu decide.

1.4 Exerciții

1. Studiați convergența seriilor $\sum x_n$ în cazurile de mai jos:

(a) $x_n = \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n$; (D, necesar)

(b) $x_n = \frac{1}{n!}$; (C, raport)

(c) $x_n = \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$; (C, comparație la limită cu $\zeta(3/2)$)

(d) $x_n = \arcsin\frac{n+1}{2n+3}$; (D, necesar)

(e) $x_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$; (D, necesar)

(f) $x_n = \frac{n!}{n^{2n}}$; (C, raport)

(g) $x_n = \left(\frac{n+1}{3n+1}\right)^n$; (C, radical)

(h) $x_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$; (C, radical)

(i) $x_n = \frac{1}{7^n+3^n}$; (C, comparație cu geometrică)

(j) $x_n = \frac{2+\sin n}{n^2}$; (C, comparație cu armonică)

(k) $x_n = \frac{\sin^2 n}{n^2+1}$; (C, comparație cu armonică)

(l) $x_n = \sqrt{n^4+2n+1} - n^2$; (D, comparație cu armonică)

2*. Studiați convergența *șirurilor* cu termenul general x_n din exercițiul anterior și comparați cu comportamentul seriilor.

SEMINAR 2

CRITERII DE CONVERGENȚĂ (CONT.). SERII OARECARE

Pe lîngă criteriile prezentate în seminarul anterior, va mai fi de folos și un altul. În continuare, menționăm câ vom lucra cu o serie de forma $\sum x_n$ și sîntem în ipoteza $x_n \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}$.

Criteriul integral: Fie $f : (0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ o funcție descrescătoare și definim șirul:

$$a_n = \int_1^n f(t)dt.$$

Atunci seria $\sum f(n)$ este convergentă dacă și numai dacă șirul (a_n) este convergent.

2.1 Exerciții

1. Studiați natura următoarelor serii cu termeni pozitivi, cu termenul general x_n dat de:

(a) $x_n = \dfrac{1}{\ln n}$; (D, integral/comparație)

(b) $x_n = \dfrac{1}{n \ln n}$; (D, integral)

2.2 Serii alternante

În continuare, discutăm și cazul cînd termenii seriei pot fi negativi. Dar vom fi interesați doar de un caz particular, anume acela al seriilor *alternante*, adică acelea în care un termen este negativ, iar celălalt pozitiv. Mai precis, o serie $\sum x_n$ se numește *alternantă* dacă $x_n \cdot x_{n+1} < 0$, pentru orice n.

Singurul criteriu de convergență pe care îl folosim pentru aceste cazuri este:

Criteriul lui Leibniz: Fie $\sum_n (-1)^n x_n$ o serie alternantă. Dacă șirul (x_n) este descrescător și converge către 0, seria este convergentă.

De asemenea, vom mai fi interesați și de:

- *serii absolut convergente*, adică acele serii pentru care și seria modulelor, și seria dată sînt convergente;
- *serii semiconvergente*, adică acele serii pentru care seria inițială este convergentă, dar seria modulelor este divergentă.

Evident, cum $x \leq |x|$, rezultă că orice serie absolut convergentă este convergentă, dar reciproca nu este adevărată.

De exemplu, studiem seria $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$. Este o serie alternantă, deci:

- seria modulelor este $\zeta(1)$, care este divergentă;
- pentru seria dată, aplicăm criteriul lui Leibniz, cu șirul $x_n = \frac{1}{n}$, care este descrescător către 0, deci seria este convergentă.

Concluzia este că seria $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ este *semiconvergentă.*

Exercițiu: Folosind criteriul Leibniz, studiați natura seriei cu termenul general:

$$x_n = (-1)^n \frac{\log_a n}{n}, a > 1.$$

2.3 Aproximarea sumelor seriilor convergente

Presupunem că avem o serie convergentă și alternantă. Se poate arăta foarte simplu că, dacă notăm cu S suma seriei, iar cu s_n suma primilor n termeni, cu x_n termenul general al seriei, are loc inegalitatea:

$$\varepsilon = |S - s_n| \leq x_{n+1}. \tag{2.1}$$

Cu alte cuvinte, eroarea aproximației are ordinul de mărime al primului termen neglijat.

Deocamdată, exemplele simple pe care le studiem sînt de forma:

Exercițiu: Să se aproximeze cu o eroare mai mică decît ε sumele seriilor definite de termenul general x_n de mai jos:

(a) $x_n = \frac{(-1)^n}{n!}, \varepsilon = 10^{-3}$;

(b) $x_n = \frac{(-1)^n}{n^3 \sqrt{n}}, \varepsilon = 10^{-2}$.

În ambele cazuri, se folosește inegalitatea din (2.1), de unde se scoate n. Se obține $n = 6$ pentru primul exercițiu și $n = 4$ pentru al doilea.

Concluzia este că, pentru a obține valoarea sumei seriei cu o precizie de 3, respectiv 2 zecimale, este suficient să considerăm primii 5, respectiv primii 3 termeni ai seriei. Eroarea este comparabilă cu primul termen *neglijat* din serie.

SEMINAR 3

CONVERGENȚA SERIILOR — EXERCIȚII

Studiați convergența seriilor de forma $\sum x_n$. În cazul seriilor alternante, decideți și convergența absolută sau semiconvergența:

(1) $x_n = (\arctan 1)^n$; (C, radical)

(2) $x_n = \sqrt{n} \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$; (D, comparație la limită)

(3) $x_n = \frac{1}{n - \ln n}$; (D, comparație la limită)

(4) $x_n = (-1)^n \frac{n+1}{n^3}$; (C, Leibniz)

(5) $x_n = \frac{\ln n}{2n^3 - 1}$; (C, comparație)

(6) $x_n = \frac{\sqrt[n]{2}}{n^2}$; (C, comparație/integral)

(7) $x_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2}}$; (C, comparație)

(8) $x_n = \frac{1}{n \ln^2 n}$; (C, integral)

(9) $x_n = \frac{\ln n}{n^2}$; (C, comparație)

(10) $x_n = \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n}$; (D, comparație la limită)

(11) $x_n = \dfrac{(-1)^n \ln n}{\sqrt{n}}$; (C, Leibniz)

(12) $x_n = \dfrac{(-1)^n n!}{(2n)!}$; (C, Leibniz)

(13) $x_n = \dfrac{\arctan n}{n^2 + 1}$; (C, comparație/integral)

(14) $x_n = \dfrac{\sqrt{n}}{\ln(n+1)}$; (D, necesar)

(15) $x_n = (-1)^{n+1} \dfrac{2n+1}{3^n}$; (C, Leibniz)

(16) $x_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^3 + n^2} - n}{n^2}$; (parțial ACS)

(17) $x_n = (-1)^n \dfrac{n}{n^2 - 1}$; (parțial ACS)

(18) $x_n = (-1)^n (\sqrt{n^2 + 1} - n)$; (parțial ACS)

(19) $x_n = \dfrac{a^n}{2n^2 + 1}$; (discuție după a)

(20) $x_n = \left(\dfrac{n}{n+a}\right)^{n^2}$, $a > 0$; (discuție după a)

(21) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{2^{2n} \cdot n!}$ (parțial FIA)

(22) $x_n = \dfrac{a^n}{n^3}$, $a > 0$. (discuție după a)

SEMINAR 4

ȘIRURI ȘI SERII DE FUNCȚII

4.1 Convergență punctuală și uniformă

Fie $(f_n)_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ un șir de funcții reale, adică pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, avem cîte o funcție $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Dacă șirurile de numere reale au drept limită un număr real, șirurile de funcții au drept limită o funcție. Însă există două noțiuni de convergență de care vom fi interesați, anume *convergență punctuală* și *convergență uniformă*, descrise mai jos.

Definiție 4.1: Fie $(f_n)_n : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ un șir de funcții.

Spunem că șirul *converge punctual (simplu)* la funcția $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dacă are loc:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad \forall x \in D.$$

Notăm aceasta pe scurt prin $f_n \xrightarrow{PC} f$ sau $f_n \xrightarrow{s} f$, iar funcția f se va numi *limita punctuală* a șirului (f_n).

Un alt tip de convergență de care vom fi interesați este *convergența uniformă*. Aceasta se definește folosind un criteriu de caracterizare cu ε, dar în exerciții, vom folosi următoarea:

Teoremă 4.1: *Șirul de funcții (f_n) ca mai sus este* uniform convergent *la funcția f, notat $f_n \xrightarrow{u} f$ dacă are loc:*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0,$$

unde f este limita punctuală a șirului.

Se vede că proprietatea de convergență uniformă o implică pe cea de convergență simplă, dar reciproc este fals.

4.2 Transferul proprietăților

Dacă (f_n) este un șir de funcții reale, ne întrebăm care dintre proprietățile analitice ale termenilor șirului se transferă și funcției-limită.

Teoremă 4.2 (Transfer de continuitate)**:** *Fie* $f_n : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *un șir de funcții.*

Dacă fiecare f_n *este funcție continuă, iar șirul* (f_n) *converge uniform la funcția* f*, atunci funcția* f *este continuă.*

Teoremă 4.3 (Integrare termen cu termen)**:** *Fie* $f_n : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *un șir de funcții și* $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *o funcție.*

Dacă $f_n \xrightarrow{u} f$*, atunci are loc proprietatea de integrare termen cu termen, adică:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^n f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx, \quad \forall [a, b] \subseteq D.$$

Teoremă 4.4 (Derivare termen cu termen)**:** *Fie* $f_n : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *un șir de funcții și* $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *o funcție.*

Presupunem că funcțiile f_n *sînt derivabile pentru orice* $n \in \mathbb{N}$.

Dacă $f_n \xrightarrow{s} f$ *și dacă există o funcție* $g : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *astfel încît* $f_n' \xrightarrow{u} g$*, atunci* f *este derivabilă și* $f' = g$.

4.3 Serii de puteri

Considerăm o serie de funcții $\sum f_n$, dar în care fiecare funcție f_n este de tip polinomial. Acestea poartă numele de *serii de puteri*.

În general, o serie de puteri poate fi scrisă sub forma $\sum a_n(x-a)^n$, unde $a_n \in \mathbb{R}$ sînt coeficienții seriei, iar seria se numește *centratăîn a* (sau serie de puteri ale lui $(x-a)$). În majoritatea situațiilor vom lucra cu serii de puteri centrate în origine, deci cu $a = 0$.

Pentru seriile de puteri se calculează *raza de convergență*, care este un număr real R astfel încît:

- seria este absolut convergentă pentru $x \in (a - R, a + R)$;
- seria este divergentă pentru $|x| > R$;
- seria este uniform convergentă pentru $x \in [-r, r]$, pentru orice $0 < r < R$.

Această rază de convergență poate fi calculată cu una din două formule:

- $R = \left(\limsup \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}$;
- $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

De asemenea, două proprietăți importante pentru seriile de puteri, care rezultă din faptul că sînt serii de funcții polinomiale, sînt următoarele. Presupunem că seria de puteri $\sum a_n(x-a)^n$ este o serie de puteri convergentă la $S(x)$. Atunci:

- Seria derivatelor, $\sum na_n(x-a)^{n-1}$ are aceeași rază de convergență cu seria inițială și are suma $S'(x)$;
- Seria primitivelor, $\sum \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$, are aceeași rază de convergență cu seria inițială, iar suma sa este o primitivă a funcției S.

Cu alte cuvinte, seriile de puteri se pot deriva și integra termen cu termen.

4.4 Serii Taylor

Un caz particular de serii de funcții este acela al *seriilor Taylor*.

În general, o funcție care satisface anumite proprietăți analitice simple se poate dezvolta într-o serie de puteri după formula generală:

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

dezvoltare care se numește *seria Taylor a funcției f în jurulpunctului $x = x_0$*. Pentru cazul cînd $x_0 = 0$, seria se numește *serie Maclaurin*.

Dacă oprim seria Taylor la un anumit grad, obținem *polinomul Taylor* asociat funcției, care doar *aproximează* funcția inițială. În general, polinomul Taylor de grad n asociat funcției f în jurul punctului $x = a$ se definește prin:

$$T_{n,f,a} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Restul (eroarea de aproximare) se poate calcula prin:

$$R_{n,f,a} = f(x) - T_{n,f,a},$$

dar există și alte formule.

4.5 Exerciții

1. Să se studieze convergența punctuală și uniformă a șirurilor de funcții:

(a) $f_n : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \dfrac{1}{nx+1}, n \geq 0;$

(b) $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x^n - x^{2n}, n \geq 0;$

(c) $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}, n > 0;$

(d) $f_n : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2};$

(e) $f_n : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x};$

(f) $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2};$

(g) $f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x+n}{x+n+1};$

(h) $f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}.$

2. Să se arate că șirul de funcții dat de:

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{n} \arctan x^n$$

converge uniform pe $\mathbb{R}$, dar:

$$\left(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right)'_{x=1} \neq \lim_{n \to \infty} f_n'(1).$$

Rezultatele diferă deoarece șirul derivatelor nu converge uniform pe $\mathbb{R}$.

3. Să se arate că șirul de funcții dat de:

$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = nxe^{-nx^2}$$

este convergent, dar:

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_{n \to \infty} f_n(x)dx.$$

Rezultatul se explică prin faptul că șirul nu este uniform convergent. De exemplu, pentru $x_n = \frac{1}{n}$, avem $f_n(x_n) \longrightarrow 1$, dar, în general, $f_n(x) \longrightarrow 0$.

4. Să se dezvolte următoarele funcții în serie Maclaurin, precizînd și domeniul de convergență:

(a) $f(x) = e^x$;

(b) $f(x) = \sin x$;

(c) $f(x) = \cos x$;

(d) $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

(e) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$;

(f) $f(x) = \ln(1+x)$;

(g) $f(x) = \arctan x$;

(h) $f(x) = \ln(1+5x)$;

(i) $f(x) = 3\ln(2+3x)$.

5. Să se calculeze raza de convergență și mulțimea de convergență pentru următoarele serii de puteri:

(a) $\sum_{n\geq 0} x^n$;

(b) $\sum_{n\geq 1} n^n x^n$;

(c) $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n}$;

(d) $\sum_{n\geq 1} \dfrac{n^n x^n}{n!}$;

(e) $\sum \dfrac{(x-1)^{2n}}{n \cdot 9^n}$;

(f) $\sum \dfrac{(x+3)^n}{n^2}$.

6. Găsiți mulțimea de convergență și suma seriei:

$$\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Indicație: Se derivează termen cu termen și rezultă seria geometrică de rază $-x^2$, căreia i se poate calcula suma, care apoi se integrează.

7. Găsiți mulțimea de convergență și suma seriei:

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Indicație: $R = 1$ (raport), iar suma se poate afla derivînd termen cu termen. Rezultă (prin derivare) seria geometrică de rază $-x^2$, cu suma $\frac{1}{x^2+1}$, valabilă pentru $x \in (-1, 1)$.

Rezultă $f(x) = \arctan x + c$.

SEMINAR 5

PARȚIAL 2018–2019

1. (a) Determinați natura seriei numerice:

$$\sum_{n\geq 1} \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} \right) \cdot \sin \frac{1}{n}.$$

(b) Studiați convergența simplă și uniformă a șirului de funcții:

$$f_n : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \arctan \frac{x}{n^2}, \quad n \geq 1.$$

2. Determinați mulțimea de convergență și suma seriei de puteri:

$$\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{1}{n!} \cdot \frac{x^{2n-1}}{5^n}.$$

3. Folosind dezvoltarea în serie Taylor, să se calculeze $\cos \frac{1}{2}$ cu 2 zecimale exacte.

4. Se consideră funcția $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow (0, \infty)$ de clasă $\mathcal{C}^1$ și funcția:

$$f(x, y) = xy \cdot \varphi \left(\ln(x+y) + \frac{x}{y} \right),$$

cu $x + y > 0$.

Să se calculeze expresia:

$$E(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{x+y}{xy} \cdot f(x, y).$$

5. Fie funcția: $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 + 2xy - 4x - y$.

Pentru $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq -x^2 + 2x\}$, determinați valoarea minimă și valoarea maximă a funcției.

SEMINAR 6

INTEGRALE CURBILINII

6.1 Elemente de teorie

Integrale curbilinii de speța întîi

Fie $\gamma = \gamma(t)$ o curbă netedă, definită pe un interval $t \in [a, b]$. Se definește integrala curbilinie a unei funcții $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, f = f(x, y, z)$ prin formula:

$$\int_\gamma f(x, y, z)ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt.$$

De asemenea, cîteva cazuri particulare de interes sînt:

- *lungimea curbei* γ se obține pentru $f = 1$, deci:

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt;$$

- dacă funcția f reprezintă *densitatea* unui fir pe care îl aproximăm cu o curbă netedă γ, atunci *masa firului* se calculează cu formula:

$$M(\gamma) = \int_\gamma f(x, y, z)ds;$$

- în aceeași ipoteză de mai sus, *coordonatele centrului de greutate* al firului, x_i^G se calculează cu formula (am notat $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$):

$$x_i^G = \frac{1}{M}\int_\gamma x_i f(x_1, x_2, x_3)ds,$$

unde M este masa calculată mai sus.

Integrala curbilinie de speța a doua

Fie $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ o 1-formă diferențială. Se definește integrala curbilinie a formei ω în lungul curbei γ ca mai sus prin formula:

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b (P\circ\gamma)x' + (Q\circ\gamma)y' + (R\circ\gamma)z' dt,$$

unde $\gamma = \gamma(t)$, $t \in [a, b]$ este o parametrizare a curbei γ.

6.2 Exerciții

Calculați integralele curbilinii de mai jos:

Speța întîi:

(a) $\displaystyle\int_\gamma ye^{-x} ds$, unde parametrizarea curbei γ este dată de:

$$\gamma : \begin{cases} x(t) & = \ln(1+t^2) \\ y(t) & = 2\arctan t - t \end{cases}, \quad t \in [0, 1];$$

(b) $\displaystyle\int_\gamma (x^2 + y^2) \ln z ds$, unde parametrizarea curbei γ este dată de:

$$\gamma : \begin{cases} x(t) & = e^t \cos t \\ y(t) & = e^t \sin t \\ z(t) & = e^t \end{cases}, \quad t \in [0, 1];$$

(c) $\displaystyle\int_\gamma xyz ds$, unde parametrizarea curbei γ este:

$$\gamma : \begin{cases} x(t) & = t \\ y(t) & = \dfrac{2}{3}\sqrt{2t^3} \\ z(t) & = \dfrac{1}{2}t^2 \end{cases}, \quad t \in [0, 1];$$

(d) $\displaystyle\int_\gamma x^2 y ds$, unde $\gamma = [AB] \cup [BC]$, iar capetele segmentelor sînt $A(-1, 1), B(2, 1), C(2, 5)$;

(e) $\int_\gamma x^2 ds$, unde γ este dată de:

$$\gamma : x^2 + y^2 = 2, \quad x, y \geq 0;$$

(f) $\int_\gamma (x^2 + y^2) ds$, unde γ este sectorul de cerc $x^2 + y^2 = 1$, parcurs de la $A(0, -1)$ la $B(1, 0)$;

(g) Calculați lungimea segmentului $[AB]$, unde $A(1, 2), B(3, 5)$.

Speța a doua: $\int_\gamma \omega$ pentru:

(a) $\omega = (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$, unde γ este dată de:

$$\gamma : \begin{cases} x(t) &= \sqrt{t} \\ y(t) &= \sqrt{t+1} \end{cases}, \quad t \in [1, 4];$$

(b) $\omega = \dfrac{1}{y^2 + 1}dx + \dfrac{y}{x^2 + 1}dy$, unde γ este dată de:

$$\gamma : \begin{cases} x(t) &= t^2 \\ y(t) &= t \end{cases}, \quad t \in [0, 1];$$

(c) $\omega = \sqrt{x}dx + xy^2dy$, unde γ este parabola $y = x^2$, pentru $x \in [0, 1]$.

SEMINAR 7

EXAMEN 2018–2019

1. Calculați integrala:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^2} dx,$$

folosind integralele gamma și/sau beta.

2. Calculați lucrul mecanic efectuat de forța $\vec{F} = xy^2\vec{i} + 2x^2y\vec{j}$ asupra unei particule care circulă în linie dreaptă între punctele $O(0,0), A(2,2), B(2,4)$ și înapoi la O (în sens direct). Reprezentare grafică.

Indicație: Lucrul mecanic se calculează ca integrală curbilinie de speța a doua.

3. Să se calculeze $\iint_D 1 + \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$, unde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - y \leq 0, x \geq 0\}$.

Indicație: Se folosesc coordonate polare (translatate! cercul nu este centrat în origine) sau se descrie domeniul ca unul intergrafic.

4. Calculați volumul corpului cuprins între suprafețele de ecuație $x^2 + y^2 = -z$ și $z = y$. Reprezentare grafică.

Indicație: Se calculează integrală triplă de la o suprafață la cealaltă.

5. Se consideră suprafața S de ecuație $1 - z = (x-2)^2 + y^2$ cu bordul orientat $\partial S : 1 - z = (x-2)^2 + y^2$, cu $z = 0$.

Folosind formula lui Stokes, calculați integrala:

$$\int_{\partial S} (x^2 + y^3)dx + dy + zdz,$$

în care orientarea este în sensul de creștere a lui z.

INDEX