Bazele calculului diferențial

Notițe de seminar

Adrian Manea
Curs: Luminița Costache

17 ianuarie 2019

Cuprins

SEMINAR 1

RECAPITULARE ȘIRURI

Exerciții

1. Calculați limitele șirurilor cu termenul general:

(a) $a_n = \dfrac{n^3 + 5n^2 + 1}{6n^3 + n + 4}$;

(b) $a_n = \dfrac{n^2 + 2n + 5}{5n^3 - 1}$;

(c) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2 + 1} + 4\sqrt{n^2 + n + 1}}{n}$;

(d) $a_n = \dfrac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3}$;

(e) $a_n = \dfrac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n + 1)}{2n^3}$;

(f) $a_n = \dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{(2n - 1)(2n + 1)}$;

(g) $a_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - n$;

(h) $a_n = \sqrt[3]{n^2 + 1} - \sqrt[3]{n^2 + n}$;

(i) $a_n = \left(\dfrac{n + 1}{2n}\right)^{\frac{3n^2}{n^2+10}}$;

(j) $a_n = \ln \dfrac{n^3 + 6n}{n^3 + n^2 + n + 1}$;

(k) $a_n = \dfrac{1}{n^2 + 1} + \dfrac{2}{n^2 + 2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2 + n}$;

(l) $a_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{n}$;

(m) $a_n = \left(\dfrac{2n + 1}{2n - 1}\right)^{n - \sqrt{n}}$;

(n) $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$;

(o) $a_n = \dfrac{\ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n}{n + 1}$;

(p) $a_n = \left(\dfrac{n + 5}{n + 2}\right)^n$;

(q) $a_n = \left(n + \dfrac{1}{n}\right) \cdot \ln\left(1 + \dfrac{n}{n^2 + 1}\right)$;

(r) $a_n = \sqrt[n]{n!}$;

(s) $a_n = \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$;

(t) $a_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{64} + \cdots + \dfrac{1}{4^n}$.

2. Să se determine parametrii $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încît:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2 + n + 1}{2n + 1} - an - b \right) = 1;$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2}{n + a} - n \right) = 1;$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(a\sqrt{n + 3} + \sqrt{n + 1} \right) = 0.$

3. Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor de mai jos. În caz de adevăr, justificați, în caz de falsitate, dați un contraexemplu:

(a) Orice șir monoton este mărginit.

(b) Orice șir mărginit este monoton.

(c) Orice șir convergent este monoton.

(d) Orice subșir al unui șir monoton este monoton.

(e) Există șiruri monoton crescătoare care au cel puțin un subșir monoton descrescător.

(f) Suma a două șiruri monotone este un șir monoton.

(g) Diferența a două șiruri monoton crescătoare este un șir monoton crescător.

(h) Suma a două șiruri nemărginite este un șir nemărginit.

(i) Orice șir divergent este nemărginit.

(j) Orice șir nemărginit are limita $\pm\infty$.

(k) Produsul a două șiruri care nu au limită este un șir care nu are limită.

(l) Dacă două șiruri sînt convergente, atunci raportul lor este un șir convergent.

(m) Dacă pătratul unui șir este convergent, atunci șirul inițial este convergent.

(n) Dacă un șir convergent are toți termenii diferiți de zero, atunci limita sa este diferită de zero.

SEMINAR 2

SERII DE NUMERE REALE

2.1 Generalități

O serie, înțeleasă informal ca o sumă infinită, este definită formal de două elemente:

- șirul termenilor generali;
- șirul sumelor parțiale.

Astfel, de exemplu, dacă luăm seria $\sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{n!}$, avem:

- șirul termenilor generali este $x_n = \frac{2^n}{n!}$;
- șirul sumelor parțiale este $s_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{2^k}{k!}$.

Seria se numește *convergentă* dacă șirul sumelor parțiale este convergent, iar limita acestui șir se numește *suma seriei*. În caz contrar, seria se numește *divergentă*, adică șirul sumelor parțiale nu are limită sau aceasta este infinită. Cînd vorbim despre *natura seriei*, ne referim dacă aceasta este convergentă sau divergentă.

Spre deosebire de cazul șirurilor din liceu, în cazul seriilor trebuie mai multă atenție cînd discutăm convergența. Aceasta deoarece seriile au o *natură cumulativă*, adică toți termenii anteriori din șirul sumelor parțiale își aduc contribuția. Mai precis, avem o recurență de forma:

$$s_{p+1} = s_p + x_{p+1}.$$

De aceea, următoarele proprietăți sînt specifice seriilor:

(a) Dacă într-o serie schimbăm ordinea unui număr finit de termeni, obținem o serie nouă, care are aceeași natură cu cea inițială. Dacă există, suma seriei nu se schimbă.

(b) Dacă eliminăm un număr finit de termeni dintr-o serie, se obține o serie nouă, cu aceeași natură. Dacă există, suma seriei poate să se schimbe.

(c) Dacă o serie este convergentă, atunci ea are șirul sumelor parțiale mărginit.

(d) Dacă o serie este convergentă, atunci șirul termenilor săi generali tinde către zero. Reciproca este, în general, falsă (contraexemplu $\sum \frac{1}{n}$).

   Această proprietate ne permite să formulăm o *condiție necesară de convergență*:

(e) Dacă șirul termenilor generali ai unei serii nu este convergent către zero, atunci seria este divergentă.

2.2 Serii cu termeni pozitivi

În cazul seriilor care au șirul termenilor generali alcătuit numai din numere pozitive, avem următoarele proprietăți, dintre care unele rezultă prin particularizarea celor de mai sus:

(a) Șirul sumelor parțiale al unei serii cu termeni pozitivi este strict crescător.

(b) O serie cu termeni pozitivi are întotdeauna sumă (finită sau nu).

(c) O serie cu termeni pozitivi este convergentă dacă și numai dacă șirul sumelor parțiale este mărginit.

(d) **Criteriul de comparație termen cu termen:** O serie care are termeni mai mari (doi cîte doi) decît o serie divergentă este divergentă. O serie care are termeni mai mici (doi cîte doi) decît o serie convergentă este convergentă.

(e) **Criteriul de comparație la limită, termen cu termen:** Fie $\sum_n x_n$ și $\sum_n y_n$ două serii cu termeni pozitivi. Presupunem că $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \dfrac{y_{n+1}}{y_n}$. Atunci:

   - Dacă seria $\sum_n y_n$ este convergentă, atunci și seria $\sum x_n$ este convergentă;
   - Dacă seria $\sum_n x_n$ este divergentă, atunci și seria $\sum_n y_n$ este divergentă.

(f) **Criteriul de comparație la limită:** Fie $\sum_n x_n$ și $\sum_n y_n$ două serii cu termeni pozitivi, astfel încît $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \ell$.

   - Dacă $0 < \ell < \infty$, atunci cele două serii au aceeași natură;

- Dacă $\ell = 0$, iar seria $\sum_n y_n$ este convergentă, atunci și seria $\sum_n x_n$ este convergentă;
- Dacă $\ell = \infty$, iar seria $\sum_n y_n$ este divergentă, atunci și seria $\sum_n x_n$ este divergentă.

(g) **Criteriul radical:** Fie $\sum_n x_n$ o serie cu termeni pozitiv, astfel încît $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \ell$. Atunci:

- Dacă $\ell < 1$, seria este convergentă;
- Dacă $\ell > 1$, seria este divergentă;
- Dacă $\ell = 1$, criteriul nu decide.

(h) **Criteriul raportului:** Fie $\sum_n x_n$ o serie cu termeni pozitivi și fie $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$. Atunci:

- Dacă $\ell < 1$, seria este convergentă;
- Dacă $\ell > 1$, seria este divergentă;
- Dacă $\ell = 1$, criteriul nu decide.

(i) **Criteriul lui Raabe-Duhamel:** Fie $\sum_n x_n$ o serie cu termeni pozitivi și fie:

$$\ell = \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right).$$

Atunci:

- Dacă $\ell < 1$, seria este divergentă;
- Dacă $\ell > 1$, seria este convergentă;
- Dacă $\ell = 1$, criteriul nu decide.

(j) **Criteriul logaritmic:** Fie $\sum_n x_n$ o serie cu termeni pozitivi și presupunem că există limita:

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{x_n}}{\ln n}.$$

Atunci:

- Dacă $\ell < 1$, seria este divergentă;
- Dacă $\ell > 1$, seria este convergentă;
- Dacă $\ell = 1$, criteriul nu decide.

(k) **Criteriul integral:** Fie $f : (0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ o funcție crescătoare și șirul $a_n = \displaystyle\int_1^n f(t)dt$. Atunci seria $\sum_n f(n)$ este convergentă dacă și numai dacă șirul (a_n) este convergent.

(l) **Criteriul condensării:** Fie (x_n) un șir astfel încît $x_n \geq x_{n+1} \geq 0, \forall n$. Atunci seriile $\sum_n x_n$ și $\sum_n 2^n x_{2^n}$ au aceeași natură.

2.3 Seria geometrică și seria armonică

Două serii foarte importante pe care le putem folosi în comparații sînt următoarele.

Seria geometrică: Fie $a \in \mathbb{R}$ și $q \in \mathbb{R}$. Considerăm progresia geometrică de prim termen a și rație q, care definește seria $\sum_n aq^n$, pe care o numim *seria geometrică* de rație q.

Suma parțială de rang n se poate calcula cu formula cunoscută din liceu:

$$S_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = \begin{cases} a \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}, & q \neq 1 \\ na, & q = 1 \end{cases}$$

Pentru convergență, să remarcăm că dacă $|q| < 1$, atunci:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q},$$

deci seria este convergentă și are suma $\dfrac{a}{1-q}$.

Dacă $|q| \geq 1$, se poate verifica ușor, folosind criteriul necesar, că seria geometrică este divergentă.

Un alt exemplu important este **seria armonică generalizată (Riemann)**, definită prin $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$, pentru $\alpha\ in \mathbb{R}$. Se poate observa că:

- Dacă $\alpha \leq 0$, termenul general al seriei nu converge către zero, deci seria este divergentă, conform criteriului necesar;
- Dacă $\alpha > 0$, termenii seriei formează un șir descrescător de numere pozitive. Seria este convergentă pentru $\alpha > 1$ și divergentă pentru $\alpha \leq 1$.

În cazul particular $\alpha = 1$, seria se numește simplu *seria armonică*.

2.4 Exerciții

Studiați natura următoarelor serii cu termeni pozitivi, definite de șirul termenilor generali (x_n), cu:

(a) $x_n = \left(\dfrac{3n}{3n+1}\right)^n$ (D, necesar);

(b) $x_n = \dfrac{1}{n!}$ (C, comparație);

(c) $x_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n+1}}$ (C, comparație);

(d) $x_n = \dfrac{n!}{n^{2n}}$ (C, raport);

(e) $x_n = n!\left(\dfrac{a}{n}\right)^n$, $a \in \mathbb{R}$ (discuție, raport);

(f) $x_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ (C, raport);

(g) $x_n = \dfrac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$, $a > -1$ (discuție, Raabe);

(h) $x_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}$ (D, Raabe);

(i) $x_n = \left(1 - \dfrac{3\ln n}{2n}\right)^n$ (C, logaritmic);

(j) $x_n = \left(\dfrac{n+1}{3n+1}\right)^n$ (C, rădăcină);

(k) $x_n = \left(\dfrac{1}{\ln n}\right)^{\ln(\ln n)}$ (D, logaritmic);

(l) $x_n = \dfrac{1}{n\ln n}$ (D, integral);

(m) $x_n = \dfrac{1}{n\ln^2 n}$ (C, integral);

(n) $x_n = \dfrac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}$ (D, necesar + Cauchy);

(o) $x_n = \dfrac{1}{7^n + 3^n}$ (C, comparație);

(p) $x_n = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ (D, comparație);

(q) $x_n = \sqrt{n^4 + 2n + 1} - n^2$ (D, comparație);

(r) $x_n = n^2 e^{-\sqrt{n}}$ (C, logaritmic);

(s) $x_n = \dfrac{\ln n}{n^2}$ (C, comparație)

SEMINAR 3

SERII OARECARE. APROXIMAȚII

3.1 Convergență absolută și semiconvergență

Dacă lucrăm cu serii care pot avea și termeni negativi, studiul convergenței trebuie făcut mai atent. Astfel, avem nevoie de următoarele:

Definiție 3.1: O serie $\sum_n x_n$ se numește *alternată* dacă produsul $x_n \cdot x_{n+1} < 0$, pentru orice indice $n \in \mathbb{N}$.

Pentru asemenea serii, avem la dispoziție un singur criteriu, anume:

Teoremă 3.1 (Criteriul lui Leibniz)**:** *Fie $\sum_n (-1)^n x_n$ o serie alternată.*
Dacă șirul (x_n) este descrescător și converge către zero, atunci seria este convergentă.

Pentru serii alternate, avem următoarele noțiuni suplimentare:

Definiție 3.2: O serie $\sum_n x_n$ se numește *absolut convergentă* dacă seria modulelor $\sum_n |x_n|$ este convergentă și *semiconvergentă* dacă are seria modulelor divergentă.

Se poate constata imediat că *orice serie absolut convergentă este convergentă*, deoarece pentru orice număr natural x, avem $x \leq |x|$. În plus, dacă seria inițială este divergentă, atunci și seria modulelor va fi divergentă, din același motiv.

Pentru studiul convergenței seriilor generale, adică avînd și termeni pozitivi, și negativi, avem un criteriu important.

Teoremă 3.2 (Criteriul Abel-Dirichlet)**:** *Presupunem că seria $\sum_n x_n$ se poate scrie sub forma $\sum_n \alpha_n y_n$, cu (α_n) un șir monoton și mărginit. Dacă seria $\sum_n y_n$ este convergentă, atunci și seria inițială este convergentă.*

***Alternativ**, uneori criteriul este formulat astfel: Dacă (α_n) este un șir monoton care tinde către zero, iar șirul cu termenul general $Y_n = y_1 + \cdots + y_n$ este mărginit, atunci seria inițială este convergentă.*

De exemplu, să studiem seria $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$. Fiind o serie alternată, constatăm:

- Seria modulelor este $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$, care este seria armonică, deci divergentă;
- Pentru seria inițială, putem aplica criteriul lui Leibniz. Șirul $x_n = \frac{1}{n}$ este evident descrescător către zero, deci seria este convergentă.

Concluzia este că seria este *semiconvergentă.*

3.2 Aproximarea sumelor seriilor convergente

Putem calcula numeric sumele unor serii convergente, cu aproximații oricît de bune. Următoarele două rezultate sînt fundamentale:

Teoremă 3.3 (Aproximarea sumelor seriilor cu termeni pozitivi)**:** *Fie $x_n \geq 0$ și $k \geq 0$, astfel încît să avem:*

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < k < 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dacă S este suma seriei convergente $\sum_n x_n$, iar s_n este suma primilor n termeni, atunci avem aproximația:

$$|S - s_n| < \frac{k}{1-k} x_n.$$

Teoremă 3.4 (Aproximarea sumelor seriilor alternate)**:** *Fie $\sum_n (-1)^n x_n$ o serie alternată, convergentă și fie S suma sa.*

Dacă S_n este suma primilor n termeni, atunci avem:

$$|S - s_n| \leq x_{n+1}.$$

Cu alte cuvinte, eroarea aproximației are ordinul de mărime al primului termen neglijat.

3.3 Exerciții

1. Studiați natura (AC/SC/D) următoarelor serii, definite de șirul x_n:

(a) $x_n = (-1)^n$;

(b) $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$;

(c) $x_n = \frac{1}{n+i}$;

(d) $x_n = \dfrac{1}{(n+i)\sqrt{n}}$;

(e) $x_n = (-1)^n \dfrac{\log_a n}{n}$, $a > 1$;

(f) $x_n = (-1)^{n+1} \dfrac{2n+1}{3^n}$;

(g) $x_n = (-1)^{n+1} \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

2. Să se aproximeze cu o eroare mai mică decît ε sumele seriilor definite de șirul x_n:

(a) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n!}$, $\varepsilon = 10^{-3}$ $(n = 7)$;

(b) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n^3\sqrt{n}}$, $\varepsilon = 10^{-2}$ $(n = 4)$;

(c) $x_n = \dfrac{1}{n!2^n}$, $\varepsilon = 10^{-4}$;

(d) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n^3\sqrt{n}}$, $\varepsilon = 10^{-2}$.

3. Să se demonstreze convergența și să se determine sumele seriilor cu termenul general dat de:

(a) $x_n = \dfrac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)}$;

(b) $x_n = \dfrac{1}{16n^2 - 8n - 3}$;

(c) $x_n = \ln \dfrac{n+1}{n}$.

SEMINAR 4

SPAȚII METRICE

4.1 Noțiuni teoretice

Definiție 4.1: Fie X o mulțime nevidă. O aplicație $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ se numește *distanță* (metrică) pe X dacă:

(a) $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$;

(b) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;

(c) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$;

(d) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (*inegalitatea triunghiului*).

În acest context, perechea (X, d) se numește *spațiu metric*.

Această noțiune generalizează calculul distanțelor cu ajutorul modulului, cum se procedează în cazul mulțimii numerelor reale, de exemplu. În consecință, avem că $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ este spațiu metric.

Principala noțiune teoretică de interes folosește următoarea:

Definiție 4.2: Fie (X, d) un spațiu metric și fie $f : X \longrightarrow X$ o funcție.

Aplicația f se numește *contracție* pe X dacă există $k \in [0, 1)$ astfel încît:

$$d(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Numărul k se numește *factor de contracție*.

Rezultatul fundamental este:

Teoremă 4.1 (Banach): *Fie (X, d) un spațiu metric complet*[1] *și fie $f : X \longrightarrow X$ o contracție de factor k. Atunci există un unic punct $\xi \in X$ astfel încît $f(\xi) = \xi$.*

În acest context, ξ se numește punct fix *pentru f.*

Putem folosi *metoda aproximațiilor succesive* pentru a găsit punctul fix al unei aplicații. Se construiește un șir recurent astfel. Fie $x_0 \in X$ arbitrar. Definim șirul $x_{n+1} = f(x_n)$. Se poate demonstra că șirul x_n este convergent, iar limita sa este punctul fix căutat. În plus, eroarea aproximației cu acest șir este dată de:

$$d(x_n, \xi) \leq \frac{k^n}{1-k} \cdot d(x_0, x_1), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

4.2 Exemplu rezolvat

Vom aproxima cu o eroare mai mică decît 10^{-3} soluția reală a ecuației

$$x^3 + 4x + 1 = 0.$$

Soluție: Folosind, eventual, metode de analiză (e.g. șirul lui Rolle), se poate arăta că ecuația are o singură soluție reală $\xi \in (0, 1)$. Folosim mai departe metoda aproximațiilor succesive pentru a o găsi.

Fie $X = [0, 1]$ și $f : X \longrightarrow X, f(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$. Se vede că, pînă la o translație (constantă), ecuația dată este echivalentă cu $f(x) = x$, adică a găsi un punct fix pentru f.

Spațiul metric X este complet, ca orice subspațiu al lui $\mathbb{R}$. Mai demonstrăm că f este contracție pe X. Derivata este:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+4)^2} \Longrightarrow \sup_{x \in X} |f'(x)| = -f'(1) = \frac{2}{25} < 1.$$

Am obținut că f este o contracție de factor $\dfrac{2}{25}$.

Construim șirul aproximațiilor succesive. Alegem $x_0 = 0$ (pentru simplitate) și:

$$x_{n+1} = f(x_n) = \frac{1}{x_n^2 + 4}.$$

Evaluarea erorii:

$$|x_n - \xi| < \frac{k^n}{1-k}|x_0 - x_1| = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{25}\right)^2 \leq 10^{-3}$$

de unde rezultă că putem lua:

$$\xi \simeq x_3 = f\left(\frac{16}{65}\right) \simeq 0,235.$$

Observaţie 4.1: Alternativ, puteam lucra cu $g(x) = \dfrac{1}{4}(1 - x^3)$, cu $x \in [0, 1]$. Se arată că și g este o contracție, de factor $k = \dfrac{3}{4}$. În acest caz, șirul aproximațiilor succesive converge mai încet și avem $\xi \simeq x_6$.

4.3 Exerciții propuse

Găsiți soluția reală a ecuațiilor de mai jos, cu eroarea ε:

(a) $x^3 + 12x - 1 = 0, \varepsilon = 10^{-3}$;

(b) $x^5 + x - 15 = 0, \varepsilon = 10^{-3}$;

(c) $3x + e^{-x} = 1, \varepsilon = 10^{-3}$;

(d) $x^3 - x + 5 = 0, \varepsilon = 10^{-2}$;

(e) $x^5 + 3x - 2 = 0, \varepsilon = 10^{-3}$.

SEMINAR 5

ȘIRURI ȘI SERII DE FUNCȚII

5.1 Convergență punctuală și convergență uniformă

Definiție 5.1: Fie (X, d) un spațiu metric și $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ termenul general al unui șir de funcții.
Fie $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție arbitrară.
Spunem că șirul (f_n) *converge punctual* (*simplu*) la f dacă are loc:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad \forall x \in X.$$

Notăm acest lucru cu $f_n \xrightarrow{PC} f$ și numim f *limita punctuală* a șirului (f_n).

Celălalt tip de convergență care ne va interesa este definit mai jos:

Definiție 5.2: În condițiile și cu notațiile de mai sus, spunem că șirul (f_n) este *uniform convergent* la f dacă:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon > 0 \text{ a.î. } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall n \geq N_\varepsilon, \forall x \in X.$$

Vom nota această situație cu $f_n \xrightarrow{UC} f$.

În exerciții se va folosi mai mult caracterizarea:

Propoziție 5.1: *În condițiile și cu notațiile de mai sus, șirul (f_n) converge uniform la f dacă și numai dacă:*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Legătura între cele două tipuri de convergență este dată de:

Teoremă 5.1: *Orice șir de funcții uniform convergent pe un interval este punctual convergent pe același interval.*

Reciproca este falsă, după cum arată contraexemplul: fie $[a, b] = [0, 1]$ și definim șirul de funcții $f_n(x) = x^n$, $n \geq 1$.

Pentru orice $x \in [a, b]$, avem:

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Rezultă că $f_n \xrightarrow{PC} f$, unde f este funcția definită pe cazuri de limita de mai sus. Dar se poate vedea imediat că

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 1 \neq 0,$$

deci șirul este doar punctual convergent, nu uniform convergent.

5.2 Transferul proprietăților

Unele dintre proprietățile funcțiilor sînt transferate de la termenii șirurilor la funcția-limită, iar altele nu, aceasta oferindu-ne uneori metode de calcul, iar alteori, metode de demonstrație.

Teoremă 5.2 (Transfer de continuitate)**:** *Dacă f_n sînt funcții continue, iar șirul f_n converge uniform la f, atunci funcția f este continuă.*

Rezultă de aici că avem o metodă de a demonstra că nu are loc continuitatea uniformă: dacă f_n sînt funcții continue, iar f, obținută din convergența punctuală, *nu* este continuă, rezultă că f_n *nu* tinde uniform la f.

Teoremă 5.3 (Integrare termen cu termen)**:** *Fie $f_n, f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funcții continue. Dacă f_n converge uniform la f, atunci are loc proprietatea de integrare termen cu termen, adică:*

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Teoremă 5.4 (Derivare termen cu termen)**:** *Presupunem că funcțiile f_n sînt derivabile, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Dacă șirul f_n converge punctual la f și dacă există funcția $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încît f_n' converge uniform la g, atunci f este derivabilă și $f' = g$.*

5.3 Serii de funcții

Pentru convergența seriilor de funcții, avem un singur criteriu de utilizat:

Teoremă 5.5 (Weierstrass)**:** *Dacă există un șir cu termeni pozitivi a_n astfel încît $|u_n(x)| \leq a_n$ pentru orice $x \in X$, iar seria $\sum a_n$ converge, atunci seria $\sum u_n$ converge uniform.*

Pentru proprietățile de transfer, avem:

Teoremă 5.6:

- Transfer de continuitate: *Dacă u_n sînt funcții continue, iar seria $\sum u_n$ converge uniform la f, atunci funcția f este continuă.*

- Integrare termen cu termen*: Dacă seria $\sum u_n$ converge uniform la f, atunci f este integrabilă și avem:*

$$\int_a^b \sum_n u_n(x)dx = \sum_n \int_a^b u_n(x)dx.$$

- Derivare termen cu termen: *Presupunem că toate funcțiile u_n sînt derivabile. Dacă seria $\sum u_n$ converge punctual la f și dacă există $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încît $\sum_n u_n'$ converge uniform la g, atunci f este derivabilă și $f' = g$.*

5.4 Polinomul Taylor și seria Taylor

Orice funcție cu anumite proprietăți poate fi aproximată cu un polinom:

Definiţie 5.3: Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval deschis și $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție de clasă $\mathcal{C}^m(I)$. Pentru orice $a \in I$, definim *polinomul Taylor* de gradul $n \leq m$ asociat funcției f în punctual a prin:

$$T_{n,f,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Restul (eroarea de aproximare) este definit prin:

$$R_{n,f,a} = f(x) - T_{n,f,a}(x).$$

Acest polinom poate fi mai departe utilizat pentru a studia *seria Taylor* asociată unei funcții.

Teoremă 5.7: *Fie $a < b$ și $f \in \mathcal{C}^\infty([a,b])$ astfel încît să existe $M > 0$ cu proprietatea că $\forall n \in \mathbb{N}$ și $x \in [a,b]$, avem $|f^{(n)}(x)| \leq M$.*

Atunci pentru orice $x_0 \in (a,b)$, seria Taylor a lui f în jurul punctului x_0 este uniform convergentă pe $[a,b]$ și suma ei este funcția f, adică avem:

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad \forall x \in [a,b].$$

Pentru cazul particular $x_0 = 0$, seria se numește *Maclaurin*.

5.5 Serii de puteri

Seriile de puteri sînt un caz particular al seriilor de funcții, luînd doar funcții de tip polinomial.

Definiţie 5.4: Fie (a_n) un șir de numere reale și fie $a \in \mathbb{R}$.

Seria $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ se numește *seria de puteri centrată în* a, definită de șirul a_n.

Toate rezultatele privitoare la serii de funcții sînt valabile și pentru serii de puteri. Rezultatele specifice urmează.

Teoremă 5.8 (Abel)**:** *Pentru orice serie de puteri* $\sum a_n x^n$ *există un număr* $0 \leq R \leq \infty$ *astfel încît:*

- *Seria este absolut convergentă pe intervalul* $(-R, R)$*;*
- *Seria este divergentă pentru orice* $|x| > R$*;*
- *Seria este uniform convergentă pe* $[-r, r]$*, unde* $0 < r < R$*.*

Numărul R se numește raza de convergență *a seriei, iar intervalul* $(-R, R)$ *se numește* intervalul de convergență.

Calculul razei de convergență se poate face cu unul dintre următoarele criterii:

Teoremă 5.9 (Cauchy-Hadamard)**:** *Fie* $\sum a_n x^n$ *o serie de puteri, R raza sa de convergență și definim:*

$$\omega = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Atunci:

- $R = \omega^{-1}$ *dacă* $0 < \omega < \infty$*;*
- $R = 0$ *dacă* $\omega = \infty$*;*
- $R = \infty$ *dacă* $\omega = 0$.

Teoremă 5.10: *Raza de convergență se poate calcula cu formula:*

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

Observaţie 5.1: Din natura seriilor de puteri, teoremele de derivare și integrare termen cu termen sînt automate. Așadar, dacă $\sum a_n(x-a)^n$ este o serie de puteri iar $S(x)$ este suma sa, atunci:

- Seria derivatelor, $\sum na_n(x-a)^{n-1}$, are aceeași rază de convergență cu seria inițială, iar suma sa este $S'(x)$;
- Seria primitivelor, $\sum a_n \dfrac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$, are aceeași rază de convergență cu seria inițială, iar suma sa este o primitivă a lui S.

5.6 Exerciții

1. Să se studieze convergența punctuală și uniformă a șirurilor de funcții:

(a) $f_n : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \dfrac{1}{nx+1}, n \geq 0;$

(b) $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x^n - x^{2n}, n \geq 0;$

(c) $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}, n > 0;$

(d) $f_n : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2};$

(e) $f_n : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \dfrac{1-x^n}{1-x};$

(f) $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2};$

(g) $f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \dfrac{x+n}{x+n+1};$

(h) $f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2}.$

2. Să se arate că șirul de funcții dat de:

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{n} \arctan x^n$$

converge uniform pe $\mathbb{R}$, dar:

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x) \right)'_{x=1} \neq \lim_{n\to\infty} f_n'(1).$$

Rezultatele diferă deoarece șirul derivatelor nu converge uniform pe $\mathbb{R}$.

3. Să se arate că șirul de funcții dat de:

$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = nxe^{-nx^2}$$

este convergent, dar:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

Rezultatul se explică prin faptul că șirul nu este uniform convergent. De exemplu, pentru $x_n = \frac{1}{n}$, avem $f_n(x_n) \longrightarrow 1$, dar, în general, $f_n(x) \longrightarrow 0$.

4. Să se dezvolte următoarele funcții în serie Maclaurin, precizînd și domeniul de convergență:

(a) $f(x) = e^x$;

(b) $f(x) = \sin x$;

(c) $f(x) = \cos x$;

(d) $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

(e) $f(x) = \frac{1}{1+x}$;

(f) $f(x) = \ln(1+x)$;

(g) $f(x) = \arctan x$;

(h) $f(x) = \ln(1+5x)$;

(i) $f(x) = 3\ln(2+3x)$.

5. Să se calculeze raza de convergență și mulțimea de convergență pentru următoarele serii de puteri:

(a) $\sum_{n\geq 0} x^n$;

(b) $\sum_{n\geq 1} n^n x^n$;

(c) $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$;

(d) $\sum_{n\geq 1} \frac{n^n x^n}{n!}$;

(e) $\sum \frac{(x-1)^{2n}}{n \cdot 9^n}$;

(f) $\sum \frac{(x+3)^n}{n^2}$.

6. Găsiți mulțimea de convergență și suma seriei:

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Indicație: Se derivează termen cu termen și rezultă seria geometrică de rază $-x^2$, căreia i se poate calcula suma, care apoi se integrează.

7. Să se calculeze cu o eroare mai mică decît 10^{-3} integralele:

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$;

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$;

(c) $\displaystyle\int_0^{1} e^{-x^2} dx$.

8. Să se calculeze polinomul Taylor de grad 3 în jurul originii pentru funcțiile:

(a) $f(x) = 3\ln(2+x)$;

(b) $f(x) = \arctan x$;

(c) $f(x) = \sqrt{1+2x}$.

9. Găsiți aproximarea liniară și pătratică a funcțiilor:

(a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$;

(b) $f(x) = \sin(\cos x)$;

(c) $f(x) = e^{\sin x}$;

(d) $f(x) = \arcsin x$.

10. Folosind seria Taylor, aproximați cu o eroare mai mică decît 10^{-3} numerele:

(a) $\sqrt[3]{65}$;

(b) $\sin 32$;

(c) $\arctan \frac{1}{2}$;

(d) $e^{-0,2}$;

(e) $\ln 1,1$;

(f) $\ln 4$;

(g) $\ln 5$.

Indicație: Atenție la domeniile de convergență!

11. Să se precizeze convergența seriilor de funcții:

(a) $\sum \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n}),\ \frac{1}{2} \leq x \leq 2$;

(b) $\sum \frac{nx}{1 + n^5 x^2},\ x \in \mathbb{R}$;

(c) $\sum \arctan \frac{2x}{x^2 + n^4},\ x \in \mathbb{R}$;

(d) $\sum \frac{1}{2^n} \cos(3^n x),\ x \in \mathbb{R}$;

(e) $\sum \frac{(x + n)^2}{n^4},\ x \in [1, 2]$;

(f) $\sum \frac{\ln(1 + nx)}{nx^n},\ x > 0$.

SEMINAR 6

RECAPITULARE PARȚIAL

6.1 Model 1

1. Decideți natura seriilor:
$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{a^n}{n^3}, a > 0.$$

2. Să se aproximeze soluția reală a ecuației, cu o eroare de maxim 10^{-3}:
$$x^3 + 4x - 1 = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. Studiați convergența uniformă a șirului de funcții:
$$f_n : [3, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{n}{x(x^2 + n)}, n \geq 1.$$

4. Verificați convergența seriei de funcții:
$$\sum_{n\geq 1} \frac{n^2 x}{1 + n^3 x}, x \in \mathbb{R}.$$

6.2 Model 2

1. Decideți natura seriilor:
$$\sum \frac{2^n n!}{n^n}, \quad \sum (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

2. Calculați cu o eroare de maxim 10^{-3} soluția reală a ecuației:

$$x^3 + 8x - 1 = 0.$$

3. Studiați convergența uniformă a șirului de funcții:

$$f_n : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \sqrt{1 + nx} - \sqrt{nx}, n \geq 1.$$

4. Verificați dacă seria de funcții de mai jos se poate deriva termen cu termen:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{n^3}.$$

6.3 Model 3

1. Studiați convergența seriilor:

$$\sum_{n\geq 1} (\sqrt{n^4 + 2n + 1} - n^2), \quad \sum_{n\geq 1} \frac{a^n n!}{n^n}, a > 0.$$

2. Găsiți, cu o eroare de maxim 10^{-3}, soluția reală a ecuației:

$$x^3 + 6x - 1 = 0.$$

3. Studiați convergența uniformă a șirului de funcții:

$$f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}.$$

4. Studiați convergența seriei de funcții:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(1 + nx)}{nx^n}, x > 0.$$

SEMINAR 7

FUNCȚII DE MAI MULTE VARIABILE

7.1 Limite și continuitate

În cazul funcțiilor de mai multe variabile, atît studiul continuității, cît și al derivabilității și calculului limitelor sau derivatelor parțiale, se fac cu variabilele pe rînd, adică dînd prioritate uneia dintre ele și considerînd pe celelalte drept parametri.

7.1.1 Exerciții rezolvate

1. Să se arate, folosind definiția, că următoarele funcții nu au limită în origine:

(a) $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}, (x, y) \neq (0, 0)$;

(b) $f(x, y) = \frac{x^2+2x}{y^2-2x}, (x, y) \neq (0, 0)$.

Soluție: Vom folosi definiția cu șiruri, punînd în evidență șiruri de puncte, convergente către $(0, 0)$.

(a) Folosim șiruri de puncte care se află pe drepte care trec prin origine. Aceste drepte au ecuații de forma $y = mx$. Dacă funcția ar avea limită în origine, ar trebui ca:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{x\to 0, y=mx} \frac{2x(mx)}{x^2 + x^2m^2} = \frac{2m}{1 + m^2}.$$

Cu această limită depinde de șirul folosit (de m, mai exact), rezultă că limita nu există, în general.

(b) Calculăm, similar:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{x\to 0, y=mx} \frac{m^2x^2 + 2x}{m^2x^2 - 2x} = -1.$$

Însă, dacă luăm $y^2 = px$, adică $(x, y) \longrightarrow (0, 0)$ pe parabola care trece prin origine, cu $p \in \mathbb{R} - \{2\}$, obținem:

$$\lim_{x \to 0, y^2 = px} \frac{px + 2x}{px - 2x} = \frac{p + 2}{p - 2}.$$

Rezultă că, pentru șiruri diferite, obținem limite diferite, deci funcția nu are limită în origine.

2. Să se calculeze limitele:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{xy + 1} - 1}$;

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y) \to (0,2)} \frac{\sin xy}{x}$;

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y) \to (\infty,\infty)} \frac{x + y}{x^2 + y^2}$.

Soluție: (a) Calculăm direct:

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{xy + 1} - 1} &= \lim_{u \to 0} \frac{u}{\sqrt{u + 1} - 1} \\
&= \lim_{u \to 0} \frac{(\sqrt{u + 1} + 1)u}{u} \\
&= 2.
\end{aligned}$$

(b) Similar:

$$\lim_{(x,y) \to (0,2)} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{(x,y) \to (0,2)} \frac{\sin xy}{xy} \cdot y = 2.$$

(c) Pentru $x, y > 0$, avem:

$$0 < \frac{x + y}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^2} \leq \frac{x}{x^2} + \frac{y}{y^2}.$$

Cum $\displaystyle\lim_{(x,y) \to (\infty,\infty)} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = 0$, rezultă că și limita inițială este nulă.

3. Să se arate că funcția:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2 + \sin(x^3 + y^5)}{x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

este continuă parțial în origine, dar nu este continuă în acest punct.

Soluție: Considerăm variabilele separat. Funcția:

$$f(x,0) = \begin{cases} \frac{\sin x^3}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

este continuă în origine, deoarece $\lim\limits_{x \to 0} f(x,0) = 0 = f(0,0)$.

Similar, funcția $f(0,y)$ este continuă în $y = 0$.

Dar funcția $f(x,y)$ nu este continuă în origine, deoarece avem:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{x\to 0, y^2 = px} \frac{px^2 + \sin(x^3 + p^{\frac{5}{2}} x^{\frac{5}{2}})}{x^2 + p^2 x^2} \\ &= \lim_{x\to 0, y^2 = px} \left[\frac{p}{1+p^2} + \frac{\sin(x^3 + p^{\frac{5}{2}} x^{\frac{5}{2}})}{x^3 + p^{\frac{5}{2}} x^{\frac{5}{2}}} \cdot \frac{x^3 + p^{\frac{5}{2}} x^{\frac{5}{2}}}{x^2 + p^2 x^2} \right] \\ &= \frac{p}{1+p^2}, \end{aligned}$$

care depinde de p.

4. Să se arate că funcția:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

este continuă în raport cu fiecare variabilă în parte, dar nu este continuă în raport cu ansamblul variabilelor.

Indicație: Considerăm $y = b$, fixat. Avem $f(x,b)$ continuă. Similar, $f(a,y)$.

Pentru continuitatea globală în origine, luăm $y = mx$ și obținem o limită care depinde de m.

5. Să se arate că funcția:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy + x^2 y \ln|x+y|}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

este continuă parțial în origine, dar nu este continuă în raport cu ansamblul variabilelor în acest punct.

Indicație: Limitele iterate în origine sînt ambele nule, indiferent de ordine.

Însă pentru $x \longrightarrow 0$ și $y = mx$, limita globală depinde de m.

7.2 Derivate parțiale

Dată o funcție de mai multe variabile, se pot calcula derivatele parțiale ale acesteia în funcție de fiecare dintre variabile, pe rînd. De exemplu, fie funcția:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = 3x \sin y + e^y + 4xy.$$

Calculăm:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3 \sin y + 4y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x \cos y + e^y + 4x.$$

Mai departe, putem calcula și derivatele de ordin superior, după regula:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

și similar pentru celelalte derivate parțiale, adică $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, respectiv $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

De asemenea, pentru o funcție de două variabile $f = f(x, y)$, se definește *laplacianul* funcției ca fiind:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Definiția se extinde natural pentru n variabile.

Dacă f este astfel încît $\Delta f = 0$, atunci funcția f se numește *armonică.*

În plus, dată o funcție de două variabile $f = f(x, y)$, se definește *diferențiala totală* df ca fiind:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Similar se poate defini pentru funcții de n variabile, precum și diferențiala totală de ordinul 2:

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy.$$

7.3 Exerciții

0. Calculați următoarele derivate parțiale folosind definiția:

(a) pentru $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + 5y^2 - 3x + 2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)$;

(b) pentru $f(x, y) = 5x^2 + xy - 3x + 2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(-1, 1)$ și $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)$;

(c) pentru $f(x, y) = 3x - 2y^2 + 2xy + 5$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1)$ și $\frac{\partial f}{\partial y}(-1, 0)$.

1. Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întîi pentru funcțiile:

(a) $f(x, y) = e^{x-y^2}$;

(b) $f(x, y) = \arctan \dfrac{x}{y} + \arctan \dfrac{y}{x}$;

(c) $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$;

(d) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;

(e) $f(x, y) = x^{\sqrt{y}}$.

2. Calculați derivatele parțiale de ordinul întîi pentru funcțiile compuse:

(a) $f(x, y) = \ln(u^2 + v), u(x, y) = e^{x+y^2}, v(x, y) = x^2 + y$;

(b) $f(x, y) = \varphi(2xe^y + 3y \sin 2x)$;

(c) $f(x, y) = \varphi(u, v, w)$, unde $u(x, y) = xy$, $v(x, y) = x^2 + y^2$ și $w(x, y) = 2x + 3y$;

(d) $f(x, y) = \arctan \dfrac{2u}{v}$, unde $u(x, y) = x \sin y$ și $v(x, y) = x \cos y$;

3. Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întîi și al doilea pentru funcțiile:

(a) $f(x, y) = e^x \cos y$;

(b) $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}, (x, y) \neq (0, 0)$;

(c) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2), (x, y) \neq (0, 0)$;

(d) $f(x, y) = x^3 + xy$;

(e) $f(x, y, z) = y \sin(x + z)$;

(f) $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2), (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

4. Să se calculeze derivatele parțiale în punctele indicate:

(a) $f(x, y) = 2x^2 + xy, \dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 1), \dfrac{\partial f}{\partial y}(3, 2)$;

(b) $f(x,y) = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\dfrac{\pi}{4}, 0\right)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$;

(c) $f(x,y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)$;

(d) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-2,2)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(-2,2)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-2,2)$;

(e) $f(x,y) = xy \ln x, x \neq 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y}\partial x(1,1)$.

5. Arătați că funcțiile următoare verifică ecuațiile indicate:

(a) $f(x,y) = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$,

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

(b) $f(x,y,z) = \varphi(xy, x^2 + y^2 + z^2)$,

$$xz\frac{\partial f}{\partial x} - yz\frac{\partial f}{\partial y} + (y^2 - x^2)\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

(c) $f(x,y) = y\varphi(x^2 - y^2)$,

$$\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y^2}f(x,y);$$

(d) $f(x,y,z) = \dfrac{xy}{z}\ln x + x\varphi\left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{z}{x}\right)$, pentru $x > 0$ și $z \neq 0$, ecuația fiind:

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial y}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{xy}{z} - f(x,y,z) = 0.$$

6. Verificați dacă următoarele funcții sînt armonice:

(a) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$;

(b) $f(x,y,z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$;

(c) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$;

(d) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;

(e) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1}$;

(f) $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$.

7. Reprezentați grafic domeniile date de următoarele (in)ecuații:

(a) $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2, y^2 = x\}$;

(b) $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2, y = x, xy = 1\}$;

(c) $D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2y\}$;

(d) $D_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq x, y \geq 0\}$;

(e) $D_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0, x + y - 6 = 0, y^2 = 8x\}$;

(f) $D_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2x + 2y - 1\}$.

SEMINAR 8

POLINOMUL TAYLOR ȘI EXTREME LIBERE

8.1 Polinomul Taylor în 2 variabile

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție de două variabile, de clasă $\mathcal{C}^\infty$. *Polinomul Taylor* al lui f în jurul punctului $A(x_0, y_0)$ se scrie:

$$\begin{aligned}
T(x,y) = f(x_0,y_0) &+ \frac{1}{1!}\left[(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}_A + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}_A\right] + \\
&+ \frac{1}{2!}\left[(x-x_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}_A + 2(x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}_A + (y-y_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}_A\right] + \\
&+ \frac{1}{3!}\left[(x-x_0)^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}_A + 3(x-x_0)^2(y-y_0)\frac{\partial^3 f}{\partial^2 x \partial y}_A + 3(x-x_0)(y-y_0)^2\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial^2 y}_A + (y-y_0)^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}_A\right] \\
&+ \ldots
\end{aligned}$$

Gradul polinomului Taylor este dat de ordinul ultimei derivate parțiale care se calculează. Astfel, avem, în particular:

$$\begin{aligned}
T_1(x,y) &= f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}\left[(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}_A + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}_A\right] \\
T_2(x,y) &= T_1(x,y) + \frac{1}{2!}\left[(x-x_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}_A + 2(x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}_A + (y-y_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}_A\right].
\end{aligned}$$

8.2 Extreme libere

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție de două variabile. Pentru a găsi punctele de extrem ale funcției, parcurgem următoarele etape:

(1) rezolvăm sistemul de ecuații dat de anularea derivatelor parțiale:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Soluțiile acestui sistem se numesc *puncte critice* ale funcției.

(2) scriem *matricea hessiană* a funcției, adică:

$$H_f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

(3) Evaluăm matricea în fiecare punct critic. Astfel, dacă $A(x_0, y_0)$ este punct critic, calculăm $H_f(x_0, y_0)$;

(4) Determinăm *valorile proprii* $\lambda_{1,2}$ ale matricei hessiene, adică rădăcinile polinomului caracteristic $P_M(X) = \det(M - XI_2)$, unde $M = H_f(x_0, y_0)$.

- Dacă $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, atunci punctul $A(x_0, y_0)$ este *punct de minim local*;
- Dacă $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, atunci punctul $A(x_0, y_0)$ este *punct de maxim local*;
- Dacă $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$, atunci punctul $A(x_0, y_0)$ *nu este de extrem*
- Dacă $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$, problema necesită un studiu separat, acesta fiind un caz mai dificil și pe care îl omitem la acest curs.

(5) Se repetă procedura pentru fiecare punct critic.

Procedura de mai sus se aplică în cazul așa-numitelor *extreme libere*, adică atunci cînd domeniul este $D = \mathbb{R}^2$ sau un dreptunghi dat de un produs cartezian de intervale.

Pentru cazul cînd domeniul este dat de (in)ecuații, procedura este diferită și o vom exemplifica mai jos.

8.3 Exerciții rezolvate

Fie funcția $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy$.

(a) Pentru $D = \mathbb{R}^2$, determinați punctele de extrem și calculați valorile funcției în aceste puncte.

(b) Pentru $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 5\}$, determinați punctele de extrem și valorile extreme.

Soluție:
(a) Punctele critice se determină din anularea derivatelor parțiale. Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 6y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 6x.$$

Se obțin $A(0, 0)$ și $B(2, 2)$.

Apoi matricea hessiană:

$$H_f = \begin{pmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 6y \end{pmatrix}$$

Pentru $A(0, 0)$, hessiana este:

$$H_f(A) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} = M.$$

Polinomul caracteristic $P_M(X) = \det(M - XI_2) = X^2 - 36 \implies \lambda_{1,2} = \pm 6$. Rezultă că punctul A nu este de extrem.

Pentru $B(2, 2)$, hessiana este:

$$H_f(B) = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix} = M.$$

Polinomul caracteristic $P_M(X) = (12 - X)^2 - 36 \implies \lambda_1 = 6, \lambda_2 = 18$. Cum ambele valori proprii sînt pozitive, punctul B este punct de minim local.

Valoarea minimă a funcției este $f(2, 2) = -8$.

(b) Problema se studiază pe 2 cazuri: pe interiorul lui D și pe frontiera lui D.

Pentru frontieră, avem $x \geq 0, y \geq 0$ și $x + y = 5$. Atunci putem studia funcția $g(x) = f(x, 5 - x) = 21x^2 - 105x + 125$, care are un punct de minim în vîrful acestei parabole. Se obține $f(2,5; 2,5) = -6,25$. De asemenea, mai avem și valorile $f(0, 5) = 125$, respectiv $f(5, 0) = 125$.

Apoi mai avem de studiat cazurile $y = 0, x \in [0, 5]$, deci funcția $f(x, 0) = h(x)$, precum și $x = 0, y \in [0, 5]$, deci funcția $f(0, y) = j(y)$.

Pentru interiorul domeniului, avem:

$$\mathrm{Int}(D) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, x + y < 5.$$

Putem folosi calculele din cazul anterior și constatăm că $B(2, 2) \in \mathrm{Int}(D)$, deci avem o valoare de minim pe interior, cu $f(2, 2) = -8$.

Așadar, răspunsul final este $\max f = 125$ și $\min f = -8$.

8.4 Exerciții propuse

1. Determinați punctele de extrem și valorile extreme pentru funcțiile:

(a) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y + 3$;

(b) $f(x, y) = 3x^2 - x^3 - 15x - 36y + 9$, definită (i) pe $\mathbb{R}^2$ și (ii) pe $[-4, 4] \times [-3, 3]$;

(c) $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$, definită (i) pe $\mathbb{R}^2$ și (ii) pe $[-1, 2] \times [0, 2]$;

(d) $f(x, y) = x^3 + 3x^2y - 15x - 12y$ definită (ii) pe $\mathbb{R}^2$ și (ii) pe $D = \{x \geq 0, y \geq 0, 3y + x \leq 3\}$;

(e) $f(x, y) = xy(1 - x - y)$, definită pe $[0, 1] \times [0, 1]$;

(f) $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 2xy$, definită pe $D = \{x, y \geq 0, y + 2x \leq 2\}$;

(g) $f(x, y) = x^4 + y^3 - 4x^3 - 3y^2 + 3y$, definită pe $D = \{x^2 + y^2 \leq 4\}$.

În toate exercițiile de mai sus este recomandabil să reprezentați grafic domeniile de definiție.

2. Fie funcția $f(x, y) = x\ln(x^2 + y^2)$. Calculați polinoamele Taylor de gradul 1 și respectiv 2, T_1, T_2 în jurul punctului $(1, 0)$.

3. Aceeași cerință pentru funcția $f(x, y) = 3xe^{x^2+y^2}$ și pentru funcția $g(x, y) = \arctan \dfrac{x}{y}$.

SEMINAR 9

EXTREME CU LEGĂTURI

În cazul în care domeniul de definiție este specificat cu o ecuație sau este dat de un produs de intervale, se aplică o metodă specifică, numită, în general, *metoda multiplicatorilor lui Lagrange.*

Astfel, fie funcția $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ca mai sus, căreia vrem să îi determinăm extremele și presupunem că vrem să o facem numai într-un domeniu dat de:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}.$$

Atunci, ecuația $x^2 + y^2 = 4$ se numește *legătură* și o scriem sub forma unei funcții $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4$, pentru ca legătura să devină $g(x, y) = 0$.

Cu aceasta, metoda multiplicatorilor lui Lagrange înseamnă să alcătuim *funcția lui Lagrange*[1]:

$$F(x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Cu aceasta, singura modificare care trebuie aplicată metodei de mai sus este că sistemul pentru găsirea punctelor critice devine:

$$\begin{cases} f_x &= 0 \\ f_y &= 0 \\ g &= 0 \end{cases} \Longrightarrow (x, y, \lambda).$$

Pentru punctele critice, ne putem dispensa de λ, iar rezolvarea funcționează ca mai devreme.

Observaţie 9.1: Nu întotdeauna este nevoie să ne complicăm cu funcția lui Lagrange. Dacă, de exemplu, legătura era $x + y = 3$, putem să o scriem ca $y = 3 - x$, iar funcția inițială devine o funcție de o variabilă, $f(x, 3 - x)$, căreia îi studiem extremele ca în liceu.

[1]Detalii și explicații geometrice sînt date, de exemplu, foarte clar în această lecție video

Observaţie 9.2: Dacă legăturile sînt multiple, de exemplu, $g_1, g_2, g_3, \dots, g_k$, funcția lui Lagrange corespunzătoare este:

$$F(x, y) = f(x, y) - \sum \lambda_i g_i(x, y),$$

iar sistemul de rezolvat este dat de anularea derivatelor parțiale și a tuturor legăturilor.

9.0.1 Cazul compact

Dacă domeniul de definiție este un *spațiu compact* — ceea ce, în esență, pentru uzul acestui seminar înseamnă un produs de intervale (semi)închise sau legături date de inegalități —, problema se studiază în două etape:

- **În interiorul domeniului**, caz în care legătura este inexistentă;
- **Pe frontieră**, caz în care legătura este dată de egalitate.

De exemplu, pentru domeniile:

$$D_1 = [3, 4] \times [1, 5], \quad D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 2y \leq 2\}$$

- Interiorul înseamnă:
  - pentru D_1, $\text{Int}D_1 = (3, 4) \times (1, 5)$, caz în care avem doar de verificat că punctele critice se găsesc în intervalele date;
  - pentru D_2, avem legătura $3x + 2y < 2$, caz în care, din nou, verificăm dacă punctele critice satisfac inegalitatea *strictă*
- Frontierele înseamnă:
  - pentru D_1, cazurile separate $x = 3, y \in [1, 5]$, apoi $x = 4, y \in [1, 5]$ și invers;
  - pentru D_2, legătura devine $3x + 2y = 2$, pe care o putem rezolva cu Lagrange sau cu metoda simplificată din observația 9.1.

9.1 Exerciții

1. Să se determine valorile extreme ale funcțiilor f, cu legătura g în cazurile:

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1, g(x, y) = x + y - 2$;

(b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2y + 1, g(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1$;

(c) $f(x, y) = 3x + 4y, g(x, y) = x^2 + y^2 + 25$

2. Să se determine valorile extreme pentru funcțiile f, definite pe mulțimea D:

(a) $f(x, y) = 5x^2 + 4xy + 8y^2, D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$;

(b) $f(x, y) = xy^2(x + y - 2), D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 3, x, y \geq 0\}$;

(c) $f(x, y) = \dfrac{x + y}{1 + xy}, D = [0, 1] \times [0, 1]$;

(d) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + xz - yz, D = \{(x, y, z \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1, x, y, z \geq 0\}$.

SEMINAR 10

FUNCȚII IMPLICITE

Funcțiile implicite sînt definite de ecuații care, în general, nu se pot rezolva sau se rezolvă foarte dificil. De exemplu, dacă avem o ecuație de forma:

$$xy + 2x \sin y = 0$$

și vrem să exprimăm de aici funcția $y = y(x)$, constatăm că acest lucru nu este posibil, deoarece ecuația nu poate fi rezolvată pentru y. Astfel, vom spune în acest caz că y a fost definită *implicit* de ecuația de mai sus.

Trecem direct la exemplificarea noțiunilor teoretice pe exerciții rezolvate.

1. Funcția $z = z(x, y)$ este definită implicit de ecuația:

$$(y + z) \sin z - y(x + z) = 0.$$

Calculați expresia:

$$E = z \sin z \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Soluție: Notăm expresia implicită dată cu $F(x, y, z)$. Pentru a putea exprima $z = z(x, y)$, deci ca funcție, este necesar ca expresia F să depindă *funcțional* de z, adică să nu aibă pe z doar ca parametru ori drept constantă. Așadar, avem o *condiție de existență* a funcției implicite $z = z(x, y)$, anume $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$.

Presupunem acum că ne aflăm în ipoteza de mai sus, i.e. condiția de existență este satisfăcută. Atunci, pentru a exprima $\frac{\partial z}{\partial x}$ și $\frac{\partial z}{\partial y}$, vom deriva expresia F, deoarece doar acolo apare funcția z. Obținem:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} \sin z + (y + z) \cos z \frac{\partial z}{\partial x} - y\left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$$

Rezultă:
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{\sin z + (y+z)\cos z - y}.$$

Similar:
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \left(1 + \frac{\partial z}{\partial y}\right)\sin z + (y+z)\cos z\frac{\partial z}{\partial y} - (x+z) - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Rezultă:
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x + z - \sin z}{\sin z + (y+z)\cos z - y}.$$

Înlocuind în expresia cerută, obținem $E = 0$.

Un alt tip de exercițiu de care sîntem interesați este acela al extremelor pentru funcții definite implicit.

2. Să se determine extremele funcției $y = y(x)$, definită implicit de ecuația:
$$x^3 + y^3 - 2xy = 0.$$

Soluție: Fie $F(x,y) = x^3 + y^3 - 2xy$, astfel încît condiția dată este $F(x,y) = 0$.

Pentru a extrage funcția $y = y(x)$, este necesar să punem condiția de existență:
$$\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0 \Longrightarrow 3y^2 - 2x \neq 0.$$

Acum, știind că avem funcția $y = y(x)$, extremele acesteia se determină folosind derivata $y'(x)$, pe care nu o putem obține altfel decît prin intermediul funcției F. Avem, așadar:
$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2y' - 2y - 2xy' = 0.$$

Obținem de aici:
$$y'(x) = \frac{2y - 3x^2}{3y^2 - 2x}.$$

Pentru extreme, avem condițiile:
$$\begin{cases} y'(x) & = 0 \\ F(x,y) & = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} & \neq 0 \end{cases}$$

Rezultă $y = \dfrac{3x^2}{2}$ și înlocuim, obținînd perechea de soluții:
$$(x,y) = \left(\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}, \frac{2\sqrt[3]{4}}{3}\right).$$

Pentru a decide natura punctului de mai sus, este necesar să calculăm y'', care se obține derivînd din nou expresia pentru $y'(x)$. Avem:

$$y''(x) = \frac{(2y' - 6x)(3y^2 - 2x) - (6yy' - 2)(2y - 3x^2)}{(3y^2 - 2x)^2}.$$

Evaluînd pentru $x = \frac{2\sqrt[3]{2}}{3}$, unde $y' = 0$, găsim:

$$y''\left(\frac{2\sqrt[3]{2}}{4}\right) = -3 < 0,$$

deci punctul este de maxim local.

10.1 Exerciții propuse

1. Fie funcția $z = z(x, y)$, definită implicit prin:

$$g(y^2 - x^2, z - xy) = 0,$$

unde $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Calculați expresia:

$$E = y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y}.$$

2. Să se determine extremele funcției $y = y(x)$, definită implicit de ecuațiile:

(a) $x^3 + y^3 - 3x^2y - 3 = 0$;

(b) $2x^2y + y^2 - 4x - 3 = 0$;

(c) $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$;

(d) $x^2 - 2xy + 5y^2 - 2x + 4y = -1$;

(e) $x^2 + y^2 - e^{2\arctan\frac{x}{y}} = 0$.

3. Fie funcția $z = z(x, y)$, definită implicit de ecuația:

$$F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 4z = 12.$$

Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întîi și al doilea pentru funcția z.

SEMINAR 11

RECAPITULARE EXAMEN

11.1 Model 1

1. Studiați continuitatea în origine a funcției:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

2. Calculați, cu o eroare de maxim 10^{-3} integrala:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 - \cos x}{x} dx.$$

3. Să se arate că funcția $f(x, y) = xg(x^2 - y^2)$ verifică ecuația:

$$xy\frac{\partial f}{\partial x} + x^2\frac{\partial f}{\partial y} = y \cdot f.$$

4. Să se determine punctele de extrem pentru funcția f definită pe mulțimea K:

$$f(x, y) = xy^2(x + y - 2), \quad K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 3, x, y \geq 0\}.$$

5. Să se dezvolte în jurul punctului $x_0 = 0$ funcția $f(x) = \ln(3+5x)^2$. Găsiți domeniul de convergență al dezvoltării.

11.2 Model 2

1. Studiați continuitatea funcției:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

2. Să se calculeze, cu o eroare de 10^{-3}, integrala:

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1-e^{x^2}}{x^2} dx.$$

3. Arătați că funcția $f(x,y) = y \cdot \sin(x^2 - y^2)$ verifică egalitatea:

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y^2} \cdot f.$$

4. Determinați minimul și maximul funcției $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, f(x,y) = xy$ pe mulțimea $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 \leq 1\}$.

5. Să se dezvolte în serie Taylor în jurul $x_0 = 0$ funcția:

$$f(x) = \ln(2+3x).$$

Găsiți domeniul de convergență al dezvoltării.

11.3 Model 3

1. Studiați continuitatea funcției:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

2. Calculați, cu o eroare de maxim 10^{-3}, numărul $\sqrt[4]{10004}$.

3. Determinați valorile extreme pentru funcția:

$$f : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{x+y}{1+xy}.$$

4. Să se arate că funcția:

$$f(x,y,z) = \varphi(x - yz, y^2 + z^2)$$

satisface ecuația:

$$(z^2 - y^2)\frac{\partial f}{\partial x} + z\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

5. Verificați dacă funcția $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ este armonică.

INDEX