Ecuații diferențiale și teorie de cîmp

Notițe de seminar

Adrian Manea

Curs: R. Rădulescu

21 mai 2019

Cuprins

SEMINAR 1

CURBE ÎN PLAN ȘI ÎN SPAȚIU

1.1 Ecuații pentru curbe plane

Curbele plane pot fi reprezentate prin:

(a) Ecuații parametrice, de forma:

$$\alpha : \begin{cases} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{cases}, t \in (a, b)$$

(b) Ecuații carteziene explicite, de forma $y = f(x)$;

(c) Ecuație carteziană implicită, de forma $F(x, y) = 0$.

De exemplu, jumătatea superioară a cercului unitate poate fi dată:

- parametric, în forma:

$$\begin{cases} x &= \cos t \\ y &= \sin t \end{cases}, t \in (0, \pi);$$

- cartezian explicit, sub forma: $y = \sqrt{1 - x^2}$;
- cartezian implicit, sub forma $x^2 + y^2 = 1, y > 0$.

1.2 Tangenta și normala la curbă

Dată o curbă plană, în funcție de forma în care a fost prezentată, putem scrie ecuațiile pentru tangenta și normala la curbă.

Pentru reprezentarea parametrică:

- tangenta în punctul $P(x(t), y(t))$ are ecuația:

$$\frac{x - x(t)}{x'(t)} = \frac{y - y(t)}{y'(t)};$$

- normala în punctul $P(x(t), y(t))$ are ecuația:

$$x'(t)(x - x(t)) + y'(t)(y - y(t)) = 0.$$

Dacă avem curba dată cu reprezentarea carteziană implicită, presupunînd că funcția F este regulată:

- tangenta în punctul $A(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ are ecuația:

$$(x - x_0)\frac{\partial F}{\partial x}\bigg|_{(x_0,y_0)} + (y - y_0)\frac{\partial F}{\partial y}\bigg|_{(x_0,y_0)} = 0.$$

- normala în punctul $A(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ are ecuația:

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0)},$$

unde am notat cu $F_x = \dfrac{\partial F}{\partial x}$ și $F_y = \dfrac{\partial F}{\partial y}$.

1.3 Curbura unei curbe plane

Fie α o curbă regulată, dată de ecuații parametrice cu $t \in (a, b)$.

Se definește funcția:

$$k : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad k(t) = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}},$$

care se numește *curbura* curbei α, iar $\dfrac{1}{|k|}$ se numește *raza de curbură.*

1.4 Reperul Frenet în plan

Dată orice curbă plană, există un sistem de referință (reper sau sistem de coordonate) care este mobil și se deplasează odată cu curba. Acesta este dat de *versorul tangent* $\vec{T}$ și *versorul normal* $\vec{N}$ la curbă, împreună formînd *reperul Frenet.*

Pornind cu o curbă reprezentată parametric $\alpha = \alpha(x(t), y(t))$, versorii de mai sus se definesc astfel:

$$\begin{aligned}\vec{T}(t) &= \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{(x'(t), y'(t))}{\sqrt{x(t)'^2 + y(t)'^2}}\\ \vec{N}(t) &= R_{\frac{\pi}{2}}\vec{T}(t) = \frac{(-y'(t), x'(t))}{\|\alpha'(t)\|}.\end{aligned}$$

Astfel, reperul $(\vec{N}, \vec{T})$ este unul ortonormat și mobil.

1.5 Cercul osculator

Se definește cercul osculator ca fiind cercul de rază egală cu raza de curbură a curbei date, iar centrul cercului este în punctul de coordonate (x_0, y_0), definite prin ecuațiile:

$$\begin{aligned}x_0 &= x - y' \cdot \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}\\ y_0 &= y + x' \cdot \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}.\end{aligned}$$

1.6 Curbe în spațiu — Reprezentare

Similar cu cazul plan, curbele spațiale pot fi reprezentate prin:

(1) ecuații parametrice, sub forma:

$$\alpha : \begin{cases} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{cases}, t \in (a, b);$$

(2) ecuații carteziene implicite, sub forma unei intersecții de două suprafețe, sub forma generală:

$$\begin{cases} f(x, y, z) &= 0 \\ g(x, y, z) &= 0 \end{cases}.$$

1.7 Tangenta și planul normal

În cazul în care curba a fost dată cu reprezentarea parametrică, $\alpha = \alpha(x(t), y(t), z(t)), t \in (a, b)$, fie un punct $P(x(t), y(t), z(t))$ pe curbă.

- tangenta în punctul P are ecuația:

$$\frac{x - x(t)}{x'(t)} = \frac{y - y(t)}{y'(t)} = \frac{z - z(t)}{z'(t)};$$

- planul normal în punctul P are ecuația:

$$x'(t)(x - x(t)) + y'(t)(y - y(t)) + z'(t)(z - z(t)) = 0.$$

Dacă avem curba dată cartezian implicit, fie $P(x_0, y_0, z_0)$ un punct pe curbă.

- tangenta în punctul P are ecuația:

$$\frac{x - x_0}{\frac{D(f,g)}{D(y_0,z_0)}} = \frac{y - y_0}{\frac{D(f,g)}{D(z_0,x_0)}} = \frac{z - z_0}{\frac{D(f,g)}{D(x_0,y_0)}};$$

- planul normal în P are ecuația:

$$(x - x_0)\frac{D(f, g)}{D(y_0, z_0)} + (y - y_0)\frac{D(f, g)}{D_(z_0, x_0)} + (z - z_0)\frac{D(f, g)}{D(x_0, y_0)},$$

unde am notat în ambele ecuații jacobienii:

$$\frac{D(f, g)}{D(y_0, z_0)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{vmatrix}_{(y_0,z_0)}$$

și similar pentru celelalte coordonate.

1.8 Elementele Frenet în spațiu

Dată o curbă reprezentată parametric $\alpha = \alpha(t)$, se definesc elementele Frenet:

(1) cîmpul tangent: $\vec{T} = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}$;

(2) cîmpul binormal: $\vec{B} = \dfrac{\alpha' \times \alpha''}{\alpha' \times \alpha''}$;

(3) cîmpul normal principal: $\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T}$;

(4) curbura: $k = \dfrac{||\alpha' \times \alpha''||}{||\alpha'||^3}$;

(5) torsiunea: $\tau = \dfrac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{||\alpha' \times \alpha''||^2}$.

În funcție de aceste elemente, distingem următoarele situații:

- dacă $k = 0$, curba α este o (porțiune dintr-o) dreaptă;
- dacă $\tau = 0$, curba α este o curbă plană;
- dacă k este constantă pozitivă și $\tau = 0$, curba α este un arc de cerc;
- dacă raportul $\dfrac{\tau}{k}$ este constant, curba α este o (porțiune dintr-o) elice cilindrică;
- dacă k este o constantă pozitivă și τ este o constantă nenulă, atunci α este (un arc dintr-o) elice circulară.

1.9 Reperul Frenet în spațiu

Muchiile reperului Frenet în spațiu într-un punct $t = t_0$ sînt date de:

- dreapta determinată de punctul $\alpha(t_0)$ și vectorul tangent $\vec{T}(t_0)$;
- dreapta determinată de punctul $\alpha(t_0)$ și vectorul normal $\vec{N}(t_0)$;
- dreapta determinată de punctul $\alpha(t_0)$ și vectorul binormal $\vec{B}(t_0)$.

Fețele reperului Frenet sînt:

- planul osculator, care este planul determinat de vectorii $\vec{T}(t)$ și $\vec{N}(t)$;
- planul normal, detemrinat de vectorii $\vec{N}(t)$ și $\vec{B}(t)$;
- planul rectificant, determinat de $\vec{T}(t)$ și $\vec{B}(t)$.

Observaţie 1.1: Amintim, în general, ecuația planului determinat de vectorii $\vec{v} = (a, b, c)$ și $\vec{w} = (m, n, p)$, care trece prin punctul $P(x_0, y_0, z_0)$ are ecuația generală:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a & b & c \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0.$$

1.10 Exerciții

1. Fie curba plană $\alpha(t) = (t^2, 3t)$, $t \in \mathbb{R}$. Aflați normala și tangenta la curbă în punctul $A(1, -3)$.

2. Fie curba $\alpha : x^2 - y^3 - 3 = 0$.

(a) aflați tangenta și normala la curbă în punctul $A(-2, 1)$;

(b) parametrizați curba α.

3. Fie parabola $\alpha(t) = (t, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$.
Aflați ecuația cercului osculator în punctul $A(-2, 4)$ al curbei și ecuația carteziană a curbei.

4. Fie curba $\alpha(t) = (2\cos t, 2\sin t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

(a) Aflați elementele Frenet în punctul $A(-2, 0, \pi)$;

(b) Aflați ecuațiile carteziene ale curbei;

(c) Arătați că α este o elice;

(d) Aflați muchiile și fețele reperului Frenet.

5. Se dă curba $\alpha(t) = (t + t^2, t^2 - t, t^2 - t)$, $t \in \mathbb{R}$. Arătați că:

(a) α are planul osculator independent de t ;

(b) are torsiunea nulă;

(c) are vectorul binormal independent de t.

6. Fie curba:

$$\alpha : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 & = 2 \\ z & = 1 \end{cases}.$$

(a) Aflați dreapta tangentă și planul normal la curbă în $A(-1, 0, 1)$;

(b) Determinați o parametrizare a curbei.

SEMINAR 2

ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL ÎNTÎI

Dacă nu se precizează altfel, vom presupune că lucrăm cu funcții de forma $y = y(x)$, deci y' va însemna $\dfrac{dy}{dx}$.

2.1 Ecuații cu variabile separabile/separate

Acesta este cel mai simplu exemplu de ecuații diferențiale și se rezolvă direct prin integrare, după o reordonare corespunzătoare.

Exemplu 1: $(1 + x^2)yy' + x(1 + y^2) = 0$, știind că $y(1) = 2$.

Soluție: Separăm variabilele și diferențialele și obținem succesiv:

$$\begin{aligned}(1 + x^2)y \cdot \frac{dy}{dx} + x(1 + y^2) = 0 \iff \\ (1 + x^2)y\,dy &= -x(1 + y^2)dx \iff \\ \frac{y}{1 + y^2}dy &= -\frac{x}{1 + x^2}dx \iff \\ \frac{1}{2}\ln(y^2 + 1) &= -\frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + c.\end{aligned}$$

Pentru uniformitate, putem pune $\frac{1}{2}\ln c$ în locul constantei.

Rezultă $1 + y^2 = \dfrac{c}{1 + x^2}$, cu $c > 0$, pentru existența logaritmului.

Înlocuim în condiția inițială $y(1) = 2$ și obținem $c = 10$. În fine:

$$y(x) = \sqrt{\frac{9 - x^2}{1 + x^2}}, \quad x \in (-3, 3),$$

punînd și condițiile de existență.

În unele cazuri, este util să facem schimbări de variabilă. De exemplu:
Exemplu 2: $y' = \sin^2(x - y)$.
Soluție: Notăm $x - y = z$ și avem că $y' = 1 - z'$, de unde, în ecuație, obținem succesiv:

$$
\begin{aligned}
z' &= 1 - \sin^2 z = \cos^2 z \implies \\
\frac{dz}{dx} &= \cos^2 z \implies \\
\frac{dz}{\cos^2 z} &= dx \implies \\
\tan z &= x + c \implies \\
\tan(x - y) &= x + c,
\end{aligned}
$$

care poate fi prelucrată pentru a obține $y(x)$ sau lăsată în forma implicită.

2.2 Ecuații liniare

Forma generală a acestor ecuații este:

$$y' = P(x) \cdot y + Q(x).$$

Distingem două cazuri:

- Dacă $Q = 0$, atunci ecuația se numește *omogenă*;
- Dacă $Q \neq 0$, ecuația este *neomogenă*.

Metoda generală de rezolvare este să folosim formula:

$$y(x) = c \cdot \exp\left(- \int_{x_0}^{x} P(t) dt \right),$$

pentru a obține o *soluție particulară pentru ecuația omogenă*. Apoi, din teorie, știm că putem folosi *metoda variației constantelor (Lagrange)* pentru a obține soluția ecuației neomogene. Pentru aceasta, în locul constantei c vom considera o funcție $c(x)$ și înlocuim în ecuația inițială.

Pe scurt, pentru ecuația liniară:

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

avem:

- Soluția particulară pentru varianta omogenă $y_p = c \cdot \exp\Big(- \int P(x)dx \Big)$;
- Soluția generală (din Lagrange):

$$y_g = \exp\Big(- \int P(x)dx \Big) \cdot \Big(C + \int Q(x) \cdot \exp\Big(\int P(x)dx \Big) dx \Big)$$

Soluția generală a problemei este suma între soluția particulară și cea generală.
Exemplu 1: $y' + y \sin x = -\sin x \cos x$.
Soluție: Putem înlocui direct în formulă și obținem $y = C \cdot e^{\cos x} - \cos x - 1$.

Exemplu 2: $y' + xy = xe^{-\frac{x^2}{2}}$.
Soluție: Asociem ecuația omogenă $y' + xy = 0$, pe care o rescriem:

$$\frac{dy}{dx} + xy = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{y} = -xdx \Longrightarrow y_p = ce^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Acum, folosind metoda lui Lagrange, căutăm o soluție de forma $y(x) = c(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Înlocuim în ecuația inițială și găsim $y' + xy = c'(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$, dar, comparînd cu ecuația dată, găsim $c'(x) = x$, de unde $c(x) = \dfrac{x^2}{2}$.

Așadar, avem $y_g = \dfrac{x^2}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}$, iar soluția finală este suma celor două:

$$y = \Big(\frac{x^2}{2} + c \Big) e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Exemplu 3: $2xyy' + 2y^2 - x^4 = 0$.

Soluție: Putem face o substituție $y^2 = z$, cu care ecuația devine $z' + \frac{2}{x}z = x^3$. Avem, în acest caz, $P(x) = \frac{2}{x}$, iar $Q(x) = x^3$. Cum $\int P(x)dx = 2\ln x$, iar $\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = \frac{x^6}{6}$, obținem soluția generală:

$$y(x) = \frac{1}{x}\sqrt{c + \frac{x^6}{6}}, x > 0.$$

2.3 Ecuația Bernoulli

Forma generală a ecuației Bernoulli este:

$$y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha.$$

Remarcăm că:

- Dacă $\alpha = 0$, obținem o ecuație omogenă;
- Dacă $\alpha \neq 0$, obținem o ecuație neomogenă, ca în secțiunea anterioară.

Pașii de rezolvare sînt:

- Se împarte cu y^α și obținem:

$$y^{-\alpha}y' + P(x)y^{1-\alpha} = Q(x);$$

- Facem substituția $y^{1-\alpha} = z$ și ajungem la ecuația:

$$(1-\alpha)y^{1-\alpha} \cdot y' = z',$$

de unde $\dfrac{z'}{1-\alpha} + P(x)z = Q(x)$, care este o ecuație neomogenă, rezolvabilă ca în secțiunea anterioară.

Exemplu 1: $y' - \dfrac{y}{3x} = \dfrac{1}{3}y^4 \ln x, x > 0.$
Soluție: Avem $\alpha = 4$, deci împărțim la y^4 și obținem:

$$y^{-4}y' - \frac{1}{3x}y^{-3} = \frac{1}{3}\ln x.$$

Cu substituția $z = y^{-3}$, ajungem la:

$$z' = -3y^4y' \Longrightarrow z' + \frac{1}{x}z = -\ln x.$$

Avem $P(x) = \frac{1}{x}$ și $Q(x) = -\ln x$, deci putem aplica formula pentru soluția generală a ecuației neomogene:

$$z = e^{-\ln x}\left(c - \int \ln x e^{\ln x} dx\right) = \frac{1}{x}\left(c - \int x \ln x\right).$$

În fine:

$$y^{-3} = \frac{c}{x} + \frac{x}{4} - \frac{x}{2}\ln x, x > 0.$$

Exemplu 2: $y' + \dfrac{2}{3x}y = \dfrac{1}{3}y^2.$
Soluție: Avem $\alpha = 2$, deci împărțim la y^2 și ajungem la:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{2}{3x} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{3}.$$

Cu substituția $z = \frac{1}{y}$, avem $z' + \frac{2}{3x}z = \frac{1}{3}$, care este liniară și neomogenă.

Lucrăm cu ecuația omogenă $z' + \frac{2}{3x} = 0$, de unde $\frac{z'}{z} = \frac{2}{3x}$, care este cu variabile separabile și găsim $z = cx^{\frac{2}{3}}$, *pentru ecuația omogenă.*

Aplicăm acum metoda variației constantelor și luăm $z = c(x)x^{\frac{2}{3}}$. După înlocuire în ecuația inițială, avem $c(x) = -x^{\frac{1}{3}}$.

Soluția finală este acum suma $z = -x + cx^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{y}$.

2.4 Ecuația Riccati

Forma generală este:

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x).$$

Observăm că:

- Dacă $Q = 0$, avem o ecuație liniară și neomogenă;
- Dacă $R = 0$, este o ecuație Bernoulli, cu $\alpha = 2$.

În general, ecuația Riccati se rezolvă știind o soluție particulară y_p. Apoi, folosind formula $y = y_p + z$ și înlocuind, se ajunge la o ecuație Bernoulli:

$$z' + \left(p(x) + 2q(x)y_p\right)z + q(x)z^2 = 0.$$

Pentru a găsi soluții particulare, următoarea teoremă ne ajută într-un anumit caz:

Teoremă 2.1: *Dacă avem ecuația Riccati de forma:*

$$y' = Ay^2 + \frac{B}{x}y + \frac{C}{x^2},$$

unde $(B+1)^2 - 4AC \geq 0$, *atunci o soluție particulară este* $y_p = \frac{1}{x}$.

Exemplu 1: $y' = -\frac{1}{3}y^2 - \frac{2}{3x^2}, x > 0$.

Soluție: Aplicînd teorema, putem lua $y_p = \frac{1}{x}$ ca soluție particulară. Apoi căutăm o soluție generală de forma $y = \frac{1}{x} + z$, dar, pentru conveniență, putem lua $z \longrightarrow \frac{1}{z}$. Înlocuim în ecuație și obținem succesiv:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2} &= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{xz} + \frac{1}{z^2}\right) - \frac{2}{3x} \Longrightarrow \\
z' - \frac{2}{3x}z = \frac{1}{3} &\Longrightarrow \\
z &= Cx^{\frac{2}{3}} + x,
\end{aligned}$$

de unde $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{Cx^{\frac{2}{3}} + x}$, cu $x > 0$.

2.5 Ecuația Clairaut

Forma generală a ecuației este:

$$y = xy' + \varphi(y').$$

Pentru rezolvare, se notează $y' = p$ și, înlocuind, avem:

$$y = xp + \varphi(p).$$

Derivăm după x și găsim:

$$p = p + x \cdot \frac{dp}{dx} + \varphi'(p) \cdot \frac{dp}{dx},$$

de unde $\left(x + \varphi'(p)\right) \frac{dp}{dx} = 0$.

Mai departe:

- Dacă $\dfrac{dp}{dx} = 0$, atunci $p = C$ și avem $y = C \cdot x + \varphi(c)$, ca soluție generală;
- Dacă $x + \varphi'(p) = 0$, obținem *soluția singulară*, care se prezintă parametric, adică în funcție de p, astfel:

$$\begin{cases} x &= -\varphi'(p) \\ y &= -p\varphi'(p) + \varphi(p) \end{cases}$$

Exemplu: $y = xy' - y'^2$.
Soluție: Notăm $y' = p$, deci $y = xp - p^2$.
Obținem, înlocuind în ecuație:

$$pdx + xdp - 2pdp = pdx \Longrightarrow (x - 2p)dp = 0.$$

Distingem cazurile:

- Dacă $dp = 0$, atunci $p = C$ și $y = Cx - C_2$, o soluție particulară;
- Soluția singulară se reprezintă parametric, corespunzător cazului $x - 2p = 0$, prin:

$$\begin{cases} x &= 2p \\ y &= p^2 \end{cases}$$

Revenind la y, găsim $y = \dfrac{x^2}{4}$.

Observație 2.1: Geometric, soluția generală este *înfășurătoarea* soluției particulare, adică o curbă care aproximează, din aproape în aproape, dreapta soluției particulare.

2.6 Ecuații exacte. Factor integrant

Forma generală este:

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0.$$

2.6.1 Rezolvare cu formulă

Dacă are loc $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, atunci ecuația se numește *exactă*, iar soluția ei generală se prezintă prin:

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t)dt,$$

pentru orice (x, y) din domeniul de definiție, iar (x_0, y_0) un punct arbitrar fixat, în jurul căruia determinăm soluția.

Observație 2.2: Pentru simplitate, vom mai folosi notațiile $P_y = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ și similar pentru Q_x. Deci condiția de exactitate se mai scrie, pe scurt, $P_y = Q_x$.

Exemplu: $(3x^2 - y) + (3y^2 - x)y' = 0$.

Soluție: Remarcăm că avem $P(x, y) = 3x^2 - y$ și $Q(x, y) = 3y^2 - x$, deci $P_y = Q_x = -1$, ecuația fiind exactă. Obținem direct, din formula pentru soluția generală:

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - xy + x_0 y_0 - x_0^3 - y_0^3.$$

Cum (x_0, y_0) sînt fixate, putem prezenta soluția în *forma implicită* $y = \varphi$, unde $\varphi = x^3 + y^3 - xy = c$, constanta fiind expresia de (x_0, y_0) de mai sus.

2.6.2 Rezolvare directă

Din teorie, știm că dacă o ecuație diferențială este exactă, ea se mai numește *cu diferențiale totale*, deoarece se poate arăta că, în cazul ecuației scrisă în forma generală $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, există o funcție $F(x, y)$ de clasă (cel puțin $\mathcal{C}^1$) astfel încît $F_x = P(x, y)$ și $F_y = Q(x, y)$.

Să vedem acest lucru pe exemplul de mai sus.

Avem ecuația:

$$(3x^2 - y)dx + (3y^2 - x)dy = 0.$$

Avem $P(x, y) = 3x^2 - y$ și $Q(x, y) = 3y^2 - x$. Am văzut că ecuația este exactă, deci există o funcție $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clasă (cel puțin) $\mathcal{C}^1$ astfel încît $F_x = P$ și $F_y = Q$. Deci:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - y \Longrightarrow F(x, y) = \int 3x^2 - y dx = x^3 + xy + c(y)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - x \Longrightarrow F(x, y) = \int 3y^2 - x dy = y^3 + xy + c(x),$$

unde constantele de integrare pot să depindă, eventual, de variabilele în funcție de care *nu* se face integrarea.

Deoarece avem aceeași funcție $F(x, y)$ pe care o căutăm, cele două expresii de mai sus trebuie să coincidă, deci $c(x) = x^3$, iar $c(y) = y^3$. În final:

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - xy + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

este funcția căutată, care dă *soluția implicită* a ecuației.

2.6.3 Cazul inexact

Dacă ecuația nu este exactă, se caută *un factor integrant*, adică o funcție $\mu(x, y)$ cu care se înmulțește ecuația pentru a deveni exactă.

Există două cazuri particulare în care factorul integrant se găsește simplu:

- Dacă expresia $\dfrac{P_y - Q_x}{Q}$ depinde doar de x, se poate lua $\mu = \mu(x)$;
- Dacă expresia $\dfrac{Q_x - P_y}{P}$ depinde doar de y, se poate lua $\mu = \mu(y)$.

În celelalte cazuri, factorul integrant, de obicei, se dă în enunțul problemei, deoarece este dificil de găsit, dar o teoremă de existență ne arată că el poate fi mereu găsit.

Observaţie 2.3: Pentru a reține mai ușor condițiile simple de căutare a factorului integrant, pornim cu ecuația în forma generală, înmulțim cu μ, ceea ce ne schimbă și P și Q, apoi scriem condiția de exactitate. Pentru primul caz, de exemplu, obținem:

$$\frac{\mu_x}{\mu} = \frac{P_y - Q_x}{Q},$$

deci dacă membrul drept depinde doar de x, putem lua $\mu = \mu(x)$ și similar în al doilea caz.

Odată găsit factorul integrant, să presupunem $\mu = \mu(x)$, integrăm condiția de exactitate și găsim:

$$\ln \mu(x) = \int \varphi(x) + c,$$

unde $\varphi(x) = \dfrac{P_y - Q_x}{Q}$ și deci $\mu(x) = \exp\Big(\int \varphi(x) dx \Big)$.

Exemplu: $(1 - x^2 y) + x^2(y - x)y' = 0$.

Soluție: Observăm că ecuația nu este exactă, dar verificînd condițiile pentru factorul integrant, putem lua $\mu(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Înmulțim ecuația cu μ și găsim:

$$\left(\frac{1}{x^2} - y\right) + (y - x)y' = 0,$$

care este exactă. Atunci putem scrie direct soluția generală:

$$F(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{1}{x} - xy + C,$$

soluția implicită fiind $\dfrac{y^2}{2} - \dfrac{1}{x} - xy = \text{const.}$.

Exercițiu: Rezolvați ecuația $y^2(2x - 3y) + (7 - 3xy^2)y' = 0$, căutînd (după verificare) un factor integrant $\mu(y)$.

2.7 Ecuația Lagrange

Forma generală a ecuației Lagrange este:

$$A(y') \cdot y + B(y') \cdot x + C(y') = 0.$$

Dacă avem $A(y') \neq 0$, putem împărți și obținem:

$$y = f(y') + g(y'), \quad f(y') = \frac{-B(y')}{A(y')}, g(y') = -\frac{C(y')}{A(y')}.$$

Dacă $f(y') = y'$, obținem o ecuație de tip Clairaut.
Altfel, fie $y' = p$, deci $dy = pdx$. Înlocuim în ecuația inițială și găsim:

$$y = xf(p) + g(p) \Longrightarrow dy = f(p)dx + xf'(p)dp + g'(p)dp.$$

Egalăm cele două expresii pentru dy și ajungem la:

$$pdx = f(p)dx + xf'(p)dp + g'(p)dp.$$

În fine:

$$\big(f(p) - p\big)dx + \big(xf'(p) + g'(p)\big)dp = 0.$$

În acest caz, dacă $f(p)$ este o constantă, obținem o ecuație cu variabile separabile.

Altfel, putem împărți la $(f(p) - p)dp$ și ajungem la:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{f'(p)}{f(p) - p}x + \frac{g'(p)}{f(p) - p} = 0.$$

Aceasta este o ecuație liniară și neomogenă în $x(p)$ și o rezolvăm corespunzător.
Dacă $f(p) = p$, obținem o soluție particulară.

Exemplu: $y = x - \frac{4}{9}y'^2 + \frac{8}{27}y'^3$.
Soluție: Facem notația $y' = p$, deci $dy = pdx$. Obținem:

$$y = x - \frac{4}{9}p^2 + \frac{8}{27}p^3 \Longrightarrow dy = dx - \frac{8}{9}pdp + \frac{8}{9}p^2dp.$$

Rezultă $pdx = dx - \frac{8}{9}pdp + \frac{8}{9}p^2dp$, deci:

$$(p - 1)(dx - \frac{8}{9}pdp) = 0.$$

Distingem cazurile:

Dacă $dx = \frac{8}{9}pdp$, atunci $x = \frac{4}{9}p^2 + c$ și, înlocuind în ecuația inițială, găsim $y = \frac{8}{27}p^3 + c$. Soluția poate fi prezentată parametric:

$$\begin{cases} x &= \frac{4}{9}p^2 + c \\ y &= \frac{8}{27}p^3 + c \end{cases}$$

Dacă $p = 1$, avem o soluție particulară $y = x + c$, iar constanta se obține a fi $c = -\frac{4}{27}$, din ecuația inițială.

2.8 Exerciții

Rezolvați următoarele ecuații diferențiale, precizînd și tipul lor:

(1) $xy' - y + 2x^2y^2 = 0$; (Bernoulli)

(2) $(3x^2 + 2)y' + xy^2 = 0$; (exactă)

(3) $(2x - y + 2)dx + (-x + y + 1)dy = 0$; (exactă)

(4) $xy' = 4y + x^2\sqrt{y}$; (Bernoulli)

(5) $(x^2+1)y' + 2xy^2 = 0$; (exactă)

(6) $(2x+y+1)dx + (x+y-1)dy = 0$; (exactă)

(7) $y' = \dfrac{x^2}{y}$; (variabile separabile)

(8) $y' = \dfrac{y}{x} + x$; (liniară, neomogenă)

(9) $3x^2y dx - (\ln y + x^3)dy = 0$; (exactă)

(10) $y' = x^2y$; (variabile separabile)

(11) $y' = \dfrac{x^2+y^2}{2xy}$; (Bernoulli)

(12) $y' = 2xy^2$; (variabile separabile)

(13) $y' = \dfrac{4x}{y^2}$; (variabile separabile)

(14) $(x+y+1)dx + (x - y^3 + 3)dy = 0$; (exactă)

(15) $y' = \dfrac{1}{x}y - \dfrac{\ln x}{x}$; (liniară, neomogenă)

(16) $y' = -\dfrac{y}{x} + \dfrac{e^x}{x}$; (liniară, neomogenă)

(17) $(x+y^2)dx + y(1-x)dy = 0$; (exactă)

(18) $3x^2y dx - (x^3 + \ln y)dy = 0$; (exactă)

(19) $y' = -2y + x^2 + 2x$; (liniară, neomogenă)

(20) $y' = \dfrac{2y}{x} + \dfrac{3}{x^2}$; (liniară, neomogenă)

(21) $y' = 2xy + x^3y^{\frac{1}{2}}$; (Bernoulli)

(22) $y' = -\dfrac{1}{x}y + \dfrac{\ln x}{x}y^2$. (Bernoulli)

SEMINAR 3

ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDIN SUPERIOR

3.1 Ecuații liniare de ordinul n cu coeficienți constanți

Forma generală este:

$$L[y] = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x),$$

cu $a_i \in \mathbb{R}$ constante.

Dacă avem $f(x) = 0$, atunci ecuația se numește *omogenă*.

Avem o metodă algebrică de a rezolva această ecuație, folosind:

Definiție 3.1: Se numește *polinomul caracteristic* atașat ecuației omogene $L[y] = 0$ polinomul:

$$F(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n,$$

iar $F(r) = 0$ se numește *ecuația caracteristică* atașată ecuației diferențiale.

Folosind această noțiune, putem rezolva direct ecuația, ținînd seama de următoarele cazuri posibile:

Teoremă 3.1: *(1) Dacă ecuația caracteristică $F(r) = 0$ are rădăcini reale și distincte r_i, atunci un sistem fundamental de soluții este dat de:*

$$\left\{ y_i(x) = e^{r_i x} \right\}_{i=1,\dots,n}.$$

(2) Dacă printre rădăcinile lui $F(r)$ există și rădăcini multiple, de exemplu r_1, cu ordinul de multiplicitate p, atunci pentru această rădăcină avem p soluții liniar independente (pe lîngă celelalte):

$$y_1(x) = e^{r_1 x}, y_2(x) = x e^{r_1 x}, \dots, y_p(x) = x^{p-1} e^{r_1 x}.$$

(3) Dacă printre rădăcinile ecuației caracteristice avem și rădăcini complexe, de exemplu $r = a + ib$ și $\overline{r} = a - ib$, atunci fiecărei perechi de rădăcini complexe conjugate îi corespund două soluții liniar independente (pe lîngă celelalte):

$$y_1(x) = e^{ax}\cos bx, \quad y_2(x) = e^{ax}\sin bx.$$

(4) Dacă ecuația caracteristică are rădăcini complexe ca mai sus, cu ordinul de multiplicitate p, atunci lor le corespund $2p$ soluții liniar independente:

$$\left\{ y_j(x) = x^{j-1}e^{ax}\cos bx \right\}_{j=1,\dots p}, \quad \left\{ y_k(x) = x^{k-p-1}e^{ax}\sin bx \right\}_{k=p+1,\dots,2p}.$$

De exemplu: $y'' - y = 0$, cu condițiile $y(0) = 2$ și $y'(0) = 0$.

Soluție: Ecuația caracteristică este $r^2 - 1 = 0$, deci $r_{1,2} = \pm 1$. Sîntem în primul caz al teoremei, deci un sistem fundamental de soluții este:

$$y_1(x) = e^{-x}, \quad y_2(x) = e^{x}.$$

Soluția generală este $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x}$.

Folosind condițiile Cauchy, obținem $c_1 = c_2 = 1$, deci soluția particulară este:

$$y(x) = e^{-x} + e^{x}.$$

Observaţie 3.1: Dacă ecuația inițială $L[y] = f(x)$ *nu* este omogenă, putem rezolva folosind *metoda variației constantelor (Lagrange).*

În acest caz, metoda variației constantelor presupune următoarele etape. Fie ecuația neomogenă scrisă în forma:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = f(x).$$

Pentru simplitate, vom presupune $n = 2$ și fie o soluție particulară de forma:

$$y_p(x) = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2.$$

Atunci, prin metoda variației constantelor, vom determina funcțiile $c_1(x), c_2(x)$ ca soluții ale sistemului algebric:

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 & = 0 \\ c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' & = \dfrac{f(x)}{a_n(x)} \end{cases}$$

De exemplu: $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x+1}$.

Soluție: Asociem ecuația omogenă, care are ecuația caracteristică $r^2 + 3r + 2 = 0$, cu rădăcinile $r_1 = -1, r_2 = -2$. Așadar, soluția generală a ecuației omogene este:

$$\overline{y}(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}.$$

Determinăm o soluție particulară $y_p(x)$ cu ajutorul metodei variației constantelor. Mai precis, căutăm:

$$y_p(x) = c_1(x)e^{-x} + c_2(x)e^{-2x}.$$

Înlocuind în ecuația neomogenă, rezultă sistemul:

$$\begin{cases} c_1'(x)e^{-x} + c_2'(x)e^{-2x} & = 0 \\ -c_1'(x)e^{-x} - 2c_2'(x)e^{-2x} & = \frac{1}{1+e^x} \end{cases}$$

Rezolvînd ca pe un sistem algebric, obținem:

$$c_1'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}, \quad c_2'(x) = -\frac{e^{2x}}{1+e^x},$$

de unde obținem:

$$c_1(x) = \ln(1+e^x), \quad c_2(x) = -e^x + \ln(1+e^x).$$

În fine, înlocuim în soluția particulară y_p și apoi în cea generală, $y(x) = \overline{y}(x) + y_p(x)$.

Un alt exemplu: $y'' - y = 4e^x$.

Soluție: Ecuația caracteristică $r^2 - 1$ are rădăcinile $r_{1,2} = \pm 1$, deci soluția generală a ecuației liniare omogene este $y_0(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$.

Căutăm acum o soluție particulară a ecuației neomogene, folosind metoda variației constantelor. Așadar, căutăm $y_p(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{-x}$. Din condiția ca y_p să verifice ecuația liniară neomogenă, obținem sistemul:

$$\begin{cases} c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^{-x} = 0 \\ c_1'(x)e^x - c_2'(x)e^{-x} = 4e^x \end{cases}$$

Rezultă $c_1'(x)e^x = 2e^x$, deci $c_1'(x) = 2 \Longrightarrow c_1(x) = 2x$, iar $c_2'(x)e^{-x} = -2e^x$, deci $c_2(x) = -e^{2x}$.

În fine, soluția particulară este $y_p(x) = 2xe^x - e^x$, iar soluția generală:

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + e^x(2x - 1).$$

3.2 Exerciții

1. Rezolvați următoarele ecuații diferențiale liniare de ordin superior:

(a) $y^{(3)} + 4y^{(2)} + 3y^{(1)} = 0;$

(b) $y^{(2)} + 4y^{(1)} + 4y = 0;$

(c) $y^{(3)} + y = 0;$

(d) $y^{(4)} + 4y^{(2)} = 0;$

(e) $y^{(2)} - 2y^{(1)} + y = \frac{1}{x}e^x;$

(f) $y^{(2)} + y = \frac{1}{\cos x};$

(g) $y^{(3)} + y^{(1)} = \tan x;$

(h) $y^{(3)} + 2y^{(2)} = x + 2.$

Observaţie 3.2: Tipurile de ecuații pe care le regăsiți mai jos sînt clasificate pentru că au forme generale comune. Dar nu este necesar să învățați numele acestor tipuri. Concentrați-vă pe metodele de rezolvare și veți constata că, indiferent de tipul căreia aparține ecuația, metoda de rezolvare este intuitivă. Așadar, nu mai este neapărat cazul obligatoriu, ca pentru ecuațiile de ordinul întîi, ca la tipul X de ecuație să se aplice exact metoda corespunzătoare.

3.3 Ecuații rezolvabile prin cuadraturi

Acestea sînt ecuații care se pot rezolva prin integrări succesive. Astfel, forma lor generală este $y^{(n)} = f(x)$, în varianta neomogenă. Soluția generală va depinde de n constante arbitrare, rezultate în urma integrărilor succesive.

Exemplu:

$$y'' = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\pi}{6}.$$

Soluție: Integrăm succesiv și obținem:

$$\begin{aligned} y' &= x \arcsin x - \frac{\pi}{6}x + c_1 \\ y &= \frac{x^2}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4}\arcsin x - \frac{\pi}{12}x^2 + c_1 x + c_2. \end{aligned}$$

Dacă nu se dau condiții inițiale, soluția rămîne exprimată ca mai sus, adică în funcție de constantele c_1 și c_2.

Cazul omogen se rezolvă și mai simplu: dacă $y^{(n)} = 0$, atunci y este un polinom de x de gradul $n - 1$.

3.4 Ecuații de forma $f(x, y^{(n)}) = 0$

Avem două cazuri care trebuie tratate distinct:

(a) Dacă ecuația poate fi rezolvată în raport cu $y^{(n)}$, adică dacă $\dfrac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \neq 0$, atunci obținem una sau mai multe ecuații ca în secțiunea anterioară;

(b) Dacă ecuația nu este rezolvabilă cu ajutorul funcțiilor elementare în raport cu $y^{(n)}$, dar cunoaștem o reprezentare parametrică a curbei $f(u, v) = 0$, adică $u = g(t)$, $v = h(t)$, cu $t \in [\alpha, \beta]$, atunci soluția generală se poate da sub formă parametrică:

$$\begin{cases} x & = g(t) \\ dy^{(n-1)} & = y^{(n)} dx = h(t)g'(t)dt \end{cases},$$

de unde putem obține succesiv:

$$\begin{cases} y^{(n-1)} & = h_1(t, c_1) \\ \dots . & \\ y(t) & = h_n(t, c_1, \dots, c_n). \end{cases}$$

Exemplu:

$$x - e^{y''} + y'' = 0.$$

Soluție: Putem nota $y'' = t$ și atunci $x(t) = e^t - t$. Deoarece avem $dy' = y'' dx$, rezultă:

$$dy' = t(e^t - 1)dt \Rightarrow y' = -\frac{t^2}{2} + te^t - e^t + c_1.$$

Mai departe, $dy = y' dx$, deci:

$$dy = \Big(-\frac{t^2}{2} + te^t - e^t + c_1 \Big)(e^t - 1)dt.$$

În fine, soluția este:

$$y(t) = e^{2t}\Big(\frac{t}{2} - \frac{3}{4}\Big) + e^t\Big(-\frac{t^2}{2} + 1 + c_1 \Big) + \frac{t^3}{6} - c_1 t + c_2.$$

3.5 Ecuații de forma $f(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$

Din nou, distingem două cazuri:

(a) Dacă ecuația este rezolvabilă prin funcții elementare în raport cu $y^{(n)}$, atunci putem nota $z = y^{(n-1)}$ și avem $z' = f(z)$. Ecuația devine cu variabile separabile pentru z și se rezolvă corespunzător, conducînd la $z = y^{(n-1)} = f_1(x, c_1)$, care este de tipul anterior;

(b) Dacă ecuația nu este rezolvabilă prin funcții elementare în raport cu $y^{(n)}$, dar cunoaștem o reprezentare parametrică de forma:

$$y^{(n-1)} = h(t), \quad y^{(n)} = g(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

atunci putem folosi $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx$, pentru a obține soluția pas cu pas, sub formă parametrică:

$$\begin{aligned} x &= \int \frac{h'}{g} dt + c_1 \\ y^{(n-1)} &= h(t) \\ dy^{(n-2)} &= h(t) = \frac{hh'}{g} dt \\ y^{(n-2)} &= \int \frac{hh'}{g} dt + c_2 \\ &\vdots \\ y &= \int y' dx + c_n. \end{aligned}$$

Exemplu: $y'' = -\sqrt{1 - y'^2}$. *Soluție:* Facem schimbarea de funcție $z(x) = y'$ și ecuația devine:

$$-\frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = dx, \quad |z| < 1.$$

Soluția generală este: $\arccos z = x + c_1$, deci $z = \cos(x + c_1)$.

Mai departe, obținem $y(x) = \sin(x + c_1) + c_2$.

De asemenea, trebuie să mai remarcăm și soluțiile particulare $y = \pm x + c$.

3.6 Ecuații de forma $f(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0$

Ecuația se rezolvă cu schimbarea de funcție $y^{(k)} = z(x)$ și rezultă o ecuație de ordin $n - k$:

$$f(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0,$$

pe care o integrăm.

Exemplu: $(1+x^2)y'' = 2xy'$.

Soluție: Cu schimbarea de funcție $y' = z(x)$, obținem ecuația:

$$\frac{z}{z'} = \frac{2x}{1+x^2},$$

iar apoi, prin integrare, rezultă $z = y' = c_1(1+x^2)$. În fine:

$$y(x) = c_1 x + c_1\frac{x^3}{3} + c_2.$$

Exemplu 2: $y \cdot y'' - yy'^2 = 0$.

Soluție: Notăm $y' = z$ și obținem:

$$y \cdot z' - yz^2 = 0 \Longrightarrow y(z' - z^2) = 0,$$

de unde rezultă $y = 0$ sau $z' - z^2 = 0$.

Din a doua variantă, deducem succesiv:

$$\frac{dz}{dx} = z^2 \Longrightarrow \frac{dz}{z^2} = dx \Longrightarrow -\frac{1}{z} = x + c_1.$$

Mai departe:

$$-\frac{1}{y'} = x + c_1 \Longrightarrow y' = \frac{-1}{x+c_1} \Longrightarrow y = -\ln(x+c_1) + c_2.$$

3.7 Ecuații de forma $f(y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$

Să remarcăm că astfel de ecuații nu conțin pe y. Deci putem lua pe y' ca variabilă independentă și pe y'' ca fiind funcție de y'. Astfel, reducem discuția la un caz anterior.

Exemplu: $x^2y'' = y'^2 - 2xy' + 2x^2$.

Soluție: Facem schimbarea de funcție $y' = z(x)$ și obținem o ecuație Riccati:

$$z' = \frac{z^2}{x^2} - 2 \cdot \frac{z}{x} + 2.$$

Observăm soluția particulară $z_p = x$ și integrăm, cu $z = x + \dfrac{1}{u(x)}$.

Obținem succesiv:

$$\begin{aligned} z(x) &= x + \frac{c_1 x}{x+c_1} \Longrightarrow \\ y'(x) &= x + \frac{c_1 x}{x+c_1} \Longrightarrow \\ y(x) &= \frac{x^2}{2} + c_1 x - c_1^2 \ln|x+c_1| + c_2, \end{aligned}$$

3.8 Ecuații autonome (ce nu conțin pe x)

În cazul acestor ecuații, putem micșora ordinul cu o unitate, notînd $y' = p$ și luăm pe y variabilă independentă.

Observaţie 3.3: Există posibilitatea de a pierde soluții de forma $y = c$ prin această metodă, deci trebuie verificat dacă este cazul separat.

Exemplu: $1 + y'^2 = 2yy'$. *Soluție:* Putem lua $y' = p$ drept funcție, iar pe y drept variabilă independentă. Rezultă:

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = p\frac{dp}{dy}.$$

Atunci ecuația devine:

$$\frac{2pdp}{1+p^2} = \frac{dy}{y} \Longrightarrow y = c_1(1+p^2).$$

Acum trebuie să obținem pe x ca funcție de p și c_1. Deoarece $dx = \frac{1}{p}dy$, iar $dy = 2c_1pdp$, rezultă $dx = 2c_1dp$. Deci $x = 2c_1p + c_2$, iar soluția generală devine $x(p) = 2c_1p + c_2$. Din expresia lui y de mai sus, rezultă:

$$y = c_1 + \frac{(x-c_2)^2}{4c_1}.$$

Exemplu 2: $y'' = y'^2 = 2e^{-y}$.

Soluție: Notăm $y' = p$ și luăm ca necunoscută $p = p(y)$. Rezultă:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = p'p \Longrightarrow p'p + p^2 = 2e^{-y}.$$

Dacă notăm $p^2 = z$, obținem o ecuație liniară neomogenă:

$$z' + 2z = 4e^{-y},$$

ce are ca soluție generală $z(y) = c_1e^{-2y} + 4e^{-y}$.

Revenim la y și avem:

$$z = p^2 = y'^2 \Longrightarrow y' = \pm\sqrt{c_1e^{-2y} + 4e^{-y}},$$

adică:

$$\frac{dy}{\pm\sqrt{c_1e^{-2y} + 4e^{-y}}} = dx \Longrightarrow x + c_2 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{c_1 + 4e^y}.$$

Echivalent, putem scrie soluția și în forma implicită:

$$e^y + \frac{c_1}{4} = (x+c_2)^2.$$

3.9 Ecuații Euler

O ecuație Euler are forma generală:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k y^{(k)} = f(x),$$

pentru varianta omogenă și $f(x) = 0$ pentru varianta neomogenă, cu a_i constante reale.

Ecuațiile Euler se pot transforma în ecuații cu coeficienți constanți prin notația (schimbarea de variabilă) $|x| = e^t$.

De remarcat faptul că, deoarece funcția necunoscută este $y = y(x)$, pentru a obține $y' = \frac{dy}{dx}$ trebuie să aplicăm regula de derivare a funcțiilor compuse. Folosind notația de la fizică $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$, putem scrie:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \dot{y} \cdot e^{-t}.$$

Mai departe, de exemplu, pentru derivatele superioare:

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dt}\left(\dot{y} \cdot e^{-t}\right) \cdot \frac{dt}{dx} \\ &= e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y}). \end{aligned}$$

Exemplu: $x^2 y'' + xy' + x = x$.

Soluție: Facem substituția $|x| = e^t$ și, folosind calculele de mai sus, obținem:

$$e^{2t} \cdot e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y}) - e^t \cdot e^{-t} + y(t) = e^t.$$

Echivalent: $\ddot{y} - 2\dot{y} + y = e^t$.

Aceasta este o ecuație liniară de ordinul al doilea, neomogenă. Asociem ecuația algebrică $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 = 0$, deci soluția generală a variantei omogene este:

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t.$$

Folosind metoda variației constantelor, obținem succesiv:

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 e^t + c_2 t e^t + \frac{t^2 e^t}{2} \Longrightarrow \\ y(x) &= c_1 x + c_2 x \ln x + \frac{x \ln^2 x}{2}. \end{aligned}$$

3.10 Exerciții

1. Rezolvați următoarele ecuații Euler:

(a) $x^2y^{(2)} - 3xy' + 4y = 5x, \quad x > 0;$

(b) $x^2y^{(2)} - xy' + y = x + \ln x, \quad x > 0;$

(c) $4(x+1)^2y^{(2)} + y = 0, x > -1;$

(d) $xy'' + 3y' = 1;$

(e) $x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = \dfrac{1}{x^2}.$

2. Rezolvați următoarele ecuații:

(a) $y^{(3)} = \sin x + \cos x;$

(b) $y^{(3)} + y^{(2)} = \sin x;$

(c) $xy^{(2)} + (x-2)y^{(1)} - 2y = 0;$

(d) $x^2y^{(2)} = y'^2;$

(e) $y^{(4)} - 3y^{(3)} + 3y^{(2)} - y^{(1)} = 0;$

(f) $y^{(2)} - y^{(1)} - 2y = 3e^{2x};$

(g) $4(x+1)^2y^{(2)} + y = 0;$

Amintim, pentru ecuații liniare și neomogene de ordinul întîi, cu forma generală:

$$y' = P(x)y + Q(x),$$

avem soluțiile:

$$y_p = c \cdot \exp\Big(-\int_{x_0}^{x} P(t)dt\Big)$$
$$y_g = \Big(c + \int Q(t) \cdot \exp\Big(\int_{x_0}^{t} P(s)ds\Big)dt\Big) \cdot \exp\Big(-\int_{x_0}^{x} P(t)dt\Big).$$

Puteți folosi formulele de mai sus, sau, *preferabil*, puteți rezolva direct, ca în seminarul anterior.

Indicații:

(a) Integrări succesive;

(b) Notăm $y^{(2)} = z$, deci ecuația devine $z' + z = \sin x$, care este o ecuație liniară și neomogenă, de ordinul întîi. Soluția generală este:

$$z(x) = e^{-x}\left(c + \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x)\right),$$

iar apoi $y'(x) = \displaystyle\int z(x)dx$ și $y(x) = \displaystyle\int y'(x)dx$ etc.

(c) Notăm $z = y' + y$, deci ecuația devine $xz' - 2z = 0$, care are soluția evidentă $z = c_1x^2$, din care obtinem $y' + y = c_1x^2$, care este o ecuație liniară și neomogenă, cu soluția generală:

$$y = c_2e^{-x} + c_1x^2 - 2c_1x + 2c_1.$$

(d) Notăm $y' = z$ și obținem $x^2z' = z^2$. Observăm soluția particulară $z = 0$, deci $y = c$, iar în celelalte cazuri, avem:

$$x^2\frac{dz}{dx} = z^2 \Longrightarrow \frac{dx}{x^2} = \frac{dz}{z^2}.$$

Aceasta conduce la $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x} + c$ și ne întoarcem la y:

$$dx = dy\left(\frac{1}{x} + c\right) \Longrightarrow \frac{xdx}{cx + 1} = dy,$$

care, prin integrare, conduce la:

$$y = \frac{x}{c} - \frac{1}{c^2}\ln(cx + 1) + c_1,$$

pentru $c \neq 0$ și $y' = x$ dacă $c = 0$, adică $y = \dfrac{x^2}{2} + c_1$.

(e) Ecuația caracteristică este:

$$r^4 - 3r^3 + 3r^2 - r = 0 \Longrightarrow r(r^3 - 3r^2 + 3r - 1) = 0,$$

de unde observăm soluțiile $r = 0, r = 1$ etc.

(f) Ecuația caracteristică este $r^2 - r - 2 = (r + 1)(r - 2) = 0$.

(g) Este o ecuație Euler în raport cu $t = x + 1$.

SEMINAR 4

SISTEME DIFERENȚIALE

4.1 Metoda eliminării pentru sisteme diferențiale liniare

Putem reduce sistemele diferențiale de ordinul I la ecuații de ordin superior.

De exemplu, să pornim cu sistemul:

$$\begin{cases} x' + 5x + y & = 7e^t - 27 \\ y' - 2x + 3y & = -3e^t + 12 \end{cases}$$

Soluție: Din prima ecuație, scoatem y și derivăm:

$$y = 7e^t - 27 - 5x - x' \Longrightarrow y' = 7e^t - 5 - x''.$$

Înlocuim în a doua ecuație și obținem o ecuație liniară de ordin superior:

$$x'' + 8x' + 17x = 31e^t - 93.$$

Ecuația caracteristică este $r^2 + 8r + 17 = 0$, cu rădăcinile $r_{1,2} = -4 \pm i$. Atunci soluția generală a ecuației omogene este:

$$\overline{x}(t) = e^{-4t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t).$$

Mai departe, căutăm o soluție particulară a ecuației neomogene folosind metoda variației constantelor, a lui Lagrange:

$$x_p(t) = e^{-4t}(c_1(t) \cos t + c_2(t) \sin t).$$

Determinăm funcțiile $c_1(t), c_2(t)$ din sistemul:

$$\begin{cases} c_1'(t) \cos te^{-4t} + c_2'(t) \sin te^{-4t} & = 0 \\ c_1'(t)(-\sin te^{-4t} - 4\cos te^{-4t}) + c_2'(t)(\cos te^{-4t} - 4\sin te^{-4t}) & = 31e^t - 93. \end{cases}$$

Rezultă:

$$
\begin{aligned}
& c_1'(t) = -31 \sin t e^{5t} + 93 \sin t e^{4t} \\
\implies & c_1(t) = -\frac{31}{26} e^{5t}(5 \sin t - \cos t) + \frac{93}{17} e^{4t}(4 \sin t - \cos t) \\
& c_2'(t) = 31 \cos t e^{5t} - 93 \cos t e^{4t} \\
\implies & c_2(t) = \frac{31}{26} e^{5t}(5 \sin t + \cos t) - \frac{93}{17} e^{4t}(4 \sin t + \cos t).
\end{aligned}
$$

În fine, obținem:

$$x(t) = e^{-4t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) + \frac{31}{26} e^t - \frac{93}{17},$$

iar mai departe:

$$y(t) = e^{-4t}[(c_1 - c_2) \sin t - (c_1(t) - c_2) \cos t) - \frac{2}{13} e^t + \frac{6}{17}.$$

4.2 Exerciții

Rezolvați următoarele sisteme diferențiale, folosind metoda eliminării:

(a) $\begin{cases} y' &= 2y + z \\ z' &= y + 2z \end{cases}, \quad y = y(x), z = z(x);$

(b) $\begin{cases} y' &= -3y - 4z \\ z' &= y + 2z \end{cases}, \quad y = y(x), z = z(x);$

(c) $\begin{cases} x' &= x + 3y \\ y' &= -x + 5y - 2e^t \end{cases}, \quad x = x(t), y = y(t)$, cu condițiile inițiale $x(0) = 3, y(0) = 1$;

(d)

(e) $\begin{cases} y' &= -2z + 1 \\ x^2 z' &= -2y + x^2 \ln x \end{cases}$, cu $y = y(x), z = z(x)$.

Indicație: (d) Derivăm prima ecuație din nou și obținem $z' = -y''$. Înlocuim în a doua ecuație și rezultă o ecuație Euler pentru y, pe care o rezolvăm și revenim și calculăm $z(x)$.

SEMINAR 5

ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE DE ORDINUL ÎNTÎI

Forma generală a unei ecuații cu derivate parțiale (EDP) de ordinul întîi pentru funcția necunoscută $u = u(x, y, z)$ este:

$$P(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial y} + R(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

unde $P, Q, R : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ sînt funcții de clasă (cel puțin) $\mathcal{C}^1$.

Pentru rezolvare, se scrie sistemul simetric asociat, care are forma generală

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

și i se determină integralele prime. Dacă $I_1 = C_1$ și $I_2 = C_2$ sînt integralele prime ale sistemului, atunci soluția finală a ecuației inițiale este:

$$u(x, y, z) = \varphi(I_1, I_2),$$

unde φ este o funcție oarecare de clasă (cel puțin) $\mathcal{C}^1$.

Observație 5.1: Pentru simplitate, vom mai folosi notațiile cunoscute pentru derivate parțiale, anume $u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ etc.

Observație 5.2: Metoda de rezolvare de mai sus cere implică și verificarea independenței celor două integrale prime, în sensul exemplificat mai jos.

Exemplu: Rezolvăm ecuația cu derivate parțiale:

$$(4z - 5y)u_x + (5x - 3z)u_y + (3y - 4x)u_z = 0.$$

Soluție: Scriem sistemul simetric asociat, care este:

$$\frac{dx}{4z - 5y} = \frac{dy}{5x - 3z} = \frac{dz}{3y - 4x},$$

sistem care este valabil pe domeniul:

$$D = \{(x, y, z \in \mathbb{R}^3) \mid 4z \neq 5y, 5x \neq 3z, 3y \neq 4x\}.$$

Pentru a obține integralele prime, amplificăm prima fracție cu 3, a doua cu 4 și a treia cu 5 și obținem:

$$\frac{3dx}{12z - 15y} = \frac{4dy}{20x - 12z} = \frac{5dz}{15y - 20x} = \frac{3dx + 4dy + 5dz}{0},$$

de unde $I_1(x, y, z) = 3x + 4y + 5z = c_1$ este o integrală primă.

Mai putem amplifica și primul raport cu $2x$, pe al doilea cu $2y$ și pe al treilea cu $2z$ și obținem:

$$\frac{2xdx}{8xz - 10xy} = \frac{2ydy}{10xy - 6yz} = \frac{2zdz}{6yz - 8xz} = \frac{2xdx + 2ydy + 2zdz}{0},$$

deci o a doua integrală primă este $I_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = c_2$.

Evident, cele două integrale prime sînt definite pe același domeniu D.

Independența celor două înseamnă verificarea că matricea dată de derivatele lor parțiale are rangul maxim pe domeniul de definiție. Avem, așadar:

$$A = \begin{pmatrix} I_{1x} & I_{2x} \\ I_{1y} & I_{2y} \\ I_{1z} & I_{2z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2x \\ 4 & 2y \\ 5 & 2z \end{pmatrix},$$

matrice care se poate verifica imediat că are rangul 2, adică maxim, pentru orice $(x, y, z) \in D$. Deci integralele prime sînt independente și soluția finală a ecuației este:

$$u(x, y, z) = \varphi(3x + 4y + 5z, x^2 + y^2 + z^2),$$

unde φ este o funcție arbitrară de clasă $\mathcal{C}^1$.

5.1 Suprafețe de cîmp

Suprafețele de cîmp pentru un cîmp vectorial tridimensional se obțin scriind o ecuație cu derivate parțiale asociată, căreia îi determinăm soluția generală. Suprafața de cîmp este, atunci, dată de anularea soluției generale, scrisă în forma implicită.

Exemplu: Fie cîmpul vectorial:

$$\vec{V} = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j} + z(x^2 + y^2)\vec{k}.$$

Determinăm suprafețele de cîmp.

Soluție: Scriem ecuația cu derivate parțiale asociată cîmpului, pentru o funcție necunoscută $u = u(x, y, z)$. Avem:

$$xy^2u_x + x^2yu_y + z(x^2 + y^2)u_z = 0.$$

Rezolvarea ecuației se face ca mai sus, scriind sistemul asociat:

$$\frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{x^2y} = \frac{dz}{z(x^2 + y^2)},$$

definit pe domeniul potrivit, adică $D = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$.

Din prima egalitate, putem simplifica cu xy și avem $xdx = ydy$, deci o integrală primă este $x^2 - y^2 = c_1$.

Putem amplifica rapoartele cu y, x și respectiv 1 și avem:

$$\frac{ydx}{xy^3} = \frac{xdy}{x^3y} = \frac{dz}{z(x^2 + y^2)} = \frac{ydx + xdy}{xy(x^2 + y^2)}.$$

Din ultimele două rapoarte, obținem, după simplificare cu $x^2 + y^2$:

$$\frac{dz}{z} = \frac{d(xy)}{xy},$$

deci $\dfrac{xy}{z} = c_2$.

Acum soluția generală a ecuației cu derivate parțiale este:

$$u(x, y, z) = \varphi\left(x^2 - y^2, \frac{xy}{z}\right),$$

cu φ o funcție arbitrară de clasă $\mathcal{C}^1$, deci suprafețele de cîmp ale cîmpului $\vec{V}$ au forma:

$$\varphi\left(x^2 - y^2, \frac{xy}{z}\right) = 0.$$

În unele cazuri, se pot cere anume suprafețe de cîmp, de exemplu:

Exemplu: Să se determine suprafața de cîmp a cîmpului vectorial:

$$\vec{V} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k},$$

care trece prin curba dată de intersecția cilindrului $x^2 + z^2 = 4$ cu planul $y = 0$.

Soluție: Mai întîi, determinăm toate suprafețele de cîmp, ca mai sus. Scriem direct sistemul asociat:

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{xy}.$$

Amplificăm cu x, y, respectiv z și obținem $xdx = ydy = zdz$, adică $x^2 - y^2 = c_1, x^2 - z^2 = c_2$ sînt două integrale prime.

Aceste integrale prime dau o familie infinită de suprafețe, dintre care vrem să aflăm pe cea care trece prin curba dată. Așadar, avem de rezolvat sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= c_1 \\ x^2 - z^2 &= c_2 \\ x^2 + z^2 &= 4 \\ y &= 0 \end{cases}$$

pentru constantele c_1 și c_2, care ne vor identifica exact suprafața.

Este suficient să găsim condiția de compatibilitate a sistemului, care se poate obține din primele două ecuații. Înmulțim prima ecuație cu 2 și o scădem din ea pe a doua și comparăm cu a treia ecuație. Se obține $2c_1 - c_2 = 4$. Apoi, înlocuim în integralele prime și avem $2(x^2 - y^2) - (x^2 - z^2) = 4$, care se prelucrează și se aduce la forma canonică:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{4} = 1,$$

care este un *hiperboloid cu o pînză.*

5.2 Ecuații cu derivate parțiale cvasiliniare

Forma generală a ecuațiilor cu derivate parțiale cvasiliniare pentru o funcție $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ este:

$$P_1(x_1, \dots, x_n)u_{x_1} + P_2(x_1, \dots, x_n)u_{x_2} + \cdots + P_{n-1}(x_1, \dots, x_n)u_{x_{n-1}} + Q(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

adică apar toate derivatele parțiale ale lui u, mai puțin ultima.

În exercițiile pe care o să le întîlnim cel mai des, funcția u este înlocuită cu $z = z(x, y)$, iar atunci ultima derivată parțială o putem gîndi, de exemplu, ca $z_z = 1$.

Modul de rezolvare este explicat pe exemplul de mai jos.

Exemplu: Fie ecuația cvasiliniară:

$$(z - y)^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xz \frac{\partial z}{\partial y} = xy.$$

Soluție: Se poate vedea că ecuația este cvasiliniară, funcția necunoscută fiind $z = z(x, y)$.

Din teorie, ecuația trebuie să aibă o soluție scrisă în formă implicită $u(x, y, z) = 0$. De fapt, această funcție trebuie înțeleasă ca $u = u(x, y, z(x, y))$. Folosind formula de derivare a funcțiilor compuse, dacă vrem să scriem derivata parțială în raport cu x a lui u, trebuie să ținem cont că x apare și în $z(x, y)$, deci avem:

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x},$$

și similar pentru derivata în raport cu y. Rezultă:

$$z_x = -\frac{u_x}{u_z}, \quad z_y = -\frac{u_y}{u_z}.$$

Înlocuim în ecuația dată și înmulțim relația cu u_z, obținînd:

$$(z - y)^2 u_x + xzu_y + xyu_z = 0,$$

care este o ecuație cu derivate parțiale de ordinul întîi și o putem rezolva ca în prima secțiune.

Scriem sistemul asociat:

$$\frac{dx}{(z - y)^2} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{xy}.$$

Din a doua egalitate obținem direct $y^2 - z^2 = c_1$, care este o integrală primă.

Amplificăm primul raport cu x, pe al doilea cu $(y - z)$ și pe al treilea cu $(z - y)$ și obținem prin adunare:

$$xdx + (y - z)dy + (z - y)dz = 0 \Longrightarrow xdx + ydy + zdz - d(yz) = 0.$$

Rezultă a doua integrală primă $x^2 + y^2 + z^2 - 2yz = x^2 + (y - z)^2 = c_2$.

Soluția pentru u va fi:

$$u(x, y, z) = \varphi(y^2 - z^2, x^2 + (y - z)^2),$$

cu φ o funcție de clasă $\mathcal{C}^1$ pe domeniul de definiție.

Atunci soluția pentru z se obține din forma implicită $u(x, y, z) = 0$.

5.3 Exerciții

1. Rezolvați ecuațiile cvasiliniare:

(a) $x(y^3 - 2x^3)z_x + y(2y^3 - x^3)z_y = 9z(x^3 - y^3)$;

(b) $2xzz_x + 2yzz_y = z^2 - x^2 - y^2$;

(c) $2yz_x + 3x^2 z_y + 6x^2 y = 0$;

(d) $x\left(y^2 - z^2\right)z_x - y\left(x^2 + y^2\right)z_y = z\left(x^2 + y^2\right)$;

(e) $xzz_x + yzz_y = x + y$.

Indicații: (a) Sistemul diferențial autonom la care se ajunge este:

$$\frac{dx}{x(y^3-2x^3)}=\frac{dy}{y(2y^3-x^3)}=\frac{dz}{9z(x^3-y^3)}.$$

Rezultă:

$$\frac{ydx+xdy}{3xy(y^3-x^3)}=\frac{dz}{9z(x^3-y^3)}\Longrightarrow\frac{d(xy)}{xy}=-\frac{dz}{3z}\Longrightarrow x^3y^3z=c_1.$$

Din primele două rapoarte obținem:

$$\frac{y(2y^3-x^3)}{x(y^3-2x^3)}=\frac{dy}{dx}.$$

Simplificăm forțat cu $\dfrac{y}{x}=u$ și ajungem la ecuația:

$$\frac{u^3-2}{u(u+1)(u^2-u+1)}du=\frac{dx}{x}.$$

Rezultă $\ln(c_2x)=-2\ln u+\ln(u+1)+\ln(u^2-u+1)$, adică, în final, $c_2=\dfrac{x^3+y^3}{x^2y^2}$.

(b) Se ajunge la sistemul autonom:

$$\frac{dx}{2xz}=\frac{dy}{2yz}=\frac{dz}{z^2-x^2-y^2}.$$

Din primele două rapoarte avem $\dfrac{y}{x}=c_1$ și apoi:

$$\frac{2xdx}{2x^2}=\frac{2ydy}{2y^2}=\frac{2zdz}{z^2-x^2-y^2},$$

adică $c_2x=x^2+y^2+z^2$.

(d) Dacă $u(x,y,z)=0$ este soluția căutată în formă implicită, atunci ajungem la ecuația cu derivate parțiale de ordinul întîi:

$$x(y^2-z^2)u_x-y(x^2+z^2)u_y+z(x^2+y^2)u_z=0.$$

Din sistemul diferențial asociat, obținem:

$$xdx+ydy+zdz=0\Longrightarrow x^2+y^2+z^2=c_1.$$

Mai departe:

$$\frac{ydx-xdy}{xy(y^2-z^2)+xy(x^2+z^2)}=\frac{ydx-xdy}{xy(x^2+y^2)}=\frac{dz}{z(x^2+y^2)},$$

de unde rezultă:

$$\frac{ydx - xdy}{xy} = \frac{dz}{z} \Longrightarrow \frac{x}{yz} = c_2.$$

2. Determinați suprafețele de cîmp pentru cîmpurile vectoriale:

(a) $\vec{V} = (x + y + z)\vec{i} + (x - y)\vec{j} + (y - x)\vec{k}$;

(b) $\vec{V} = (x - y)\vec{i} + (x + y)\vec{j} + \vec{k}$.

Indicații: (a) Ajungem la sistemul:

$$\frac{dx}{x + y + z} = \frac{dy}{x - y} = \frac{dz}{y - x}.$$

Din prima egalitate, rezultă $dy + dz = 0 \Longrightarrow y + z = c_1$. Înlocuind în cea de-a doua egalitate $z = c_1 - y$, rezultă $(x - y)dx = (x + c_1)dy$, deci $xdx - d(xy) - c_1 dy = 0$, adică $\frac{x^2}{2} - xy - c_1 y = c_2$. Înlocuim $c_1 = y + z$ și obtinem $\frac{x^2}{2} - xy - y^2 - yz = c_2$.

Domeniul de definiție va fi $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z \neq 0\}$.

(b) Se ajunge la sistemul:

$$\frac{dx}{x - y} = \frac{dy}{x + y} = \frac{dz}{1}.$$

Rezultă:

$$\frac{xdx}{x^2 - xy} = \frac{ydy}{xy + y^2} = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = \frac{\frac{1}{2}d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \frac{dz}{1},$$

deci $x^2 + y^2 = c_1 e^{2z}$, iar apoi, din $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y}$, putem nota $\frac{y}{x} = u$ și rezultă $x^2 + y^2 = c_2 e^{2 \arctan \frac{y}{x}}$.

3. Determinați suprafața de cîmp a cîmpului vectorial:

$$\vec{V} = 2xz\vec{i} + 2yz\vec{j} + (z^2 - x^2 - y^2)\vec{k},$$

care conține cercul dat de $z = 0$ și $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

Indicație: Integralele prime independente ale sistemului se determină din:

$$\frac{dx}{2xz} = \frac{dy}{2yz} = \frac{dz}{z^2 - x^2 - y^2}.$$

Din primele două rapoarte, obținem $y = c_1 x$, iar apoi, putem înmulți toate egalitățile cu $2z$ și prelucrăm mai departe:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{2z}{z^2 - x^2 - y^2} \Longrightarrow \frac{2xdx}{2x^2} = \frac{2ydy}{2y^2} = \frac{2zdz}{z^2 - x^2 - y^2} = \frac{2(xdx + ydy + zdz)}{x^2 + y^2 + z^2},$$

deci $x^2 + y^2 + z^2 = c_2 x$.

Pentru a obține intersecția cu cercul dat, avem condiția ca sistemul de mai jos să fie compatibil:

$$\begin{cases} y & = c_1 x \\ x^2 + y^2 + z^2 & = c_2 x \\ z & = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x & = 0 \end{cases}.$$

Din ultimele trei ecuații se obține că sistemul este compatibil dacă și numai dacă $c_2 = 2$. Rezultă $x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$, care este o sferă.

4. Fie cîmpul vectorial:

$$\vec{V} = (x + y)\vec{i} + (y - x)\vec{j} - 2z\vec{k}.$$

Să se determine:

(a) liniile de cîmp;

(b) linia de cîmp ce conține punctul $M(1, 0, 1)$;

(c) suprafețele de cîmp;

(d) suprafața de cîmp care conține dreapta $z = 1, y - x\sqrt{3} = 0$.

Indicații:

(a) Sistemul caracteristic asociat este:

$$\frac{dx}{x + y} = \frac{dy}{y - x} = \frac{dz}{-2z}.$$

Din primele două, rezultă:

$$\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = \frac{dz}{-2z} \Longrightarrow z(x^2 + y^2) = c_1.$$

Tot din primele rapoarte obținem:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{x + y}.$$

Dacă notăm $y' = \dfrac{dy}{dx}$, putem rezolva fie ca pe o ecuație liniară de ordinul întîi, anume:

$$y'(x+y) - y = x$$

sau putem face substituția $y = tx$. Rezultă:

$$x\frac{dt}{dx} + t = \frac{t-1}{t+1} \Longleftrightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{t+1}{t^2+1}dt \Longrightarrow \ln(x^2+y^2) + 2\arctan\frac{y}{x} = c_2.$$

Deci liniile de cîmp sînt date de:

$$\begin{cases} (x^2+y^2)z & = c_1 \\ \ln(x^2+y^2) + 2\arctan\dfrac{y}{x} & = c_2 \end{cases}.$$

(b) Folosind condiția ca punctul $M(1,0,1)$ să se găsească pe linia de cîmp, găsim condiția de compatibilitate a sistemului de mai sus $c_1 = c_2 = 0$.

(c) Ecuația suprafeței de cîmp este dată de:

$$\Phi\left((x^2+y^2)z, \ln(x^2+y^2) + 2\arctan\frac{y}{x}\right) = 0.$$

(d) Pentru condiția ca suprafața de cîmp să conțină dreapta $z = 1, y - \sqrt{3}x = 0$, avem sistemul:

$$\begin{cases} (x^2+y^2)z & = c_1 \\ \ln(x^2+y^2) + 2\arctan\dfrac{y}{x} & = c_2 \\ z & = 1 \\ y - x\sqrt{3} & = 0 \end{cases}.$$

Înlocuim pe x, y, z în funcție de constante în ecuația a doua și rezultă:

$$\ln c_1 + 2\arctan\sqrt{3} = c_2.$$

Pentru a afla suprafața, din prima ecuație avem:

$$\ln(x^2+y^2) + \ln z = \ln c_1.$$

Atunci a doua ecuație devine:

$$\ln(x^2+y^2) + 2\arctan\frac{y}{x} = c_2 = \ln c_1 + \frac{2\pi}{3} \Longrightarrow -\ln z = 2\left(\arctan\frac{y}{x} - \frac{2\pi}{3}\right),$$

de unde se obține $z(x,y)$, ecuația suprafeței căutate.

5. Să se determine soluția ecuațiilor cu derivate parțiale de ordinul întîi:

(a) $yu_x - xu_y = 0$;

(b) $xzu_x - yzu_y + (x^2 + y^2)u_z = 0$;

(c) $xu_x - yu_y = 0$.

6. Rezolvați ecuația cu derivate parțiale de ordinul întîi, cvasiliniară:

$$(1 + \sqrt{z - x - y})z_x + z_y = 2.$$

Indicație: Se caută o soluție implicită sub forma $u = u(x, y, z) = 0$, se calculează noile derivate parțiale și se ajunge la sistemul caracteristic de forma:

$$\frac{dx}{1 + \sqrt{z - x - y}} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{2}.$$

Ultimele două rapoarte dau $z - 2y = c_1$ și, prin scădere, obținem:

$$dy = \frac{dz - dx - dy}{-\sqrt{z - x - y}},$$

care poate fi integrată pentru a obține $y + 2\sqrt{z - x - y} = c_2$.

Rezultă soluția generală sub forma implicită:

$$\Phi(z - 2y, y + 2\sqrt{z - x - y}) = 0.$$

SEMINAR 6

TEORIE DE CÎMP

6.1 Generalități introductive

Un *cîmp vectorial* este generalizarea vectorilor din plan sau din spațiu pe care i-ați studiat la liceu. Atunci, vectorii se prezentau într-un reper ortonormat sub forma:

$$\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Numerele reale a, b, c se numesc *componentele (coordonatele)* vectorului și sînt constante. Aceasta înseamnă că vectorul este unul *static*, în sensul că nici direcția, nici sensul sau modulul său nu se schimbă. Altfel spus, este vectorul de poziție pentru un punct de coordonate (a, b, c), care este un punct fix.

Pentru diverse aplicații fizice, este necesar să luăm în considerare puncte sau vectori care variază. Mai remarcăm că, asemenea tuturor mărimilor fizice, cîmpurile pot fi scalare sau vectoriale, în funcție de tipul rezultatului pe care îl produc. Exemple tipice includ:

- forța de frecare, ce se poate schimba în orice punct al unei traiectorii, în funcție de aspectul fizic al traseului. De exemplu, dacă se trece de la o mișcare pe gheață la o mișcare pe trotuar sau chiar pe aceeași suprafață pot exista imperfecțiuni care să ducă la o valoare variabilă a coeficientului de frecare, deci și a forței de frecare. Forța de frecare descrie un *cîmp vectorial.*

- viteza sau accelerația unui corp, care rar sînt constante (în realitate, nu pot fi perfect constante, ca în matematică), din diverse motive, precum funcționarea motorului, frecarea cu aerul etc. Acestea descriu cîmpuri vectoriale;

- temperatura unui obiect nu poate avea o valoare constantă, din motive care țin de alcătuirea fizico-chimică a corpului (impurități, componente neomogene etc.). Temperatura descrie un *cîmp scalar*, deoarece în general, temperatura este o mărime fizică scalară (perfect precizată doar printr-o valoare numerică);

- în cazul fenomenelor meteorologice, presiunea atmosferică, temperatura, vînturile, umiditatea etc. au valori diferite în fiecare punct din spațiu;

- cîmpul magnetic și gravitațional ale Pămîntului au valori diferite în fiecare punct din spațiu, atît din punct de vedere scalar, cît și vectorial. Știm deja dependența invers-pătratică de distanța față de centru, dar chiar și aceasta suferă modificări, din motive „practice“, i.e. imperfecțiuni ale atmosferei și chiar ale alcătuirii planetelor;

- în geografie, unele hărți permit vizualizarea *curbelor de nivel.* [1] Dacă ne imaginăm că înălțimea (față de nivelul mării) a unei porțiuni de teren este dată de un cîmp vectorial, deoarece înălțimea variază în orice punct, curbele de nivel unesc puncte care au aceeași valoare a cîmpului, în cazul acesta, aceeași valoare a înălțimii.

În asemenea cazuri, modelarea statică, folosind vectori constanți, este mult prea departe de realitate. De aceea, se folosesc *cîmpuri vectoriale.* [2] Aceste obiecte matematice permit modificarea unui vector în fiecare punct. Un exemplu simplu este să considerăm o forță care acționează asupra unui corp ce se deplasează pe o traiectorie 1-dimensională (pe o curbă plană). Poziția corpului este dată de coordonata $x \in \mathbb{R}$ și presupunem că în fiecare punct al traiectoriei avem o forță care acționează asupra corpului, forță avînd o componentă orizontală și una verticală. O ecuație a forței poate fi[3]:

$$\vec{F}(x) = 5x^2\vec{i} - 3x\vec{j}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Cum în fiecare punct, valoarea funcției diferă și variază odată cu poziția corpului pe axa dată de x, forța devine un vector variabil, adică în cazul acesta un *cîmp bidimensional.*

În continuare, vom insista pe exemple de cîmpuri vectoriale bidimensionale și tridimensionale, introducînd și cîteva unelte de calcul și de studiu.

6.2 Gradient și derivată direcțională

Considerăm un cîmp scalar bidimensional de forma:

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = z.$$

[1] Curbele de nivel pot fi văzute și în Google Maps, prin activarea filtrului `Terrain`.

[2] Termenul englezesc este de *vector field*, iar cîteva ilustrații clasice puteți găsi pe pagina de Wikipedia.

[3] Puteți testa și vizualiza aspectul unor cîmpuri vectoriale în plan pe acest site.

Pornind de la analogia cu derivata unei funcții de o singură variabilă, care descrie evoluția funcției prin panta tangentei la grafic, definim *gradientul* acestui cîmp într-un punct $M(x_0, y_0)$ cu formula:

$$\nabla f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)).$$

Observație 6.1: Litera ∇ se citește „nabla“. Notația alternativă pentru ∇f este $\mathrm{grad} f$.

Mai remarcăm că gradientul unui cîmp scalar produce *un vector*. Altfel scris, într-un punct arbitrar (x_0, y_0), gradientul cîmpului scalar f de mai sus este vectorul:

$$\nabla f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \cdot \vec{i} + f_y(x_0, y_0) \cdot \vec{j}.$$

De aceea, uneori gradientul se mai notează $\vec{\nabla} f$.

Acum, dat un vector în plan, să spunem $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$, dacă vrem să aflăm componenta sa în direcția versorului $\vec{i}$, de exemplu, putem aplica o *proiecție* pe direcția versorului $\vec{i}$ sau, altfel spus, putem calcula produsul scalar între $\vec{i}$ și $\vec{v}$:

$$\vec{i} \cdot \vec{v} = \langle \vec{i}, a\vec{i} + b\vec{j} \rangle = a \cdot \|\vec{i}\| = a.$$

Similar, deoarece gradientul generalizează „derivata“ unui cîmp vectorial (bidimensional, în acest caz), putem afla componenta acestei derivate după o direcție, care se va numi *derivată direcțională*.

Definiție 6.1: Păstrînd notațiile și contextul de mai sus, fie vectorul $\vec{s}$ în plan. Derivata cîmpului scalar bidimensional f după direcția s în punctul (x_0, y_0) se notează și se definește ca mai jos:

$$D_{\vec{s}} f = \frac{df}{ds}(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), \vec{s} \rangle.$$

Noțiunile se pot generaliza imediat în 3 dimensiuni. Fie $M = (x_0, y_0, z_0)$ un punct în spațiul euclidian tridimensional și $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, f(a, b, c,) = d$ un cîmp scalar.

Gradientul său se calculează:

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z),$$

ca vector tridimensional, iar în punctul M avem:

$$\nabla f(M) = (f_x(M), f_y(M), f_z(M)).$$

Dacă $\vec{s} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ este un vector tridimensional, derivata lui f după direcția dată de $\vec{s}$ în punctul M se calculează cu produsul scalar:

$$\frac{df}{ds}(M) = \langle \nabla f(M), \vec{s} \rangle.$$

Observaţie 6.2: În toate exemplele de mai sus, cînd avem de calculat derivata sau gradientul într-un punct, se calculează mai întîi derivata, apoi se evaluează în punctul dat. Altfel, dacă evaluăm mai întîi funcția, obținem un scalar, a cărui derivată este mereu nulă.

Deci, explicit, notația $\nabla f(M)$ înseamnă, de fapt, $(\nabla f)(M)$.

Regulile de calcul cu gradienți se obțin prin analogie cu regulile de derivare:

- $\nabla(\alpha f + \beta g) = \alpha \nabla f + \beta \nabla g, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
- $\nabla(f \cdot g) = f \nabla g + g \nabla f$;
- $\nabla \frac{f}{g} = \frac{g \nabla f - f \nabla g}{g^2}, g \neq 0$;
- $\nabla(f \circ g) = f'(g) \cdot \nabla f$.

6.3 Divergență și rotor

Am văzut mai sus că, dat un cîmp scalar f, operatorul gradient îl transformă într-un cîmp vectorial. De fapt, putem înțelege operatorul gradient și ca pe o „procedură", de exemplu în 3 dimensiuni poate fi scris sub forma:

$$\nabla\ ? = (?_x, ?_y, ?_z),$$

astfel încît atunci cînd se aplică unui cîmp, semnul de întrebare este înlocuit cu componentele cîmpului. Așadar, citit ca procedură, gradientul obține vectorul ale cărui componente sînt derivatele parțiale ale cîmpului scalar dat.

Reținem, deci, că:

$$\nabla : \text{scalar} \mapsto \text{vector}.$$

Putem face, însă, abuz de notație și, în loc de *aplicarea* operatorului ∇, îl putem gîndi ca pe un vector cu componentele de mai sus și atunci are sens să calculăm *produsul său scalar* cu un cîmp vectorial. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ un cîmp tridimensional. Putem defini *divergența* cîmpului f prin:

$$\text{div} f = \nabla \cdot f = \langle \nabla, \vec{f} \rangle = f_x + f_y + f_z,$$

unde am notat cu $\vec{f}$ vectorul (f, f, f).

Dacă geometric gradientul caracterizează (vectorial) tendința de creștere, analog derivatei, divergența caracterizează (numeric) tendința de „împrăștiere" a unui cîmp vectorial, așa cum îi spune și numele. Avem, astfel, cazurile din figura 6.1.

Similar, divergența se poate calcula și într-un punct, evaluînd toate calculele din definiție într-un punct particular $M(x_0, y_0, z_0)$.

Observăm, de asemenea, că:

$$\nabla \cdot\ :\ \text{scalar sau vector} \ \mapsto\ \text{scalar}\ .$$

Vom mai folosi următorul concept:

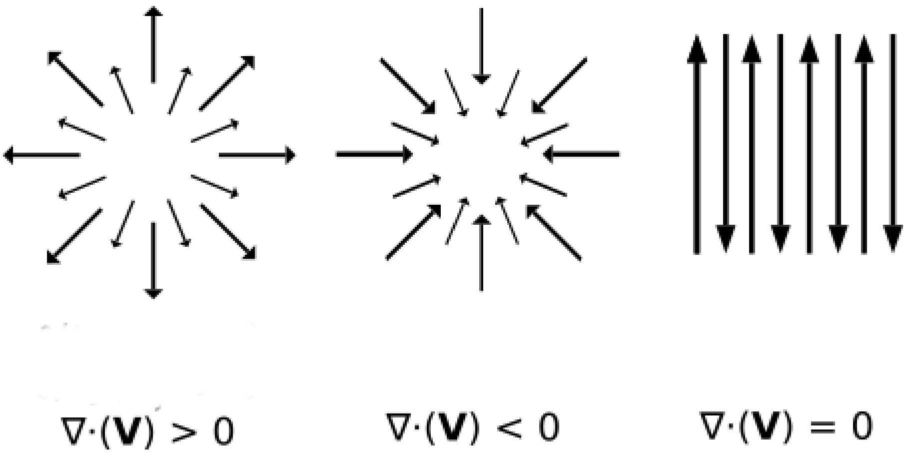

Figura 6.1: Ilustrația geometrică a divergenței

Definiție 6.2: Un cîmp vectorial $\vec{v}$ se numește *solenoidal* în D dacă $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ în D.

Intuitiv, un cîmp vectorial solenoidal este un cîmp fără surse, atît pozitive (i.e. „emisie"), cît și negative (i.e. „absorbție").

Un al treilea operator care se poate aplica unui cîmp este *rotorul* (eng. *curl*). Acesta este definit prin *produsul vectorial* între operatorul ∇ și cîmpul dat. Fie, deci, $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ un cîmp. Se definește:

$$\mathrm{rot} f = \nabla \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ?_x & ?_y & ?_z \\ f & f & f \end{vmatrix},$$

unde am folosit explicitarea produsului vectorial ca un determinant formal.

Continuînd calculele, obținem:

$$\nabla \times \vec{f} = (f_y - f_z, f_z - f_x, f_x - f_y).$$

Observăm că rezultatul este un vector.

De cele mai multe ori, rotorul se aplică unui *cîmp vectorial*, însă, cînd componentele sînt diferite. Deci fie cîmpul vectorial:

$$\vec{V} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{V} = (V_1, V_2, V_3), \quad V_i : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}.$$

De exemplu, cum am întîlnit în capitolul anterior:

$$\vec{V} = (2x - 3y, 5x^2, z + 2x).$$

Atunci rotorul se calculează:

$$\nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ?_x & ?_y & ?_z \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}$$

Intuitiv, rotorul calculează gradul de „rotație“ al unui cîmp vectorial. De exemplu, în cazul unui cîmp liniar, rotorul este nul, iar în cazul unui cîmp de tipul celui magnetic sau gravitațional terestru, rotorul este nenul. Similar, putem gîndi cîmpul dat de vînturi în cazul unui ciclon sau tornade. Rotorul acestui cîmp este nenul și, în funcție de intensitatea fenomenului, modulul vectorului rotor într-un punct este mai mare sau mai mic.

Un alt exemplu îl constituie *cîmpurile solenoidale*, i.e. cele produse de trecerea curentului electric printr-un solenoid. Din motive fizice evidente, cîmpurile solenoidale au rotor nenul.

Cel mai adesea, avem, deci:

$$\nabla \times \ : \ \text{vector} \ \mapsto \ \text{vector} \, .$$

De asemenea, avem definiția distinctă:

Definiție 6.3: Cîmpul vectorial $\vec{v}$ se numește *irotațional* dacă $\nabla \times \vec{v} = 0$.

Mai amintim că s-a studiat la calcul diferențial operatorul *laplacian*. Dacă $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ este un cîmp scalar, atunci se definește:

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}.$$

Observație 6.3: Operatorul lui Laplace are sens și pentru un cîmp vectorial $\vec{v}$, cu aceeași definiție.

Exercițiu*: Arătați că $\Delta f = \nabla \cdot (\nabla f)$, adică laplacianul este divergența gradientului.

Rezultă, de asemenea:

$$\Delta \ : \ \text{scalar} \ \mapsto \ \text{scalar}.$$

Cîteva identități care leagă operatorii definiți mai sus, precum și reguli de calcul pot fi găsite de exemplu, aici.

Alte noțiuni utile sînt:

Definiție 6.4: Un cîmp vectorial $\vec{v}$ definit pe $D \subseteq \mathbb{R}^3$ se numește *potențial* dacă există un cîmp scalar $f \in \mathcal{C}^1(D)$ cu proprietatea că:

$$\vec{v}(M) = (\nabla f)(M), \quad \forall M \in D.$$

Cîmpul scalar f se numește *potențialul scalar* al cîmpului vectorial $\vec{v}$.

Definiţie 6.5: Cîmpul vectorial $\vec{F}$ se numește *cîmp conservativ de forțe* dacă există un cîmp scalar $U \in \mathcal{C}^1(D)$ astfel încît $\vec{F} = \nabla U$.

Altfel spus, un cîmp potențial provine dintr-un gradient, de aceea se mai numește *cîmp de gradienți.*

Cîmpul scalar U se numește *cîmpul funcțiilor de forță.*

De exemplu, cîmpul gravitațional este un cîmp conservativ de forțe. Ați întîlnit deja în liceu noțiunea de *forță conservativă* (al cărui lucru mecanic nu depinde de forma traiectoriei, ci doar de capete) și, evident, cîmpul gravitațional este un cîmp de forțe.

Observaţie 6.4: Din definiția și proprietățile operatorilor vectoriali, un cîmp conservativ este în mod necesar irotațional.

6.4 Exerciții

1. Fie cîmpul scalar:

$$\varphi(x, y, z) = 2x^3 - 3y^2 + 6xyz.$$

(a) Să se determine valoarea cîmpului φ în punctul $A(1, -1, 0)$ și suprafața de nivel care trece prin punctul dat A.

(b) Să se determine derivatele funcției φ în punctul A după direcțiile axelor de coordonate și după direcția vectorului $\vec{v}$, care unește punctul A cu punctul $B(4, -2, 3)$.

2. Fie cîmpul scalar $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

(a) Să se calculeze $\nabla\varphi$;

(b) Să se calculeze derivata cîmpului scalar φ după direcția vectorului $\vec{s} = \dfrac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{3}}$.

3. Să se calculeze derivata cîmpului vectorial:

$$\vec{v} = (y + xz)\vec{i} + (x + yz)\vec{j} + (x^2 - y^2)\vec{k}$$

după direcția vectorului $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

Indicație: Dacă notăm $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, atunci se calculează derivatele acestor componente după direcția $\vec{u}$, adică $\vec{u} \cdot \nabla v_{1,2,3}$.

4. Fie cîmpurile:

$$\vec{v} = (xyz + x^3)\vec{i} + (y^2 + y^3)\vec{j} + (xz^2 + z^3)\vec{k}$$
$$\vec{w} = (yz + xy^2)\vec{i} + (xyz + yz^2)\vec{j} + (3xy + x^2z)\vec{k}.$$

Să se calculeze $\nabla(\nabla \cdot \vec{v})$ și $\nabla \times (\nabla \times \vec{w})$.

5. Fie cîmpul scalar:

$$f(x, y, z) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{r} \rangle}{\|\vec{r}\|^2}, \quad \text{unde } \vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k},\ \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Să se calculeze unghiul dintre $(\nabla f)(A)$ și $(\nabla f)(B)$, unde $A(2, 1, 1)$ și $B(0, 1, -1)$.

Indicații: Fie $M(x, y, z)$ oarecare. Se calculează $(\nabla f)(M)$ folosind regula de calcul a gradientului unei fracții și se obține:

$$(\nabla f)(M) = \frac{\vec{a}}{\|\vec{r}\|} - 2 \cdot \frac{\langle \vec{a}, \vec{r} \rangle}{\|\vec{r}\|^4} \cdot \vec{r}.$$

Atunci putem calcula în punctele A și B date, iar unghiul va fi obținut din:

$$\cos\theta = \frac{\langle (\nabla f)(A), (\nabla f)(B) \rangle}{\|(\nabla f)(A)\| \cdot \|(\nabla f)(B)\|}.$$

Se obtine $\cos\theta < 0$, deci unghiul este obtuz, cu o valoare de $\arccos -\frac{5}{9}$.

SEMINAR 7

RECAPITULARE PENTRU EXAMEN

Set 1

1. Rezolvați următoarele ecuații diferențiale de ordin superior:

(a) $4(x+1)^2 y^{(2)} + y = 0, \quad x > -1;$

(b) $y^{(4)} - 3y^{(3)} + 3y^{(2)} - y^{(1)} = 0;$

(c) $y^{(3)} = \sin x + \cos x.$

2. Rezolvați ecuația cu derivate parțiale:

$$2yz_x + 3x^2 z_y + 6x^2 y = 0,$$

funcția necunoscută fiind $z = z(x, y)$.

3. Determinați suprafața de cîmp a cîmpului vectorial:

$$\vec{V} = 2xz\vec{i} + 2yz\vec{j} + (z^2 - x^2 - y^2)\vec{k},$$

care conține cercul dat de $z = 0$ și $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

4. Fie cîmpul scalar:

$$f(x, y, z) = 3x^2 - 5xy + 2x^2 z^2.$$

Calculați $\nabla \times (\nabla f)$ în punctul $A(1, 0, 1)$.

Set 2

1. Rezolvați ecuațiile de ordin superior:

(a) $xy^{(2)} + 3y^{(1)} = 1$;

(b) $y^{(2)} - y^{(1)} - 2y = 3e^{2x}$.

2. Rezolvați sistemul diferențial:

$$\begin{cases} x' & = x + 3y \\ y' & = -x + 5y - 2e^t \end{cases},$$

cu funcțiile necunoscute $x = x(t)$, $y = y(t)$ și cu condițiile inițiale $x(0) = 3$ și $y(0) = 1$.

3. Fie cîmpul vectorial:

$$\vec{v} = (zx - y)\vec{i} + (x - zy)\vec{j} + (x^2 - y^2)\vec{k}.$$

Determinați liniile sale de cîmp și suprafețele de cîmp care conțin curba dată de $xy = 1$ și $z = 1$.

4. Fie cîmpul vectorial:

$$\vec{v} = (3x, -2y + z, x^2 + z^2).$$

Calculați $\nabla \times \vec{v}$ în punctul $A(-1, 1, 1)$.

INDEX