Analiză 2

Notițe de seminar

Adrian Manea

Curs: A. Niță

11 mai 2019

Cuprins

SEMINAR 1

ECUAȚII ȘI SISTEME DIFERENȚIALE

1.1 Ecuații liniare de ordinul n cu coeficienți constanți

Forma generală este:

$$L[y] = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x),$$

cu $a_i \in \mathbb{R}$ constante.

Dacă avem $f(x) = 0$, atunci ecuația se numește *omogenă*.

Avem o metodă algebrică de a rezolva această ecuație, folosind:

Definiţie 1.1: Se numește *polinomul caracteristic* atașat ecuației omogene $L[y] = 0$ polinomul:

$$F(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n,$$

iar $F(r) = 0$ se numește *ecuația caracteristică* atașată ecuației diferențiale.

Folosind această noțiune, putem rezolva direct ecuația, ținînd seama de următoarele cazuri posibile:

Teoremă 1.1: *(1) Dacă ecuația caracteristică $F(r) = 0$ are rădăcini reale și distincte r_i, atunci un sistem fundamental de soluții este dat de:*

$$\left\{y_i(x) = e^{r_i x}\right\}_{i=1,\dots,n}.$$

(2) Dacă printre rădăcinile lui $F(r)$ există și rădăcini multiple, de exemplu r_1, cu ordinul de multiplicitate p, atunci pentru această rădăcină avem p soluții liniar independente (pe lîngă celelalte):

$$y_1(x) = e^{r_1 x}, y_2(x) = x e^{r_1 x}, \dots, y_p(x) = x^{p-1} e^{r_1 x}.$$

(3) Dacă printre rădăcinile ecuației caracteristice avem și rădăcini complexe, de exemplu $r = a + ib$ și $\overline{r} = a - ib$, atunci fiecărei perechi de rădăcini complexe conjugate îi corespund două soluții liniar independente (pe lîngă celelalte):

$$y_1(x) = e^{ax}\cos bx, \quad y_2(x) = e^{ax}\sin bx.$$

(4) Dacă ecuația caracteristică are rădăcini complexe ca mai sus, cu ordinul de multiplicitate p, atunci lor le corespund $2p$ soluții liniar independente:

$$\left\{y_j(x) = x^{j-1}e^{ax}\cos bx\right\}_{j=1,\dots p}, \quad \left\{y_k(x) = x^{k-p-1}e^{ax}\sin bx\right\}_{k=p+1,\dots,2p}.$$

De exemplu: $y'' - y = 0$, cu condițiile $y(0) = 2$ și $y'(0) = 0$.

Soluție: Ecuația caracteristică este $r^2 - 1 = 0$, deci $r_{1,2} = \pm 1$. Sîntem în primul caz al teoremei, deci un sistem fundamental de soluții este:

$$y_1(x) = e^{-x}, \quad y_2(x) = e^x.$$

Soluția generală este $y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^x$.

Folosind condițiile Cauchy, obținem $c_1 = c_2 = 1$, deci soluția particulară este:

$$y(x) = e^{-x} + e^x.$$

Observaţie 1.1: Dacă ecuația inițială $L[y] = f(x)$ *nu* este omogenă, putem rezolva folosind *metoda variației constantelor (Lagrange).*

În acest caz, metoda variației constantelor presupune următoarele etape. Fie ecuația neomogenă scrisă în forma:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = f(x).$$

Pentru simplitate, vom presupune $n = 2$ și fie o soluție particulară de forma:

$$y_p(x) = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2.$$

Atunci, prin metoda variației constantelor, vom determina funcțiile $c_1(x), c_2(x)$ ca soluții ale sistemului algebric:

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 & = 0 \\ c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' & = \dfrac{f(x)}{a_n(x)} \end{cases}$$

De exemplu: $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x+1}$.

Soluție: Asociem ecuația omogenă, care are ecuația caracteristică $r^2 + 3r + 2 = 0$, cu rădăcinile $r_1 = -1, r_2 = -2$. Așadar, soluția generală a ecuației omogene este:

$$\overline{y}(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}.$$

Determinăm o soluție particulară $y_p(x)$ cu ajutorul metodei variației constantelor. Mai precis, căutăm:

$$y_p(x) = c_1(x)e^{-x} + c_2(x)e^{-2x}.$$

Înlocuind în ecuația neomogenă, rezultă sistemul:

$$\begin{cases} c_1'(x)e^{-x} + c_2'(x)e^{-2x} & = 0 \\ -c_1'(x)e^{-x} - 2c_2'(x)e^{-2x} & = \frac{1}{1+e^x} \end{cases}$$

Rezolvînd ca pe un sistem algebric, obținem:

$$c_1'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}, \quad c_2'(x) = -\frac{e^{2x}}{1+e^x},$$

de unde obținem:

$$c_1(x) = \ln(1+e^x), \quad c_2(x) = -e^x + \ln(1+e^x).$$

În fine, înlocuim în soluția particulară y_p și apoi în cea generală, $y(x) = \overline{y}(x) + y_p(x)$.

Un alt exemplu: $y'' - y = 4e^x$.

Soluție: Ecuația caracteristică $r^2 - 1$ are rădăcinile $r_{1,2} = \pm 1$, deci soluția generală a ecuației liniare omogene este $y_0(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$.

Căutăm acum o soluție particulară a ecuației neomogene, folosind metoda variației constantelor. Așadar, căutăm $y_p(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{-x}$. Din condiția ca y_p să verifice ecuația liniară neomogenă, obținem sistemul:

$$\begin{cases} c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^{-x} = 0 \\ c_1'(x)e^x - c_2'(x)e^{-x} = 4e^x \end{cases}$$

Rezultă $c_1'(x)e^x = 2e^x$, deci $c_1'(x) = 2 \Rightarrow c_1(x) = 2x$, iar $c_2'(x)e^{-x} = -2e^x$, deci $c_2(x) = -e^{2x}$.

În fine, soluția particulară este $y_p(x) = 2xe^x - e^x$, iar soluția generală:

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + e^x(2x-1).$$

1.2 Metoda eliminării pentru sisteme diferențiale liniare

Putem reduce sistemele diferențiale de ordinul I la ecuații de ordin superior.

De exemplu, să pornim cu sistemul:

$$\begin{cases} x' + 5x + y & = 7e^t - 27 \\ y' - 2x + 3y & = -3e^t + 12 \end{cases}$$

Soluție: Din prima ecuație, scoatem y și derivăm:

$$y = 7e^t - 27 - 5x - x' \Rightarrow y' = 7e^t - 5 - x''.$$

Înlocuim în a doua ecuație și obținem o ecuație liniară de ordin superior:

$$x'' + 8x' + 17x = 31e^t - 93.$$

Ecuația caracteristică este $r^2+8r+17 = 0$, cu rădăcinile $r_{1,2} = -4\pm i$. Atunci soluția generală a ecuației omogene este:

$$\overline{x}(t) = e^{-4t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t).$$

Mai departe, căutăm o soluție particulară a ecuației neomogene folosind metoda variației constantelor, a lui Lagrange:

$$x_p(t) = e^{-4t}(c_1(t) \cos t + c_2(t) \sin t).$$

Determinăm funcțiile $c_1(t), c_2(t)$ din sistemul:

$$\begin{cases} c_1'(t) \cos t e^{-4t} + c_2'(t) \sin t e^{-4t} & = 0 \\ c_1'(t)(-\sin t e^{-4t} - 4\cos t e^{-4t}) + c_2'(t)(\cos t e^{-4t} - 4 \sin t e^{-4t}) & = 31e^t - 93. \end{cases}$$

Rezultă:

$$\begin{aligned} c_1'(t) &= -31 \sin t e^{5t} + 93 \sin t e^{4t} \\ \Rightarrow c_1(t) &= -\frac{31}{26} e^{5t}(5 \sin t - \cos t) + \frac{93}{17} e^{4t}(4 \sin t - \cos t) \\ c_2'(t) &= 31 \cos t e^{5t} - 93 \cos t e^{4t} \\ \Rightarrow c_2(t) &= \frac{31}{26} e^{5t}(5 \sin t + \cos t) - \frac{93}{17} e^{4t}(4 \sin t + \cos t). \end{aligned}$$

În fine, obținem:

$$x(t) = e^{-4t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) + \frac{31}{26} e^t - \frac{93}{17},$$

iar mai departe:

$$y(t) = e^{-4t}[(c_1 - c_2) \sin t - (c_1(t) - c_2) \cos t) - \frac{2}{13} e^t + \frac{6}{17}.$$

1.3 Exerciții

1. Rezolvați următoarele ecuații diferențiale liniare de ordin superior:

(a) $y^{(3)} + 4y^{(2)} + 3y^{(1)} = 0$;

(b) $y^{(2)} + 4y^{(1)} + 4y = 0$;

(c) $y^{(3)} + y = 0$;

(d) $y^{(4)} + 4y^{(2)} = 0$;

(e) $y^{(2)} - 2y^{(1)} + y = \dfrac{1}{x}e^{x}$;

(f) $y^{(2)} + y = \dfrac{1}{\cos x}$;

(g) $y^{(3)} + y^{(1)} = \tan x$;

(h) $y^{(3)} + 2y^{(2)} = x + 2$.

2. Rezolvați următoarele sisteme diferențiale, folosind metoda eliminării:

(a) $\begin{cases} y' &= 2y + z \\ z' &= y + 2z \end{cases}, \quad y = y(x), z = z(x)$;

(b) $\begin{cases} y' &= -3y - 4z \\ z' &= y + 2z \end{cases}, \quad y = y(x), z = z(x)$;

(c) $\begin{cases} x' &= x + 3y \\ y' &= -x + 5y - 2e^{t} \end{cases}, \quad x = x(t), y = y(t)$, cu condițiile inițiale $x(0) = 3, y(0) = 1$.

SEMINAR 2

ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDIN SUPERIOR

2.1 Ecuații rezolvabile prin cuadraturi

Acestea sînt ecuații care se pot rezolva prin integrări succesive. Astfel, forma lor generală este $y^{(n)} = f(x)$, în varianta neomogenă. Soluția generală va depinde de n constante arbitrare, rezultate în urma integrărilor succesive.

Exemplu:

$$y'' = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\pi}{6}.$$

Soluție: Integrăm succesiv și obținem:

$$\begin{aligned} y' &= x \arcsin x - \frac{\pi}{6} x + c_1 \\ y &= \frac{x^2}{2} \arcsin x + \frac{1}{4} x \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4} \arcsin x - \frac{\pi}{12} x^2 + c_1 x + c_2. \end{aligned}$$

Dacă nu se dau condiții inițiale, soluția rămîne exprimată ca mai sus, adică în funcție de constantele c_1 și c_2.

Cazul omogen se rezolvă și mai simplu: dacă $y^{(n)} = 0$, atunci y este un polinom de x de gradul $n-1$.

2.2 Ecuații de forma $f(x, y^{(n)}) = 0$

Avem două cazuri care trebuie tratate distinct:

(a) Dacă ecuația poate fi rezolvată în raport cu $y^{(n)}$, adică dacă $\dfrac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \neq 0$, atunci obținem una sau mai multe ecuații ca în secțiunea anterioară;

(b) Dacă ecuația nu este rezolvabilă cu ajutorul funcțiilor elementare în raport cu $y^{(n)}$, dar cunoaștem o reprezentare parametrică a curbei $f(u,v) = 0$, adică $u = g(t), v = h(t)$, cu $t \in [\alpha, \beta]$, atunci soluția generală se poate da sub formă parametrică:

$$\begin{cases} x & = g(t) \\ dy^{(n-1)} & = y^{(n)}dx = h(t)g'(t)dt \end{cases},$$

de unde putem obține succesiv:

$$\begin{cases} y^{(n-1)} & = h_1(t, c_1) \\ \cdots\cdots \\ y(t) & = h_n(t, c_1, \ldots, c_n). \end{cases}$$

Exemplu:

$$x - e^{y''} + y'' = 0.$$

Soluție: Putem nota $y'' = t$ și atunci $x(t) = e^t - t$. Deoarece avem $dy' = y''dx$, rezultă:

$$dy' = t(e^t - 1)dt \Rightarrow y' = -\frac{t^2}{2} + te^t - e^t + c_1.$$

Mai departe, $dy = y'dx$, deci:

$$dy = \left(-\frac{t^2}{2} + te^t - e^t + c_1\right)(e^t - 1)dt.$$

În fine, soluția este:

$$y(t) = e^{2t}\left(\frac{t}{2} - \frac{3}{4}\right) + e^t\left(-\frac{t^2}{2} + 1 + c_1\right) + \frac{t^3}{6} - c_1 t + c_2.$$

2.3 Ecuații de forma $f(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$

Din nou, distingem două cazuri:

(a) Dacă ecuația este rezolvabilă prin funcții elementare în raport cu $y^{(n)}$, atunci putem nota $z = y^{(n-1)}$ și avem $z' = f(z)$. Ecuația devine cu variabile separabile pentru z și se rezolvă corespunzător, conducînd la $z = y^{(n-1)} = f_1(x, c_1)$, care este de tipul anterior;

(b) Dacă ecuația nu este rezolvabilă prin funcții elementare în raport cu $y^{(n)}$, dar cunoaștem o reprezentare parametrică de forma:

$$y^{(n-1)} = h(t), \quad y^{(n)} = g(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

atunci putem folosi $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx$, pentru a obține soluția pas cu pas, sub formă parametrică:

$$\begin{aligned} x &= \int \frac{h'}{g} dt + c_1 \\ y^{(n-1)} &= h(t) \\ dy^{(n-2)} &= h(t) = \frac{hh'}{g} dt \\ y^{(n-2)} &= \int \frac{hh'}{g} dt + c_2 \\ &\vdots \\ y &= \int y' dx + c_n. \end{aligned}$$

Exemplu: $y'' = -\sqrt{1 - y'^2}$. *Soluție:* Facem schimbarea de funcție $z(x) = y'$ și ecuația devine:

$$-\frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = dx, \quad |z| < 1.$$

Soluția generală este: $\arccos z = x + c_1$, deci $z = \cos(x + c_1)$.

Mai departe, obținem $y(x) = \sin(x + c_1) + c_2$.

De asemenea, trebuie să mai remarcăm și soluțiile particulare $y = \pm x + c$.

2.4 Ecuații de forma $f(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$

Ecuația se rezolvă cu schimbarea de funcție $y^{(k)} = z(x)$ și rezultă o ecuație de ordin $n - k$:

$$f(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0,$$

pe care o integrăm.

Exemplu: $(1 + x^2)y'' = 2xy'$.

Soluție: Cu schimbarea de funcție $y' = z(x)$, obținem ecuația:

$$\frac{z}{z'} = \frac{2x}{1+x^2},$$

iar apoi, prin integrare, rezultă $z = y' = c_1(1+x^2)$. În fine:

$$y(x) = c_1 x + c_1 \frac{x^3}{3} + c_2.$$

Exemplu 2: $y \cdot y'' - yy'^2 = 0$.

Soluție: Notăm $y' = z$ și obținem:

$$y \cdot z' - yz^2 = 0 \Rightarrow y(z' - z^2) = 0,$$

de unde rezultă $y = 0$ sau $z' - z^2 = 0$.

Din a doua variantă, deducem succesiv:

$$\frac{dz}{dx} = z^2 \Rightarrow \frac{dz}{z^2} = dx \Rightarrow -\frac{1}{z} = x + c_1.$$

Mai departe:

$$-\frac{1}{y'} = x + c_1 \Rightarrow y' = \frac{-1}{x+c_1} \Rightarrow y = -\ln(x+c_1) + c_2.$$

2.5 Ecuații de forma $f(y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$

Să remarcăm că astfel de ecuații nu conțin pe y. Deci putem lua pe y' ca variabilă independentă și pe y'' ca fiind funcție de y'. Astfel, reducem discuția la un caz anterior.

Exemplu: $x^2 y'' = y'^2 - 2xy' + 2x^2$.

Soluție: Facem schimbarea de funcție $y' = z(x)$ și obținem o ecuație Riccati:

$$z' = \frac{z^2}{x^2} - 2 \cdot \frac{z}{x} + 2.$$

Observăm soluția particulară $z_p = x$ și integrăm, cu $z = x + \dfrac{1}{u(x)}$.

Obținem succesiv:

$$\begin{aligned}
z(x) &= x + \frac{c_1 x}{x + c_1} \Rightarrow \\
y'(x) &= x + \frac{c_1 x}{x + c_1} \Rightarrow \\
y(x) &= \frac{x^2}{2} + c_1 x - c_1^2 \ln|x + c_1| + c_2,
\end{aligned}$$

2.6 Ecuații autonome (ce nu conțin pe x)

În cazul acestor ecuații, putem micșora ordinul cu o unitate, notînd $y' = p$ și luăm pe y variabilă independentă.

Observaţie 2.1: Există posibilitatea de a pierde soluții de forma $y = c$ prin această metodă, deci trebuie verificat dacă este cazul separat.

Exemplu: $1+y'^2 = 2yy'$. *Soluție:* Putem lua $y' = p$ drept funcție, iar pe y drept variabilă independentă. Rezultă:

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = p\frac{dp}{dy}.$$

Atunci ecuația devine:

$$\frac{2pdp}{1+p^2} = \frac{dy}{y} \Rightarrow y = c_1(1+p^2).$$

Acum trebuie să obținem pe x ca funcție de p și c_1. Deoarece $dx = \frac{1}{p}dy$, iar $dy = 2c_1pdp$, rezultă $dx = 2c_1dp$. Deci $x = 2c_1p + c_2$, iar soluția generală devine $x(p) = 2c_1p + c_2$. Din expresia lui y de mai sus, rezultă:

$$y = c_1 + \frac{(x-c_2)^2}{4c_1}.$$

Exemplu 2: $y'' = y'^2 = 2e^{-y}$.

Soluție: Notăm $y' = p$ și luăm ca necunoscută $p = p(y)$. Rezultă:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = p'p \Rightarrow p'p + p^2 = 2e^{-y}.$$

Dacă notăm $p^2 = z$, obținem o ecuație liniară neomogenă:

$$z' + 2z = 4e^{-y},$$

ce are ca soluție generală $z(y) = c_1e^{-2y} + 4e^{-y}$.

Revenim la y și avem:

$$z = p^2 = y'^2 \Rightarrow y' = \pm\sqrt{c_1e^{-2y} + 4e^{-y}},$$

adică:

$$\frac{dy}{\pm\sqrt{c_1e^{-2y} + 4e^{-y}}} = dx \Rightarrow x + c_2 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{c_1 + 4e^y}.$$

Echivalent, putem scrie soluția și în forma implicită:

$$e^y + \frac{c_1}{4} = (x+c_2)^2.$$

2.7 Ecuații Euler

O ecuație Euler are forma generală:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k y^{(k)} = f(x),$$

pentru varianta omogenă și $f(x) = 0$ pentru varianta neomogenă, cu a_i constante reale.

Ecuațiile Euler se pot transforma în ecuații cu coeficienți constanți prin notația (schimbarea de variabilă) $|x| = e^t$.

De remarcat faptul că, deoarece funcția necunoscută este $y = y(x)$, pentru a obține $y' = \dfrac{dy}{dx}$ trebuie să aplicăm regula de derivare a funcțiilor compuse. Folosind notația de la fizică $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$, putem scrie:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \dot{y} \cdot e^{-t}.$$

Mai departe, de exemplu, pentru derivatele superioare:

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dt}\left(\dot{y} \cdot e^{-t}\right) \cdot \frac{dt}{dx} \\ &= e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y}). \end{aligned}$$

Exemplu: $x^2 y'' + xy' + x = x$.

Soluție: Facem substituția $|x| = e^t$ și, folosind calculele de mai sus, obținem:

$$e^{2t} \cdot e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y}) - e^t \cdot e^{-t} + y(t) = e^t.$$

Echivalent: $\ddot{y} - 2\dot{y} + y = e^t$.

Aceasta este o ecuație liniară de ordinul al doilea, neomogenă. Asociem ecuația algebrică $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 = 0$, deci soluția generală a variantei omogene este:

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t.$$

Folosind metoda variației constantelor, obținem succesiv:

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 e^t + c_2 t e^t + \frac{t^2 e^t}{2} \Rightarrow \\ y(x) &= c_1 x + c_2 x \ln x + \frac{x \ln^2 x}{2}. \end{aligned}$$

2.8 Exerciții

1. Rezolvați următoarele ecuații Euler:

(a) $x^2y^{(2)} - 3xy' + 4y = 5x, \quad x > 0;$

(b) $x^2y^{(2)} - xy' + y = x + \ln x, \quad x > 0;$

(c) $4(x+1)^2y^{(2)} + y = 0, x > -1;$

(d) $xy'' + 3y' = 1;$

(e) $x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = \dfrac{1}{x^2}.$

2. Rezolvați următoarele ecuații:

(a) $y^{(3)} = \sin x + \cos x;$

(b) $y^{(3)} + y^{(2)} = \sin x;$

(c) $xy^{(2)} + (x-2)y^{(1)} - 2y = 0;$

(d) $x^2y^{(2)} = y'^2;$

(e) $y^{(4)} - 3y^{(3)} + 3y^{(2)} - y^{(1)} = 0;$

(f) $y^{(2)} - y^{(1)} - 2y = 3e^{2x};$

(g) $4(x+1)^2y^{(2)} + y = 0;$

(h) $\begin{cases} x' &= x + ye^{2t} \\ y' &= y - xe^{2t} + 1 \end{cases}$, cu condițiile inițiale $x(0) = 1$ și $y(0) = 0$.

Amintim, pentru ecuații liniare și neomogene de ordinul întîi, cu forma generală:

$$y' = P(x)y + Q(x),$$

avem soluțiile:

$$y_p = c \cdot \exp\left(-\int_{x_0}^{x} P(t)dt\right)$$
$$y_g = \left(c + \int Q(t) \cdot \exp\left(\int_{x_0}^{t} P(s)ds\right)dt\right) \cdot \exp\left(-\int_{x_0}^{x} P(t)dt\right).$$

Indicații:

(a) Integrări succesive;

(b) Notăm $y^{(2)} = z$, deci ecuația devine $z' + z = \sin x$, care este o ecuație liniară și neomogenă, de ordinul întîi. Soluția generală este:

$$z(x) = e^{-x}\left(c + \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x)\right),$$

iar apoi $y'(x) = \displaystyle\int z(x)dx$ și $y(x) = \displaystyle\int y'(x)dx$ etc.

(c) Notăm $z = y' + y$, deci ecuația devine $xz' - 2z = 0$, care are soluția evidentă $z = c_1 x^2$, din care obtinem $y' + y = c_1 x^2$, care este o ecuație liniară și neomogenă, cu soluția generală:

$$y = c_2 e^{-x} + c_1 x^2 - 2c_1 x + 2c_1.$$

(d) Notăm $y' = z$ și obținem $x^2 z' = z^2$. Observăm soluția particulară $z = 0$, deci $y = c$, iar în celelalte cazuri, avem:

$$x^2 \frac{dz}{dx} = z^2 \Rightarrow \frac{dx}{x^2} = \frac{dz}{z^2}.$$

Aceasta conduce la $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x} + c$ și ne întoarcem la y:

$$dx = dy\left(\frac{1}{x} + c\right) \Rightarrow \frac{xdx}{cx+1} = dy,$$

care, prin integrare, conduce la:

$$y = \frac{x}{c} - \frac{1}{c^2}\ln(cx+1) + c_1,$$

pentru $c \neq 0$ și $y' = x$ dacă $c = 0$, adică $y = \dfrac{x^2}{2} + c_1$.

(e) Ecuația caracteristică este:

$$r^4 - 3r^3 + 3r^2 - r = 0 \Rightarrow r(r^3 - 3r^2 + 3r - 1) = 0,$$

de unde observăm soluțiile $r = 0, r = 1$ etc.

(f) Ecuația caracteristică este $r^2 - r - 2 = (r+1)(r-2) = 0$.

(g) Este o ecuație Euler în raport cu $t = x + 1$.

(h) Aplicăm metoda substituției (eliminării).

SEMINAR 3

STABILITATE ȘI LINII DE CÎMP

Problema stabilității soluțiilor este una foarte importantă și dificilă, în general. Ideea de bază este că, dacă ne gîndim la interpretarea fizică a sistemelor de ecuații și soluțiilor lor, de exemplu în cazul mecanicii, soluția returnată este posibil să fie validă într-o vecinătate foarte mică a punctului în care a fost calculată. În cazul acesta, situația corespunde unei poziții de *echilibru (mecanic) instabil*, adică atunci cînd deplasarea corpului la o mică distanță de poziția curentă îl face să iasă din poziția de echilibru. Similar, putem avea și *echilibru (mecanic) stabil* sau *echilibru (mecanic) indiferent*.

Teoria stabilității soluțiilor sistemelor diferențiale este un subiect amplu, fondat și discutat în detaliu de *H. Poincaré* și *A. Liapunov*, de aceea, majoritatea teoremelor și rezultatelor importante le sînt atribuite.

Contextul în care lucrăm este următorul. fie un sistem diferențial de forma $x' = v(t,x)$, unde x poate fi vector (adică să țină loc de mai multe variabile). Presupunem că sînt îndeplinite condițiile teoremei fundamentale de existență și unicitate a soluției problemei Cauchy, pentru $t \in [t_0, \infty)$ și că avem $x \in U \subseteq \mathbb{R}^n$, un deschis. Așadar, pentru orice $x_0 \in U$, există și este unică o soluție $x = \varphi(t)$, cu $\varphi : [t_0, \infty) \to U$< astfel încît $\varphi(t_0) = x_0$.

Tipurile de stabilitate sînt definite mai jos.

Definiție 3.1: O soluție $x = \varphi(t)$ ca mai sus se numește *stabilă spre* ∞ în sens Poincaré-Liapunov (sau, echivalent, $x_0 = \varphi(t_0)$ se numește *poziție de echilibru*) dacă la variații mici ale lui x_0 obținem variații mici ale soluției.

Formal, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît pentru orice $\tilde{x_0} \in \mathbb{R}^n$, cu $\|\tilde{x_0} - x_0\| < \delta(\varepsilon)$, soluțiile corespunzătoare, $\tilde{\varphi}(t)$ și $\varphi(t)$ satisfac inegalitatea:

$$|\tilde{\varphi}(t) - \varphi(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

Definiție 3.2: Poziția de echilibru $x = 0$ se numește *stabilă în sens Poincaré-Liapunov* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$, care depinde doar de ε, astfel încît pentru orice $x_0 \in U$

pentru care $\|x_0\| < \delta$, soluția φ a sistemului cu condiția inițială $\varphi(0) = x_0$ se prelungește pe întreaga semiaxă $t > 0$ și satisface inegalitatea $\|\varphi(t)\| < \varepsilon, \forall t > 0$.

Definiţie 3.3: Poziția de echilibru $x = 0$ a sistemului diferențial autonom se numește *asimptotic stabilă* dacă este stabilă și, în plus, pentru soluția $\varphi(t)$ din definiția de mai sus, are loc:

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0.$$

În exercițiile pe care le vom întîlni, vom folosi următorul rezultat fundamental.

Presupunem că avem un sistem diferențial scris în forma matriceală:

$$X' = AX, \quad A \in M_n(\mathbb{R}),$$

unde A este matricea sistemului. Mai presupunem, de asemenea, că matricea A este inversabilă, astfel încît sistemul admite soluția $X = 0$.

Atunci avem:

Teoremă 3.1 (Poincaré-Liapunov)**:** *Păstrînd contextul și notațiile de mai sus, dacă toate valorile proprii ale matricei A au partea reală negativă, atunci poziția de echilibru $x = 0$ este* asimptotic stabilă.

Dacă există $\lambda \in \sigma(A)$, cu $\mathrm{Re}\lambda > 0$, atunci $x = 0$ este instabilă.

3.1 Exerciții

1. Studiați stabilitatea poziției de echilibru $x = 0$ pentru sistemele diferențiale:

(a) $\begin{cases} x' &= -4x + y \\ y' &= -x - 2y \end{cases};$

(b) $\begin{cases} x' &= -x + z \\ y' &= -2y - z; \\ z' &= y - z \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x' &= 2y \\ y' &= x + ay \end{cases}, a \in \mathbb{R}.$

2. Să se afle pentru ce valori ale lui $a \in \mathbb{R}$ soluția nulă a sistemului de mai jos este asimptotic stabilă:

$$\begin{cases} x' &= ax + y \\ y' &= (2 + a)x + ay \\ z' &= x + y - z \end{cases}$$

3.2 Integrale prime și linii de cîmp

Definiţie 3.4: Un sistem diferențial de forma:

$$x_j' = v_j(x_1, \dots, x_n), \quad j = 1, \dots, n,$$

unde $v = (v_1, \dots, v_n) : U \to \mathbb{R}^n$ este un cîmp de vectori definit într-un domeniu $U \subseteq \mathbb{R}^n$ se numește *sistem diferențial autonom*.

O altă formă de scriere a sistemului de mai sus este *forma simetrică*:

$$\frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} = \dots = \frac{dx_n}{v_n}.$$

Dacă $f : U \to \mathbb{R}$ este o funcție oarecare, de clasă $\mathcal{C}^1(U)$, atunci pentru orice $x \in U$ se poate scrie *derivata lui f în x în direcția vectorului v*, notată $\frac{df}{dv}(x)$, și definită prin formula cunoscută:

$$\frac{df}{dv}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} v_i(x).$$

Definiţie 3.5: Fie $v : U \to \mathbb{R}^n$ un cîmp de vectori și $f : U \to \mathbb{R}^n$ o funcție de clasă $\mathcal{C}^1(U)$. Funcția se numește (o) *integrală primă* a sistemului diferențial autonom $x' = v(x), x \in U$ dacă derivata sa în direcția cîmpului de vectori v este nulă în fiecare punct din U, adică $\frac{df}{dv} = 0$.

Echivalent, putem înțelege definiția astfel: $f : U \to \mathbb{R}$ este o integrală primă pentru sistemul diferențial autonom $x' = v(x)$ dacă și numai dacă pentru orice soluție $x = \varphi(t), \varphi : I \to U$, funcția $f \circ \varphi$ este constantă pe I. De aceea, uneori mai putem scrie pe scurt $f(x_1, \dots, x_n) = c$, constant. Rezultă că putem înțelege integralele prime ca pe *legi de conservare*.

În exerciții, pentru a găsi integralele prime asociate unui sistem autonom, se rescrie sistemul în forma simetrică, iar apoi, folosind proprietățile rapoartelor egale, încercăm să ajungem la un raport de forma $\frac{df}{0}$, egal cu rapoartele precedente. Atunci f va fi integrală primă, deoarece va rezulta $df = 0$, adică f constantă în lungul curbelor integrale.

Exemplu: Să se găsească integralele prime ale sistemului simetric:

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x}.$$

Soluție: Folosind proprietățile proporțiilor, rescriem sistemul:

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x} = \frac{dx+dy+dz}{z-x+x-z+y-x} = \frac{dx+dy+dz}{0}.$$

O altă formă de a obține o integrală primă este:

$$\frac{xdx + ydy + zdz}{x(z-x) + y(x-z) + z(y-x)} = \frac{xdx + ydy + zdz}{0}.$$

Rezultă:

$$\begin{cases} dx + dy + dz & = 0 \\ xdx + ydy + zdz & = 0, \end{cases}$$

de unde obținem două integrale prime:

$$x + y + z = c_1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = c_2.$$

Observaţie 3.1: Rezolvarea este identică în cazul în care cerința pornește cu un cîmp vectorial în spațiu, de forma:

$$\vec{V} = (z-y)\vec{i} + (x-z)\vec{j} + (y-x)\vec{k}.$$

Astfel, se asociază sistemul simetric de mai sus, etc.

Pentru acest caz, integralele prime se mai numesc *linii de cîmp* sau *curbe integrale*.

3.3 Exerciții

1. Să se determine liniile de cîmp pentru cîmpurile vectoriale de pe $\mathbb{R}^3$:

(a) $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + xyz\vec{k}$;

(b) $\vec{v} = (2z - 3y)\vec{i} + (6x - 2z)\vec{j} + (3y - 6x)\vec{k}$;

(c) $\vec{v} = (xz + y)\vec{i} + (x + yz)\vec{j} + (1 - z^2)\vec{k}$;

(d) $\vec{v} = (x^2 + y^2)\vec{i} + 2xy\vec{j} - z^2\vec{k}$.

Indicație (a): Scriem sistemul autonom asociat cîmpului vectorial $\vec{v}$ sub forma:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{xyz}.$$

Din prima egalitate, rezultă $x = c_1 y$, deci a doua egalitate devine:

$$c_1 y dy = \frac{dz}{z} \Rightarrow c_1 \frac{y^2}{2} = \ln|z| + c_2.$$

Așadar, obținem $\frac{x}{y} \cdot \frac{y^2}{2} = \ln|z| + c_2$.

Rezultă că liniile de cîmp pentru $\vec{v}$ sînt curbele:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} & = c_1 \\ xy - \ln|z| & = c_2. \end{cases}$$

(b) Sistemul poate fi scris sub forma:

$$\frac{dx}{2z-3y} = \frac{dy}{6x-2z} = \frac{dz}{3y-6x} = \frac{dx+dy+dz}{0}.$$

Așadar, $dx + dy + dz = 0$, deci $x + y + z = c_1$.

Din forma inițială obținem și:

$$\frac{3xdx}{3x(2z-3y)} = \frac{\frac{3}{2}ydy}{\frac{3}{2}y(3x-z)} = \frac{zdz}{z(y-2x)} = \frac{3xdx + \frac{3}{2}ydy + zdz}{0},$$

deci $3xdx + \dfrac{3}{2}ydy + zdz = 0$, adică $3\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3}{4}y^2 + \dfrac{z^2}{22} = c_2$.

(c) Obținem:

$$\frac{dx+dy}{(x+y)(z+1)} = \frac{dz}{1-z^2} \Rightarrow \frac{d(x+y)}{x+y} = -\frac{dz}{z-1}.$$

Rezultă $\ln|x+y| + \ln|z-1| = \ln c_1$, adică $(x+y)(z-1) = c_1$.

Apoi:

$$\frac{dy-dx}{x+zy-xz-y} = \frac{dy-dx}{(x-y)(1-z)} = \frac{dz}{1-z^2}.$$

Rezultă $-\dfrac{d(x-y)}{x-y} = \dfrac{dz}{z+1}$, de unde $(x-y)(z+1) = c_2$.

Așadar, liniile de cîmp sînt curbele:

$$\begin{cases} (x+y)(z-1) & = c_1 \\ (x-y)(z+1) & = c_2 \end{cases}$$

(d) Sistemul simetric rezultat este:

$$\frac{dx}{x^2+y^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{-z^2}.$$

Prin adunarea primelor două rapoarte, obținem:

$$\frac{d(x+y)}{(x+y)^2} = \frac{dz}{-z^2},$$

adică $\dfrac{1}{x+y} + \dfrac{1}{z} = c_1$.

Prin scădere, avem $\dfrac{d(x-y)}{(x-y)^2} = \dfrac{dz}{-z^2}$, deci $\dfrac{1}{x-y} + \dfrac{1}{z} = c_2$.

Liniile de cîmp se obțin:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} + \dfrac{1}{z} & = c_1 \\ \\ \dfrac{1}{x-y} + \dfrac{1}{z} & = c_2 \end{cases}$$

3.4 Resurse suplimentare

Termenul în engleză pentru linii de cîmp este `field line`, iar cîteva explicații, împreună cu exemple cunoscute din cazul cîmpurilor fizice, se pot găsi pe Wikipedia.

Metoda rezolvării ecuațiilor diferențiale în mod grafic, folosind *cîmpul tangent* (eng. `slope field`), cu semnificația fizică a cîmpului de viteze, poate fi foarte utilă. Ea este prezentată succint pe Wikipedia și mai detaliat, inclusiv cu exerciții rezolvate, la Khan Academy.

Trecerea de la cîmpuri vectoriale în spațiu la ecuații diferențiale (sau sisteme) autonome este explicată pe scurt aici.

Alte materiale se mai pot găsi în cursul de la Iași (v. §2.1.2), în cursul prof. Crăciun și Barbu (cap. 2) și în aceste notițe de la UBB Cluj.

SEMINAR 4

ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE ȘI SUPRAFEȚE DE CÎMP

4.1 Ecuații cu derivate parțiale de ordinul întîi

Forma generală a unei ecuații cu derivate parțiale (EDP) de ordinul întîi pentru funcția necunoscută $u = u(x, y, z)$ este:

$$P(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial x} + Q(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial y} + R(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

unde $P, Q, R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sînt funcții de clasă (cel puțin) $\mathcal{C}^1$.

Pentru rezolvare, se scrie sistemul simetric asociat, care are forma generală

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

și i se determină integralele prime. Dacă $I_1 = C_1$ și $I_2 = C_2$ sînt integralele prime ale sistemului, atunci soluția finală a ecuației inițiale este:

$$u(x,y,z) = \varphi(I_1, I_2),$$

unde φ este o funcție oarecare de clasă (cel puțin) $\mathcal{C}^1$.

Observaţie 4.1: Pentru simplitate, vom mai folosi notațiile cunoscute pentru derivate parțiale, anume $u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ etc.

Observaţie 4.2: Metoda de rezolvare de mai sus cere implică și verificarea independenței celor două integrale prime, în sensul exemplificat mai jos.

Exemplu: Rezolvăm ecuația cu derivate parțiale:

$$(4z-5y)u_x+(5x-3z)u_y+(3y-4x)u_z=0.$$

Soluție: Scriem sistemul simetric asociat, care este:

$$\frac{dx}{4z-5y}=\frac{dy}{5x-3z}=\frac{dz}{3y-4x},$$

sistem care este valabil pe domeniul:

$$D=\{(x,y,z\in\mathbb{R}^3)\mid 4z\neq 5y, 5x\neq 3z, 3y\neq 4x\}.$$

Pentru a obține integralele prime, amplificăm prima fracție cu 3, a doua cu 4 și a treia cu 5 și obținem:

$$\frac{3dx}{12z-15y}=\frac{4dy}{20x-12z}=\frac{5dz}{15y-20x}=\frac{3dx+4dy+5dz}{0},$$

de unde $I_1(x,y,z)=3x+4y+5z=c_1$ este o integrală primă.

Mai putem amplifica și primul raport cu $2x$, pe al doilea cu $2y$ și pe al treilea cu $2z$ și obținem:

$$\frac{2xdx}{8xz-10xy}=\frac{2ydy}{10xy-6yz}=\frac{2zdz}{6yz-8xz}=\frac{2xdx+2ydy+2zdz}{0},$$

deci o a doua integrală primă este $I_2(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=c_2$.

Evident, cele două integrale prime sînt definite pe același domeniu D.

Independența celor două înseamnă verificarea că matricea dată de derivatele lor parțiale are rangul maxim pe domeniul de definiție. Avem, așadar:

$$A=\begin{pmatrix} I_{1x} & I_{2x} \\ I_{1y} & I_{2y} \\ I_{1z} & I_{2z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2x \\ 4 & 2y \\ 5 & 2z \end{pmatrix},$$

matrice care se poate verifica imediat că are rangul 2, adică maxim, pentru orice $(x,y,z)\in D$. Deci integralele prime sînt independente și soluția finală a ecuației este:

$$u(x,y,z)=\varphi(3x+4y+5z, x^2+y^2+z^2),$$

unde φ este o funcție arbitrară de clasă $\mathcal{C}^1$.

4.2 Suprafețe de cîmp

Suprafețele de cîmp pentru un cîmp vectorial tridimensional se obțin scriind o ecuație cu derivate parțiale asociată, căreia îi determinăm soluția generală. Suprafața de cîmp este, atunci, dată de anularea soluției generale, scrisă în forma implicită.

Exemplu: Fie cîmpul vectorial:

$$\vec{V} = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j} + z(x^2 + y^2)\vec{k}.$$

Determinăm suprafețele de cîmp.

Soluție: Scriem ecuația cu derivate parțiale asociată cîmpului, pentru o funcție necunoscută $u = u(x, y, z)$. Avem:

$$xy^2u_x + x^2yu_y + z(x^2 + y^2)u_z = 0.$$

Rezolvarea ecuației se face ca mai sus, scriind sistemul asociat:

$$\frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{x^2y} = \frac{dz}{z(x^2 + y^2)},$$

definit pe domeniul potrivit, adică $D = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$.

Din prima egalitate, putem simplifica cu xy și avem $xdx = ydy$, deci o integrală primă este $x^2 - y^2 = c_1$.

Putem amplifica rapoartele cu y, x și respectiv 1 și avem:

$$\frac{ydx}{xy^3} = \frac{xdy}{x^3y} = \frac{dz}{z(x^2 + y^2)} = \frac{ydx + xdy}{xy(x^2 + y^2)}.$$

Din ultimele două rapoarte, obținem, după simplificare cu $x^2 + y^2$:

$$\frac{dz}{z} = \frac{d(xy)}{xy},$$

deci $\dfrac{xy}{z} = c_2$.

Acum soluția generală a ecuației cu derivate parțiale este:

$$u(x, y, z) = \varphi\left(x^2 - y^2, \frac{xy}{z}\right),$$

cu φ o funcție arbitrară de clasă $\mathcal{C}^1$, deci suprafețele de cîmp ale cîmpului $\vec{V}$ au forma:

$$\varphi\left(x^2 - y^2, \frac{xy}{z}\right) = 0.$$

În unele cazuri, se pot cere anume suprafețe de cîmp, de exemplu:

Exemplu: Să se determine suprafața de cîmp a cîmpului vectorial:

$$\vec{V} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k},$$

care trece prin curba dată de intersecția cilindrului $x^2 + z^2 = 4$ cu planul $y = 0$.

Soluție: Mai întîi, determinăm toate suprafețele de cîmp, ca mai sus. Scriem direct sistemul asociat:

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{xy}.$$

Amplificăm cu x, y, respectiv z și obținem $xdx = ydy = zdz$, adică $x^2 - y^2 = c_1, x^2 - z^2 = c_2$ sînt două integrale prime.

Aceste integrale prime dau o familie infinită de suprafețe, dintre care vrem să aflăm pe cea care trece prin curba dată. Așadar, avem de rezolvat sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= c_1 \\ x^2 - z^2 &= c_2 \\ x^2 + z^2 &= 4 \\ y &= 0 \end{cases}$$

pentru constantele c_1 și c_2, care ne vor identifica exact suprafața.

Este suficient să găsim condiția de compatibilitate a sistemului, care se poate obține din primele două ecuații. Înmulțim prima ecuație cu 2 și o scădem din ea pe a doua și comparăm cu a treia ecuație. Se obține $2c_1 - c_2 = 4$. Apoi, înlocuim în integralele prime și avem $2(x^2 - y^2) - (x^2 - z^2) = 4$, care se prelucrează și se aduce la forma canonică:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{4} = 1,$$

care este un *hiperboloid cu o pînză*.

4.3 Ecuații cu derivate parțiale cvasiliniare

Forma generală a ecuațiilor cu derivate parțiale cvasiliniare pentru o funcție $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ este:

$$P_1(x_1, \dots, x_n)u_{x_1} + P_2(x_1, \dots, x_n)u_{x_2} + \cdots + P_{n-1}(x_1, \dots, x_n)u_{x_{n-1}} + Q(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

adică apar toate derivatele parțiale ale lui u, mai puțin ultima.

În exercițiile pe care o să le întîlnim cel mai des, funcția u este înlocuită cu $z = z(x, y)$, iar atunci ultima derivată parțială o putem gîndi, de exemplu, ca $z_z = 1$.

Modul de rezolvare este explicat pe exemplul de mai jos.

Exemplu: Fie ecuația cvasiliniară:

$$(z-y)^2\frac{\partial z}{\partial x}+xz\frac{\partial z}{\partial y}=xy.$$

Soluție: Se poate vedea că ecuația este cvasiliniară, funcția necunoscută fiind $z=z(x,y)$.

Din teorie, ecuația trebuie să aibă o soluție scrisă în formă implicită $u(x,y,z)=0$. De fapt, această funcție trebuie înțeleasă ca $u=u(x,y,z(x,y))$. Folosind formula de derivare a funcțiilor compuse, dacă vrem să scriem derivata parțială în raport cu x a lui u, trebuie să ținem cont că x apare și în $z(x,y)$, deci avem:

$$0=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x},$$

și similar pentru derivata în raport cu y. Rezultă:

$$z_x=-\frac{u_x}{u_z},\quad z_y=-\frac{u_y}{u_z}.$$

Înlocuim în ecuația dată și înmulțim relația cu u_z, obținînd:

$$(z-y)^2u_x+xzu_y+xyu_z=0,$$

care este o ecuație cu derivate parțiale de ordinul întîi și o putem rezolva ca în prima secțiune.

Scriem sistemul asociat:

$$\frac{dx}{(z-y)^2}=\frac{dy}{xz}=\frac{dz}{xy}.$$

Din a doua egalitate obținem direct $y^2-z^2=c_1$, care este o integrală primă.

Amplificăm primul raport cu x, pe al doilea cu $(y-z)$ și pe al treilea cu $(z-y)$ și obținem prin adunare:

$$xdx+(y-z)dy+(z-y)dz=0\Rightarrow xdx+ydy+zdz-d(yz)=0.$$

Rezultă a doua integrală primă $x^2+y^2+z^2-2yz=x^2+(y-z)^2=c_2$.

Soluția pentru u va fi:

$$u(x,y,z)=\varphi(y^2-z^2,x^2+(y-z)^2),$$

cu φ o funcție de clasă $\mathcal{C}^1$ pe domeniul de definiție.

Atunci soluția pentru z se obține din forma implicită $u(x,y,z)=0$.

4.4 Exerciții

1. Rezolvați ecuațiile cvasiliniare:

(a) $x(y^3-2x^3)z_x + y(2y^3-x^3)z_y = 9z(x^3-y^3)$;

(b) $2xzz_x + 2yzz_y = z^2-x^2-y^2$;

(c) $2yz_x + 3x^2z_y + 6x^2y = 0$;

(d) $x\left(y^2-z^2\right)z_x - y\left(x^2+y^2\right)z_y = z\left(x^2+y^2\right)$;

(e) $xzz_x + yzz_y = x+y$.

Indicații: (a) Sistemul diferențial autonom la care se ajunge este:

$$\frac{dx}{x(y^3-2x^3)} = \frac{dy}{y(2y^3-x^3)} = \frac{dz}{9z(x^3-y^3)}.$$

Rezultă:

$$\frac{ydx+xdy}{3xy(y^3-x^3)} = \frac{dz}{9z(x^3-y^3)} \Rightarrow \frac{d(xy)}{xy} = -\frac{dz}{3z} \Rightarrow x^3y^3z = c_1.$$

Din primele două rapoarte obținem:

$$\frac{y(2y^3-x^3)}{x(y^3-2x^3)} = \frac{dy}{dx}.$$

Simplificăm forțat cu $\dfrac{y}{x} = u$ și ajungem la ecuația:

$$\frac{u^3-2}{u(u+1)(u^2-u+1)}du = \frac{dx}{x}.$$

Rezultă $\ln(c_2x) = -2\ln u + \ln(u+1) + \ln(u^2-u+1)$, adică, în final, $c_2 = \dfrac{x^3+y^3}{x^2y^2}$.

(b) Se ajunge la sistemul autonom:

$$\frac{dx}{2xz} = \frac{dy}{2yz} = \frac{dz}{z^2-x^2-y^2}.$$

Din primele două rapoarte avem $\dfrac{y}{x} = c_1$ și apoi:

$$\frac{2xdx}{2x^2} = \frac{2ydy}{2y^2} = \frac{2zdz}{z^2-x^2-y^2},$$

adică $c_2 x = x^2 + y^2 + z^2$.

(d) Dacă $u(x,y,z) = 0$ este soluția căutată în formă implicită, atunci ajungem la ecuația cu derivate parțiale de ordinul întîi:

$$x(y^2 - z^2)u_x - y(x^2 + z^2)u_y + z(x^2 + y^2)u_z = 0.$$

Din sistemul diferențial asociat, obținem:

$$xdx + ydy + zdz = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = c_1.$$

Mai departe:

$$\frac{ydx - xdy}{xy(y^2 - z^2) + xy(x^2 + z^2)} = \frac{ydx - xdy}{xy(x^2 + y^2)} = \frac{dz}{z(x^2 + y^2)},$$

de unde rezultă:

$$\frac{ydx - xdy}{xy} = \frac{dz}{z} \Rightarrow \frac{x}{yz} = c_2.$$

2. Determinați suprafețele de cîmp pentru cîmpurile vectoriale:

(a) $\vec{V} = (x + y + z)\vec{i} + (x - y)\vec{j} + (y - x)\vec{k}$;

(b) $\vec{V} = (x - y)\vec{i} + (x + y)\vec{j} + \vec{k}$.

Indicații: (a) Ajungem la sistemul:

$$\frac{dx}{x + y + z} = \frac{dy}{x - y} = \frac{dz}{y - x}.$$

Din prima egalitate, rezultă $dy + dz = 0 \Rightarrow y + z = c_1$. Înlocuind în cea de-a doua egalitate $z = c_1 - y$, rezultă $(x - y)dx = (x + c_1)dy$, deci $xdx - d(xy) - c_1 dy = 0$, adică $\frac{x^2}{2} - xy - c_1 y = c_2$. Înlocuim $c_1 = y + z$ și obtinem $\frac{x^2}{2} - xy - y^2 - yz = c_2$.

Domeniul de definiție va fi $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z \neq 0\}$.

(b) Se ajunge la sistemul:

$$\frac{dx}{x - y} = \frac{dy}{x + y} = \frac{dz}{1}.$$

Rezultă:

$$\frac{xdx}{x^2 - xy} = \frac{ydy}{xy + y^2} = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = \frac{\frac{1}{2}d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \frac{dz}{1},$$

deci $x^2 + y^2 = c_1 e^{2z}$, iar apoi, din $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x-y}$, putem nota $\dfrac{y}{x} = u$ și rezultă $x^2 + y^2 = c_2 e^{2\arctan \frac{y}{x}}$.

3. Determinați suprafața de cîmp a cîmpului vectorial:

$$\vec{V} = 2xz\vec{i} + 2yz\vec{j} + (z^2 - x^2 - y^2)\vec{k},$$

care conține cercul dat de $z = 0$ și $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

Indicație: Integralele prime independente ale sistemului se determină din:

$$\frac{dx}{2xz} = \frac{dy}{2yz} = \frac{dz}{z^2 - x^2 - y^2}.$$

Din primele două rapoarte, obținem $y = c_1 x$, iar apoi, putem înmulți toate egalitățile cu $2z$ și prelucrăm mai departe:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{2z}{z^2 - x^2 - y^2} \Rightarrow \frac{2xdx}{2x^2} = \frac{2ydy}{2y^2} = \frac{2zdz}{z^2 - x^2 - y^2} = \frac{2(xdx + ydy + zdz)}{x^2 + y^2 + z^2},$$

deci $x^2 + y^2 + z^2 = c_2 x$.

Pentru a obține intersecția cu cercul dat, avem condiția ca sistemul de mai jos să fie compatibil:

$$\begin{cases} y & = c_1 x \\ x^2 + y^2 + z^2 & = c_2 x \\ z & = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x & = 0 \end{cases}.$$

Din ultimele trei ecuații se obține că sistemul este compatibil dacă și numai dacă $c_2 = 2$.

Rezultă $x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$, care este o sferă.

4. Fie cîmpul vectorial:

$$\vec{V} = (x+y)\vec{i} + (y-x)\vec{j} - 2z\vec{k}.$$

Să se determine:

(a) liniile de cîmp;

(b) linia de cîmp ce conține punctul $M(1,0,1)$;

(c) suprafețele de cîmp;

(d) suprafața de cîmp care conține dreapta $z = 1, y - x\sqrt{3} = 0$.

Indicație: Pentru liniile de cîmp, ecuația dată de primele două rapoarte:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x+y}{y-x}$$

este o ecuație diferențială de ordinul întîi, omogenă, care se poate rezolva cu substituția $y = tx$.

5. Să se determine soluția ecuațiilor cu derivate parțiale de ordinul întîi:

(a) $yu_x - xu_y = 0$;

(b) $xzu_x - yzu_y + (x^2 + y^2)u_z = 0$;

(c) $xu_x - yu_y = 0$.

SEMINAR 5

ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE DE ORDINUL AL DOILEA

5.1 Clasificare și forma canonică

O ecuație *cvasiliniară* cu derivate parțiale de ordinul al doilea, cu două variabile independente, are forma generală:

$$A(x,y)z_{xx} + 2B(x,y)z_{xy} + C(x,y)z_{yy} + D(x,y,z,z_x,z_y) = 0,$$

unde $A, B, C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sînt funcții reale, continue pe un deschis din $\mathbb{R}^2$ (care este domeniul de definiție al ecuației), iar D este de asemenea funcție continuă.

Definiție 5.1: Se numesc *curbe caracteristice* ale ecuației de mai sus curbele care se află pe suprafețele integrale ale ecuației, i.e. care satisfac *ecuația caracteristică*:

$$A(x,y)dy^2 - 2B(x,y)dxdy + C(x,y)dx^2 = 0.$$

Clasificarea ecuațiilor se face în funcție de curbele caracteristice. Astfel, avem:

- $AC - B^2 < 0 \Rightarrow$ ecuația este de *tip hiperbolic*;
- $AC - B^2 = 0 \Rightarrow$ ecuația este de *tip parabolic*;
- $AC - B^2 > 0 \Rightarrow$ ecuația este de *tip eliptic*.

Exemple foarte des întîlnite provin din fizica matematică:

- **Ecuația coardei vibrante**, care are aceeași formă generală cu **ecuația undelor plane**:

  $$u_{xx} - \frac{1}{a^2} u_{tt} = 0, \quad a^2 = \frac{\rho}{T_0},$$

  unde ρ este densitatea liniară a coardei, iar T_0 este tensiunea la care este supusă coarda în poziția de repaus.

  Ecuația este de tip hiperbolic, după cum se poate verifica imediat.

- **Ecuația căldurii**, cu forma generală:

  $$u_{xx} = \frac{1}{a^2} u_t, \quad a^2 = \frac{k}{c\rho},$$

  unde k este coeficientul de conductibilitate termică, c este căldura specifică, iar ρ este densitatea.

  Ecuația are tip parabolic.

- **Ecuația lui Laplace**, cu forma generală:

  $$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

  care este o ecuație de tip eliptic.

5.2 Forma canonică

Pornind de la ecuația caracteristică, o putem rezolva ca pe o ecuație de gradul al doilea și obținem, în general, două soluții:

$$\frac{dy}{dx} = \mu_1(x,y), \quad \frac{dy}{dx} = \mu_2(x,y).$$

Aceste ecuații se numesc *curbele caracteristice* ale ecuației de pornire.

Prin integrarea celor două ecuații, se obțin două familii de curbe în planul XOY, de forma $\varphi_1(x,y) = c_1$ și $\varphi_2(x,y) = c_2$, unde c_1 și c_2 sînt constante arbitrare.

Aducerea ecuației de pornire la forma canonică se face pe următoarele cazuri:

- Dacă ecuația este *de tip hiperbolic*, se face schimbarea de variabile:

  $$\tau = \varphi_1(x,y), \quad \eta = \varphi_2(x,y),$$

  iar prima formă canonică a ecuației se obține a fi:

  $$z_{\tau\eta} + \Psi_1(\tau, \eta, z, z_\tau, z_\eta) = 0,$$

  Putem face și transformarea $\tau = x+y$ și $\eta = x-y$, iar a doua formă canonică se obține a fi:

  $$z_{xx} - z_{yy} + \Phi_1(\tau, \eta, z, z_x, z_y) = 0.$$

- Dacă ecuația este *de tip parabolic*, o să obținem $\varphi_1 = \varphi_1 = \varphi(x, y)$ și vom face schimbarea de variabilă:

  $$\tau = \varphi(x, y), \quad \eta = x.$$

  Forma canonică este:

  $$z_{\eta\eta} + \Psi_2(\tau, \eta, z, z_\tau, z_\eta) = 0.$$

- Pentru ecuațiile *de tip eliptic*, funcțiile φ_1 și φ_2 sînt complex conjugate și putem nota $\alpha(x, y) = \mathrm{Re}\varphi_1(x, y)$, iar $\beta(x, y) = \mathrm{Im}\varphi_1(x, y)$. Schimbarea de variabile este:

  $$\tau = \alpha(x, y), \quad \eta = \beta(x, y),$$

  iar forma canonică este:

  $$z_{\tau\tau} + z_{\eta\eta} + \Psi_3(\tau, \eta, z, z_\tau, z_\eta) = 0.$$

5.3 Cazul coeficienților constanți și $D = 0$

Ne ocupăm deocamdată de cazul coeficienților constanți și $D = 0$, ecuația prezentîndu-se în forma generală:

$$Az_{xx} + 2Bz_{xy} + Cz_{yy} = 0, \quad A, B, C \in \mathbb{R}.$$

Atunci ecuația diferențială a curbelor caracteristice este:

$$Ady^2 - 2Bdxdy + Cdx^2 = 0.$$

Obținem soluțiile de forma generală:

$$\begin{cases} dy - \mu_1 dx &= 0 \\ dy - \mu_2 dx &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - \mu_1 x &= c_1 \\ y - \mu_2 x &= c_2 \end{cases}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Aducerea la forma canonică se simplifică:

- Pentru cazul hiperbolic, substituția este:

  $$\begin{cases} \tau &= y - \mu_1 x \\ \eta &= y - \mu_2 x \end{cases},$$

  iar ecuația devine:

  $$z_{\tau\eta} = 0,$$

  care are soluția generală $z = f(\tau) + g(\eta)$, unde f și g sînt funcții arbitrare. Înlocuim în vechile variabile și obținem:

  $$z(x, y) = f(y - \mu_1 x) + g(y - \mu_2 x).$$

- Pentru cazul parabolic, avem $\mu_1 = \mu_2 = \dfrac{B}{A}$, iar ecuația curbelor devine $Ady - Bdx = 0$, care are soluția $Ay - Bx = c \in \mathbb{R}$.

  Schimbarea de variabile este $\tau = Ax - By$, iar $\eta = x$, care conduce la forma canonică:

$$z_{\eta\eta} = 0.$$

  Soluția generală este $z = \eta f(\tau) + g(\tau)$, cu f, g funcții arbitrare. Putem reveni la variabilele anterioare și găsim:

$$z = xf(Ax - By) + g(x).$$

- Pentru cazul eliptic, forma canonică este chiar ecuația Laplace:

$$z_{\tau\tau} + z_{\eta\eta} = 0,$$

  care nu se poate rezolva ușor pe cazul general.

5.4 Exerciții

1. Aduceți la forma canonică următoarele ecuații:

(a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} + 6\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0;$

(b) $3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 7\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$

(c) $4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0;$

(d) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 10\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} - 3\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0;$

(e) $2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 7\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$

(f) $y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (x + y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$

(g) $(1 + x^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 + y^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0;$

(h) $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + y \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0;$

Soluție: (a) Deoarece avem $A = 1, B = 1, C = -3$, rezultă $B^2 - AC = 4 > 0$, deci ecuația este de tip hiperbolic.

Scriem ecuația caracteristică:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\frac{dy}{dx} - 3 = 0,$$

care poate fi rezolvată ca o ecuație de gradul al doilea, de unde:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 3 & \Rightarrow y - 3x = c_1 \\ \dfrac{dy}{dx} = -1 & \Rightarrow y + x = c_2 \end{cases}.$$

Cu schimbarea de variabile:

$$\begin{cases} \tau & = y - 3x \\ \eta & = y + x \end{cases},$$

funcția căutată $u(x, y)$ devine $u(\tau, \eta)$, astfel că toate derivatele parțiale se calculează acum folosind formula funcțiilor implicite și derivarea funcțiilor compuse. Obținem, succesiv:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \tau}\cdot\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\\
&= -3\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \tau}\cdot\frac{\partial \tau}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}\\
&= \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\cdot\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\cdot\frac{\partial \tau}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)\cdot\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \tau}\cdot\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\\
&= \left[\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)\cdot\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right]\cdot\frac{\partial \tau}{\partial x} +\\
&+ \left[\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right]\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} +\\
&+ \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}\cdot\left(\frac{\partial \tau}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \eta\partial \tau}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \eta}\cdot\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 +\\
&+ \frac{\partial^2 u}{\partial \tau\partial \eta}\cdot\frac{\partial \tau}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\\
&= 9\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - 6\frac{\partial^2 u}{\partial \tau\partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\\
&= -3\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \tau\partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \tau\partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.
\end{aligned}
$$

Toate derivatele parțiale în raport cu x și y se calculează, deci, ținînd cont de legătura cu noile variabile η și τ. Practic, avem:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x}$$

și similar pentru y.

Rezultă că, în final, forma canonică este:

$$-16\frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial \eta} + 8\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial \eta} - \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

2. Determinați soluția ecuației:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

care satisface condițiile:

$$\begin{cases} u(x,0) & = 3x^2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) & = \cos x \end{cases}.$$

3. Rezolvați ecuația:

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 7\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

cu condițiile:

$$\begin{cases} u(x,0) & = x^3 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) & = 2x^2 \end{cases}.$$

Exerciții suplimentare (A. Negrescu)

Să se afle soluția fiecăreia dintre următoarele ecuații diferențiale cu derivate parțiale de ordinul al doilea:

(a) $\begin{cases} u_{tt} & = 25u_{xx} \\ u(0,t) & = u(1,t) = 0 \\ u(x,0) & = x(1-x) \\ u_t(x,0) & = 0 \end{cases}, \quad 0 < x < 1, t > 0$

(b) $$\begin{cases} u_{tt} &= 16u_{xx} \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0 \\ u(x,0) &= \sin(5\pi x) + 2\sin(7\pi x) \\ u_t(x,0) &= 0 \end{cases}, \quad 0 < x < 1, t > 0$$

(c) $$\begin{cases} u_t &= 4u_{xx} \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) &= \sin x \end{cases}, \quad 0 < x < \pi, t > 0.$$

SEMINAR 6

EDP DE ORDINUL DOI: CAZUL COEFICIENȚILOR VARIABILI

Ecuațiile cu derivate parțiale de ordinul al doilea, cu coeficienți variabili, se rezolvă similar celor cu coeficienți constanți. Vom prezenta două exemple.

Exemplu 1: Să se aducă la forma canonică ecuația:

$$(1+x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(1+y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Soluție: Deoarece avem $AC-B^2=(x^2+1)(y^2+1)>0$, rezultă că ecuația este de tip eliptic.

Ecuația caracteristică este:

$$(1+x^2)dy^2+(1+y^2)dx^2=0,$$

care înseamnă:

$$\sqrt{1+x^2}dy=\pm i\sqrt{1+y^2}dx.$$

Rezultă că familiile de curbe caracteristice sînt:

$$\begin{cases}\ln(y+\sqrt{1+y^2})+i\ln(x+\sqrt{1+x^2}) & =c_1\\ \ln(y+\sqrt{1+y^2})-i\ln(x+\sqrt{1+x^2}) & =c_2\end{cases}$$

În consecință, facem schimbarea de variabile:

$$\begin{cases}\tau & =\ln(y+\sqrt{1+y^2})\\ \eta & =\ln(x+\sqrt{1+x^2})\end{cases}$$

Derivatele parțiale în funcție de noile variabile sînt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \cdot \frac{\partial u}{\partial \tau}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{1+y^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \frac{y}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\partial u}{\partial \tau}.$$

Rezultă că ecuația se reduce la forma canonică:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0.$$

Exemplu 2: Să se aducă la forma canonică și să se determine soluția generală a ecuației:

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Soluție: Deoarece $A = x^2, B = -xy, C = y^2$, avem $AC - B^2 = 0$, deci ecuația este de tip parabolic.

Din ecuația caracteristică obținem:

$$x^2 \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2xy \cdot \frac{dy}{dx} + y^2 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow xy = c.$$

Facem schimbarea de variabile:

$$\begin{cases} \tau & = xy \\ \eta & = x \end{cases}$$

și noile derivate parțiale sînt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= y\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\\ \frac{\partial u}{\partial y} &= x\frac{\partial u}{\partial \tau}\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + 2y\frac{\partial^2 u}{\partial \tau\partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \tau} + xy\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + x\frac{\partial^2 u}{\partial \tau\partial \eta}.\end{aligned}$$

Atunci ecuația devine:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

Ea se poate rescrie și rezolva astfel:

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\eta \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0 \Rightarrow \eta \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} = f(\tau) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1}{\eta}f(\tau).$$

Integrăm în raport cu η și obținem, în final:

$$u(\tau,\eta) = f(\tau)\ln\eta + g(\tau) \Rightarrow u(x,y) = f(xy)\ln x + g(xy).$$

În unele cazuri, poate fi necesară o discuție după x, y pentru tipul ecuației:
Exemplu 3: Fie ecuația:

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (x+y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Deoarece $A = y, B = \dfrac{x+y}{2}, C = x$, avem

$$\delta = AC - B^2 = \frac{-(x-y)^2}{4}$$

și studiem separat pentru:

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \delta < 0\}, \quad D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \delta = 0\},$$

care corespund, respectiv, cazurilor: *hiperbolic*, pentru $y \neq x$ și *eliptic*, pentru $y = x$.

Mai departe, ecuația se rezolvă cu metodele cunoscute, corespunzătoare celor două cazuri.

6.1 Coarda infinită. Metoda lui d'Alembert

Pornim de la ecuația coardei infinite, care constă în determinarea funcției $u(x,t)$, definită pentru $x \in \mathbb{R}$ și $t \geq 0$, soluție a ecuației coardei vibrante:

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \forall x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

Presupunem că avem condiții inițiale, astfel că problema devine o problemă Cauchy:

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \forall x \in \mathbb{R},$$

cu φ și ψ funcții date.

Cum ecuația este deja în forma canonică, asociem ecuația caracteristică:

$$a^2 dt^2 - dx^2 = 0 \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \pm\frac{1}{a}.$$

Rezultă că familiile de curbe caracteristice sînt:

$$\begin{cases} x - at & = c_1 \\ x + at & = c_2 \end{cases}.$$

Facem schimbarea de variabile corespunzătoare:

$$\begin{cases} \tau & = x - at \\ \eta & = x + at \end{cases}$$

și rezultă ecuația în forma canonică, în noile variabile:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial \eta} = 0.$$

Putem să o rezolvăm astfel:

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \tau} = f(\tau).$$

Acum putem integra în raport cu τ și găsim:

$$u(\tau,\eta) = \int f(\tau)d\tau + \theta_2(\eta) \Leftrightarrow u(\tau,\eta) = \theta_1(\tau) + \theta_2(\eta).$$

Revenind la variabilele x, t, avem:

$$u(x,t) = \theta_1(x + at) + \theta_2(x - at)$$

și, folosind condițiile inițiale, avem:

$$\begin{cases} \theta_1(x) + \theta_2(x) & = \varphi(x) \\ a\theta_1'(x) - a\theta_2'(x) & = \psi(x) \end{cases}.$$

Integrăm a doua ecuație în raport cu x și obținem:

$$\begin{cases} \theta_1(x) + \theta_2(x) & = \varphi(x) \\ a\theta_1(x) - a\theta_2(x) = \int_0^x \psi(\alpha)d\alpha + c \end{cases}$$

Adunăm egalitățile și găsim:

$$\theta_1(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(\alpha)d\alpha + \frac{c}{2a},$$

iar prin scădere, găsim:

$$\theta_2(x) = \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(\alpha)d\alpha - \frac{c}{2a}.$$

Revenind la variabilele inițiale, avem:

$$\begin{cases} \theta_1(x+at) & = \dfrac{\varphi(x+at)}{2} + \dfrac{1}{2a}\int_0^{x+at} \psi(\alpha)d\alpha + \dfrac{c}{2a} \\ \theta_2(x-at) & = \dfrac{\varphi(x-at)}{2} - \dfrac{1}{2a}\int_0^{x-at} \psi(\alpha)d\alpha - \dfrac{c}{2a} \end{cases}.$$

Putem asambla soluția finală în forma:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)\Big] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)d\alpha, \tag{6.1}$$

care se numește **formula lui d'Alembert**.

Observaţie 6.1: Soluția problemei Cauchy asociată coardei vibrante există și este unică.

6.2 Coarda finită. Metoda separării variabilelor (*)

Pentru cazul lungimii finite a unei coarde, se folosește o metodă care este atribuită lui Fourier și utilizează dezvoltări în serie. Această metodă se numește *metoda separării variabilelor*.

Pornim cu o problemă Cauchy similară, doar că lungimea coardei este conținută într-un interval finit. Căutăm, deci, funcția $u(x,t)$, definită pentru $0 \le x \le l$ și $t \ge 0$, care satisface următoarele condiții:

$$\begin{cases} a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ u(x,0) & = \varphi(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) & = \psi(x) \\ u(0,t) & = u(l,t) = 0 \text{ (condiții la limită)} \end{cases}.$$

Metoda de separare a variabilelor constă în găsirea unui șir infinit de soluții de formă particulară, iar apoi, cu ajutorul acestora, formăm o serie ai cărei coeficienți se determină în ipoteza ca suma seriei să dea soluția problemei tratate.

Soluțiile particulare se caută în forma:

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

și cerem să satisfacă condițiile la limită:

$$\begin{cases} u(0,t) & = X(0)T(t) = 0 \\ u(l,t) & = X(l)T(t) = 0 \end{cases}$$

Rezultă că vrem $X(0) = X(l) = 0$. Altfel, am avea $T(t) = 0$, ceea ce ar conduce la soluția banală $u(x,t) = 0$.

Înlocuind în ecuația inițială, avem:

$$XT'' = a^2 X'' T \Rightarrow \frac{1}{a^2}\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X}.$$

Să remarcăm că în membrul stîng, funcția depinde doar de variabila t, iar în membrul drept, doar de variabila x. Așadar, egalitatea nu poate avea loc decît dacă ambele funcții sînt egale cu o constantă. Pentru conveniență, o vom nota cu $-\lambda$. Obținem ecuațiile:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X & = 0 \\ T'' + a^2 \lambda T & = 0 \end{cases}$$

Prima dintre aceste ecuații este liniară, de ordinul al doilea, cu coeficienți constanți. Soluția se obține:

- Dacă $\lambda < 0$, atunci
$$X(x) = c_1 e^{-\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x},$$

iar ținînd seama de condițiile la limită, avem:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 & = 0 \\ c_1 e^{\sqrt{-\lambda} l} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda} l} & = 0 \end{cases},$$

care se scrie echivalent:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 & = 0 \\ c_1 e^{2\sqrt{-\lambda} l} + c_2 & = 0 \end{cases}$$

Determinantul matricei sistemului este nenul, deci el admite doar soluția banală.

- Dacă $\lambda = 0$, atunci $X(x) = c_1 x + c_2$ și, ținînd seama de condițiile la limită, obținem din nou soluția banală.

- Dacă $\lambda > 0$, soluția generală se scrie:

$$X(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda} x + c_2 \sin \sqrt{\lambda} x.$$

  Din condițiile la limită, găsim:

$$\begin{cases} X(0) & = c_1 = 0 \\ X(l) & = c_2 \sin \sqrt{\lambda} l = 0. \end{cases}$$

  Din a doua ecuație, deducem că $c_2 = 0$, care conduce la soluția banală, sau $\sin \sqrt{\lambda} l = 0$, care înseamnă $\lambda = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$. Putem scrie, atunci, soluția corespunzătoare acestei serii de valori în forma:

$$X_n = c_n \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad c_n \in \mathbb{R}.$$

Înlocuim și integrăm acum ecuația după t:

$$T'' + a^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T = 0,$$

care are soluția generală:

$$T_n(t) = \alpha_n \cos \frac{n\pi}{l} at + \beta_n \sin \frac{n\pi}{l} at.$$

Punînd laolaltă soluția după x și pe cea după t, obținem:

$$u_n(x,t) = X_n(x) T_n(t) = \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} at + b_n \sin \frac{n\pi}{l} at\right) \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x, \tag{6.2}$$

unde a_n, b_n, c_n sînt constante ce provin din α_n, β_n, c_n.

Pentru a doua etapă a soluției, considerăm seria $\sum u_n(x,t)$, adică:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}at + b_n \sin\frac{n\pi}{l}at\right)\cdot \sin\frac{n\pi}{l}x.$$

Presupunem că există $u(x,t)$ suma seriei de mai sus, care este și soluția problemei Cauchy, deci satisface și condițiile la limită, adică:

$$\begin{cases} u(x,0) & = \sum_{n\geq 1} a_n \sin\frac{n\pi}{l}x = \varphi(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) & = \frac{n\pi}{l}ab_n \sin\frac{n\pi}{l}x = \psi(x) \end{cases}.$$

Putem privi aceste egalități ca dezvoltarea funcțiilor φ și ψ în serie Fourier de sinusuri. Rezultă că putem afla coeficienții:

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx \tag{6.3}$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx. \tag{6.4}$$

Observaţie 6.2: Calculele de mai sus, împreună cu rezultate din teoria seriilor Fourier, ne asigură că funcția $u(x,t)$ găsită este soluția problemei Cauchy.

6.3 Exerciții

1. Determinați soluția ecuației:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

care satisface condițiile:

$$\begin{cases} u(x,0) & = 3x^2 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) & = \cos x \end{cases}.$$

Soluție: Cum $AC-B^2 = -4 < 0$, ecuația este de tip hiperbolic. Din ecuația caracteristică, obținem schimbarea de variabile:

$$\begin{cases} \tau & = -3x + y \\ \eta & = x + y \end{cases},$$

iar forma canonică este $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\tau\partial\eta} = 0$, care are soluția:

$$u(\tau,\eta) = f(\tau) + g(\eta),$$

cu f, g funcții de clasă $\mathcal{C}^2$, arbitrare. Revenind la variabilele inițiale, avem:

$$u(x,y) = f(-3x+y) + g(x+y).$$

Ținînd seama de condițiile inițiale din problema Cauchy, obținem sistemul:

$$\begin{cases} f(-3x) + g(x) & = 3x^2 \\ f'(-3x) + g'(x) & = \cos x \end{cases}$$

Integrăm a doua ecuație și avem:

$$\begin{cases} f(-3x) + g(x) & = 3x^2 \\ -\dfrac{1}{3} f(-3x) + g(x) & = \sin x + c \end{cases}$$

și prin schimbarea semnului primei ecuații și adunîndu-le, obținem:

$$\begin{cases} f(-3x) & = \dfrac{9}{4}x^2 - \dfrac{3}{4}\sin x - \dfrac{3c}{4} \\ g(x) & = \dfrac{3}{4}x^2 + \dfrac{3}{4}\sin x + \dfrac{3c}{4} \end{cases}.$$

Dacă notăm $-3x = t$, atunci $x = -\dfrac{t}{3}$ și găsim:

$$f(t) = \frac{t^2}{4} + \frac{3}{4}\sin\frac{t}{3} - \frac{3c}{4}.$$

Așadar, soluția finală este:

$$\begin{cases} f(-3x+y) & = \dfrac{1}{4}(-3x+y)^2 + \dfrac{3}{4}\sin\dfrac{-3x+y}{3} - \dfrac{3c}{4} \\ g(x+y) & = \dfrac{3}{4}(x+y)^2 + \dfrac{3}{4}\sin(x+y) + \dfrac{3c}{4} \end{cases}.$$

Rezultă că soluția problemei Cauchy este:

$$u(x,y) = \frac{1}{4}(-3x+y)^2 + \frac{3}{4}\sin\frac{-3x+y}{3} + \frac{3}{4}(x+y)^2 + \frac{3}{4}\sin(x+y).$$

2. Rezolvați ecuația:

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 7\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

cu condițiile:

$$\begin{cases} u(x,0) & = x^3 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) & = 2x^2 \end{cases}.$$

Soluție: Ecuația este de tip hiperbolic, iar schimbarea de variabilă este:

$$\begin{cases} \tau & = 2x - y \\ \eta & = x - 3y \end{cases},$$

care conduce la forma canonică $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial \eta} = 0$, de unde rezultă soluția generală:

$$u(x,y) = \varphi(2x-y) + \psi(x-3y).$$

Din condițiile problemei Cauchy, obținem:

$$\begin{cases} \varphi(2x) + \psi(x) & = x^3 \\ -\varphi'(2x) - 3\psi'(x) & = 2x^2 \end{cases}.$$

Integrăm a doua relație și obținem:

$$-\frac{1}{2}\varphi(2x) - 3\psi(x) = \frac{2}{3}x^3 + k.$$

Atunci:

$$\begin{cases} \varphi(2x) & = \dfrac{19}{96}(2x)^3 + c_1 \\ \psi(x) & = -\dfrac{7}{12}x^3 - c_1 \end{cases},$$

de unde rezultă că soluția problemei Cauchy este:

$$u(x,y) = \frac{19}{96}(2x-y)^3 - \frac{7}{12}(x-3y)^3.$$

3. Rezolvați ecuația coardei vibrante infinite:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

cu condițiile inițiale:

$$\begin{cases} u(x,0) & = \dfrac{x}{1+x^2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) & = \sin x \end{cases}.$$

Soluție: Putem aplica direct formula lui d'Alembert (6.1):

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\left[\frac{x-t}{1+(x-t)^2} + \frac{x+t}{1+(x+t)^2}\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \sin y dy \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{x-t}{1+(x-t)^2} + \frac{x+t}{1+(x+t)^2}\right] - \frac{1}{2}[\cos(x+t) - \cos(x-t)] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{x-t}{1+(x-t)^2} + \frac{x+t}{1+(x+t)^2}\right] - \frac{1}{2}\left[-2\sin\frac{x+t+x-t}{2}\sin\frac{x+t-x+t}{2}\right] \\ &= \left[\frac{x-t}{1+(x-t)^2} + \frac{x+t}{1+(x+t)^2}\right] + \sin x \sin t. \end{aligned}$$

4(*). Determinați vibrațiile unei coarde de lungime l, avînd capetele fixate, dacă forma inițială a coardei este dată de funcția:

$$\varphi(x) = 4\left(x - \frac{x^2}{l}\right),$$

iar viteza inițială este 0.

Soluție: Aplicînd direct formula pentru coeficienții Fourier (6.3), avem $b_n = 0$, iar

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l 4\left(x - \frac{x^2}{l}\right)\sin\frac{n\pi}{l}x dx = \frac{8}{l}\int_0^l x\sin\frac{n\pi}{l}x dx - \frac{8}{l^2}\int_0^l x^2\sin\frac{n\pi}{l}x dx.$$

Calculăm:

$$\begin{aligned}
\int_0^l x\sin\frac{n\pi}{l}x dx &= -\frac{l}{n\pi}x\cos\frac{n\pi}{l}x\Big|_0^l + \frac{l}{n\pi}\int_0^l \cos\frac{n\pi}{l}x dx \\
&= -\frac{l^2}{n\pi}(-1)^n + \frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{l}x\Big|_0^l \\
&= (-1)^{n+1}\frac{l^2}{n\pi}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^l x^2\sin\frac{n\pi}{l}x dx &= -\frac{l}{n\pi}x^2\cos\frac{n\pi}{l}x\Big|_0^l + \frac{2l}{n\pi}\int_0^l x\cos\frac{n\pi}{l}x dx \\
&= (-1)^{n+1}\frac{l^3}{n\pi} + \frac{2l}{n\pi}\left[\frac{l}{n\pi}x\sin\frac{n\pi}{l}x\Big|_0^l - \frac{l}{n\pi}\int_0^l \sin\frac{n\pi}{l}x dx\right] \\
&= (-1)^{n+1}\frac{l^3}{n\pi} + \frac{2l}{n^3\pi^3}\cos\frac{n\pi}{l}x\Big|_0^l \\
&= (-1)^{n+1}\frac{l^3}{n\pi} + \frac{2l}{n^3\pi^3}[(-1)^n + 1].
\end{aligned}$$

Așadar:

$$a_n = (-1)^{n+1}\frac{8l}{n\pi} - (-1)^{n+1}\frac{8l}{n\pi} - \frac{16}{n^3\pi^3}[(-1)^n - 1],$$

de unde obținem $a_{2n} = 0, a_{2n+1} = \dfrac{32l}{(2n+1)^3\pi^3}$.

Punem laolaltă coeficienții și obținem soluția:

$$u(x,t) = \frac{32l}{\pi^3}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^3}\cos\frac{(2n+1)\pi}{l}t\cdot\sin\frac{(2n+1)\pi}{l}x.$$

5(*). Rezolvați problema Cauchy asupra coardei vibrante finite:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, t > 0,$$

cu condițiile inițiale și la limită:

$$\begin{cases}
u(x,0) & = \sin 3x - 4\sin 10x \\
\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) & = 2\sin 4x + \sin 6x, 0 \leq x \leq \pi\ \cdot \\
u(0,t) & = u(\pi,t) = 0, t \geq 0
\end{cases}$$

Soluție: Determinăm coeficienții din seria Fourier:

$$u(x,0) = \sin 3x - 4\sin 10x \Rightarrow \sum a_n \sin nx = \sin 3x - 4\sin 10x.$$

Egalînd coeficienții, obținem $a_3 = 1, a_{10} = -4, a_n = 0$ în rest.

Mai departe:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 2\sin 4x + \sin 6x \Rightarrow \sum 2nb_n \sin nx = 2\sin 4x + \sin 6x.$$

Egalînd coeficienții, avem: $b_4 = \frac{1}{4}, b_6 = \frac{1}{12}, b_n = 0$ în rest.

Rezultă:

$$u(x,t) = \cos 6t \sin 3x - 4\cos 20t \sin 10x + \frac{1}{4}\sin 8t \sin 4x + \frac{1}{12}\sin 12t \sin 6x.$$

6(*). Aceeași cerință pentru:

(a)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 \le x \le \pi, t \ge 0,$$

cu condițiile inițiale și la limită:

$$\begin{cases} u(x,0) & = \sin x \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) & = \sin x \\ u(0,t) & = u(\pi,t) = 0 \end{cases}.$$

(b)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \le x \le 1, t \ge 0$$

cu condițiile inițiale și la limită:

$$\begin{cases} u(x,0) & = x(1-x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) & = 0 \\ u(0,t) & = u(1,t) = 0 \end{cases}.$$

(c)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, 0 \le x \le \pi, t \ge 0$$

cu condițiile inițiale și la limită:

$$\begin{cases} u(x,0) & = \sin 3x - 4\sin 10x \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) & = 2\sin 4x + \sin 6x \\ u(0,t) & = u(\pi,t) = 0 \end{cases}.$$

7. Să se determine soluția problemei Cauchy:

$$u_{xx} - \frac{1}{4}u_{tt} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \ge 0,$$

cu condițiile inițiale:

$$u(x,0) = e^x, \quad u_t(x,0) = 4x.$$

Indicație: Metoda 1: Putem folosi direct formula lui D'Alembert. Avem $a = 2, f(x) = e^x, g(x) = 4x$, deci soluția se obține direct:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(e^{x-2t} + e^{x+2t}\right) + \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} 4\alpha\, d\alpha.$$

Metoda 2: Alternativ, putem folosi rezolvarea directă. Scriem ecuația atașată pentru $t = t(x)$, care ne conduce la substituțiile:

$$\tau = x - 2t, \quad \eta = x + 2t.$$

Forma canonică este $u_{\tau\eta} = 0$, a cărei soluție generală este:

$$u(\tau,\eta) = f(\tau) + g(\eta).$$

Folosim acum condițiile inițiale și determinăm f și g, ca funcții de x și t.

8. Rezolvați problema Cauchy:

$$u_{xx} - \frac{1}{a^2}u_{tt} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \ge 0,$$

cu condițiile inițiale:

$$u(x,0) = \cos x, \quad u_t(x,0) = 1.$$

SEMINAR 7

RECAPITULARE PARȚIAL

1. Rezolvați ecuațiile diferențiale de ordin superior:

(a) $(1-y)y'' + 2y'^2 = 0$;

(b) $yy'' - y'^2 = 0$;

(c) $(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 0$, știind că are soluție particulară un polinom de gradul întîi;

(d) $y'' + y = x\cos x$;

(e) $(x-2)^2y'' - 3(x-2)y' + 4y = x, \quad x > 2$;

Indicații:

(a) Ecuația se poate rescrie ca:

$$\frac{y''}{y'} = \frac{2y'}{y-1},$$

pe care o putem integra direct și obținem:

$$\ln|y'| = 2\ln|y-1| + \ln c.$$

Apoi separăm y' și mai integrăm o dată pentru a obține pe y.

(b) Ecuația se poate rescrie:

$$\frac{y''}{y'} = \frac{y'}{y}.$$

Putem integra direct și obținem:

$$\ln|y'| = \ln|y| + \ln c,$$

de unde calculăm y.

(c) Putem deriva direct ecuația inițială și rezultă imediat $y''' = 0$, de unde y este un polinom de gradul al doilea în raport cu x.

Înlocuind în ecuația dată, găsim legături între coeficienții polinomului.

Cît despre soluția particulară ca polinom de gradul întîi, fie $y_p(x) = ax + b$. Înlocuind în ecuație, obținem că $a \neq 0$ și $b = 0$.

(d) Ecuație de ordin superior, cu ecuația algebrică asociată $r^2 + 1 = 0$ etc.

(e) Ecuație Euler, cu schimbarea de variabilă $a = x - 2$, apoi $a = e^t$ etc.

2. Rezolvați sistemele de ecuații diferențiale:

(a) $\begin{cases} y' & = -2z + 1 \\ x^2 z' & = -2y + x^2 \ln x \end{cases}$, cu $y = y(x), z = z(x)$.

(b) $\begin{cases} x' & = x + 3y \\ y' = -x + 5y - 2e^t \end{cases}$, cu condițiile inițiale $x(0) = 3, y(0) = 1$.

Indicații:

(a) Derivăm prima ecuație din nou și obținem $z' = -y''$. Înlocuim în a doua ecuație și rezultă o ecuație Euler pentru y, pe care o rezolvăm și revenim și calculăm $z(x)$.

(b) Se aplică metoda substituției și se ajunge la o ecuație de ordin superior, neomogenă.

3. Fie cîmpul vectorial:

$$\vec{V} = (x + y)\vec{i} + (y - x)\vec{j} - 2z\vec{k}.$$

Să se determine:

(a) liniile de cîmp;

(b) linia de cîmp ce conține punctul $M(1, 0, 1)$;

(c) suprafețele de cîmp;

(d) suprafața de cîmp care conține dreapta $z = 1, y - x\sqrt{3} = 0$.

Indicații:

(a) Sistemul caracteristic asociat este:

$$\frac{dx}{x+y} = \frac{dy}{y-x} = \frac{dz}{-2z}.$$

Din primele două, rezultă:

$$\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2} = \frac{dz}{-2z} \Rightarrow z(x^2+y^2) = c_1.$$

Tot din primele rapoarte obținem:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{x+y}.$$

Dacă notăm $y' = \dfrac{dy}{dx}$, putem rezolva fie ca pe o ecuație liniară de ordinul întîi, anume:

$$y'(x+y) - y = x$$

sau putem face substituția $y = tx$. Rezultă:

$$x\frac{dt}{dx} + t = \frac{t-1}{t+1} \Leftrightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{t+1}{t^2+1}dt \Rightarrow \ln(x^2+y^2) + 2\arctan\frac{y}{x} = c_2.$$

Deci liniile de cîmp sînt date de:

$$\begin{cases} (x^2+y^2)z & = c_1 \\ \ln(x^2+y^2) + 2\arctan\dfrac{y}{x} & = c_2 \end{cases}.$$

(b) Folosind condiția ca punctul $M(1,0,1)$ să se găsească pe linia de cîmp, găsim condiția de compatibilitate a sistemului de mai sus $c_1 = c_2 = 0$.

(c) Ecuația suprafeței de cîmp este dată de:

$$\Phi\left((x^2+y^2)z, \ln(x^2+y^2) + 2\arctan\frac{y}{x}\right) = 0.$$

(d) Pentru condiția ca suprafața de cîmp să conțină dreapta $z = 1, y - \sqrt{3}x = 0$, avem sistemul:

$$\begin{cases} (x^2+y^2)z & = c_1 \\ \ln(x^2+y^2) + 2\arctan\dfrac{y}{x} & = c_2 \\ z & = 1 \\ y - x\sqrt{3} & = 0 \end{cases}.$$

Înlocuim pe x, y, z în funcție de constante în ecuația a doua și rezultă:

$$\ln c_1 + 2 \arctan \sqrt{3} = c_2.$$

Pentru a afla suprafața, din prima ecuație avem:

$$\ln(x^2 + y^2) + \ln z = \ln c_1.$$

Atunci a doua ecuație devine:

$$\ln(x^2 + y^2) + 2 \arctan \frac{y}{x} = c_2 = \ln c_1 + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow -\ln z = 2\left(\arctan \frac{y}{x} - \frac{2\pi}{3}\right),$$

de unde se obține $z(x, y)$, ecuația suprafeței căutate.

4. Rezolvați ecuația cu derivate parțiale de ordinul întîi, cvasiliniară:

$$(1 + \sqrt{z - x - y}) z_x + z_y = 2.$$

Indicație: Se caută o soluție implicită sub forma $u = u(x, y, z) = 0$, se calculează noile derivate parțiale și se ajunge la sistemul caracteristic de forma:

$$\frac{dx}{1 + \sqrt{z - x - y}} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{2}.$$

Ultimele două rapoarte dau $z - 2y = c_1$ și, prin scădere, obținem:

$$dy = \frac{dz - dx - dy}{-\sqrt{z - x - y}},$$

care poate fi integrată pentru a obține $y + 2\sqrt{z - x - y} = c_2$.

Rezultă soluția generală sub forma implicită:

$$\Phi(z - 2y, y + 2\sqrt{z - x - y}) = 0.$$

5. Aduceți la forma canonică ecuațiile liniare cu coeficienți constanți:

(a) $4u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} - 2u_y = 0$;

(b) $u_{xx} - 6u_{xy} + 10u_{yy} + u_x - 3u_y = 0$;

(c) $2u_{xx} - 7u_{xy} + 3u_{yy} = 0$.

Indicații:

(a) Ecuația este parabolică. Noile derivate parțiale sînt:

$$
\begin{aligned}
u_y &= -2u_\tau \\
u_{xx} &= u_{\tau\tau} + 2u_{\tau\eta} + 2_{\eta\eta} \\
u_{yy} &= 4u_{\tau\tau} \\
u_{xy} &= -2u_{\tau\tau} - 2u_{\tau\eta}.
\end{aligned}
$$

Forma canonică rezultă $u_{\eta\eta} + u_\tau = 0$.

(b) Ecuația este de tip eliptic. Noile derivate parțiale sînt:

$$
\begin{aligned}
u_x &= 3u_\tau + u_\eta \\
u_y &= u_\tau \\
u_{xx} &= 9u_{\tau\tau} + 6u_{\tau\eta} + u_{\eta\eta} \\
u_{xy} &= 3u_{\tau\tau} + u_{\tau\eta} \\
u_{yy} &= u_{tau\tau}.
\end{aligned}
$$

Forma canonică rezultă: $u_{\tau\tau} + u_{\eta\eta} + u_\eta = 0$.

(c) Ecuația este de tip hiperbolic. Noile derivate parțiale sînt:

$$
\begin{aligned}
u_{xx} &= 9u_{\tau\tau} + 6u_{\tau\eta} + u_{\eta\eta} \\
u_{xy} &= 3u_{\tau\tau} + 7u_{\tau\eta} + 2u_{\eta\eta} \\
u_{yy} &= u_{\tau\tau} + 4u_{\tau\eta} + 4u_{\eta\eta}.
\end{aligned}
$$

Forma canonică rezultă a fi $u_{\tau\eta} = 0$.

6. Rezolvați ecuația:

$$u_{tt} - 9u_{xx} = 0,$$

cu condițiile inițiale $u(x,0) = x^2, u_t(x,0) = 3x^2$.

Indicație: Avem $a = 3$ și putem aplica metoda lui D'Alembert pentru coarda vibrantă infinită.

7. Rezolvați următoarele ecuații cu derivate parțiale de ordinul al doilea:

(a) $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0$, cu condițiile $u(x,0) = 0, u_y(x,0) = x + \cos x$

(b) $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = 0$, cu condițiile $u(1,y) = y^2, u_x(1,y) = y^2 + y$;

(c) $u_{tt} = 4u_{xx}$, cu condițiile $u(x,0) = 2x, u_t(x,0) = e^x \cos x$;

(d) $u_{tt} = u_{xx}$, cu condițiile $u(x,0) = x^2, u_t(x,0) = 0$.

Indicații:

(a) Ecuație hiperbolică. Cum $D = 0$, se poate scrie direct forma canonică, dar mai determinăm și substituțiile care trebuie făcute (τ și η).

(b) Ecuație parabolică, cu $D = 0$.

(c) Formula lui D'Alembert sau calcul direct.

(d) Formula lui D'Alembert sau calcul direct.

SEMINAR 8

FUNCȚII COMPLEXE

Începem acum studiul analizei complexe, cu cîteva noțiuni elementare despre funcții definite pe mulțimea numerelor complexe.

O funcție complexă este o funcție de forma $f : A \to \mathbb{C}$, cu $A \subseteq \mathbb{C}$. Așa cum putem separa părțile unui număr complex, în partea reală și partea imaginară, putem separa și părțile unei funcții complexe.

În general, fie $z = a + bi$ un număr complex. Atunci, dacă f este o funcție complexă, calculînd $f(z)$ obținem o parte reală și o parte imaginară, deci putem scrie $f = P + iQ$, cu $P = \mathrm{Re} f$ și $Q = \mathrm{Im} f$. Astfel, punem în evidență două funcții *reale* $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, iar egalitatea $w = f(z)$ devine echivalentă cu două egalități de forma $\mathrm{Re} w = P$ și $\mathrm{Im} w = Q$.

Similar cu cazul real, se definesc noțiunile de *limită, continuitate și derivabilitate*. O funcție complexă derivabilă pe tot domeniul de definiție se mai numește *olomorfă*. Avem, de asemenea, și noțiunea de olomorfie punctuală, care este echivalentă cu derivabilitatea punctuală.

Următorul rezultat este esențial:

Teoremă 8.1: *Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ o mulțime deschisă.*

Funcția $f : A \to \mathbb{C}, f = P + iQ$ este olomorfă în $z_0 \in A$ dacă și numai dacă funcțiile $P, Q\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sînt diferențiabile în $z_0 = (x_0, y_0)$, iar derivatele lor parțiale în acest punct verifică ***condițiile Cauchy-Riemann****, adică:*

$$P_x = Q_y, \quad Q_x = -P_y.$$

Acest rezultat ne va fi util pentru a demonstra olomorfia unei funcții sau, invers, a găsi funcția știind că ea este olomorfă. De asemenea, mai avem nevoie și de:

Corola 8.1: *Dacă funcția complexă $f = P + iQ$ este olomorfă, atunci P și Q sînt armonice, adică $P_{xx} + P_{yy} = Q_{xx} + Q_{yy} = 0$.*

Atenție, însă, la formularea corolarului. Rezultatul reciproc nu este, în general, adevărat. O variantă pe care o putem folosi, însă, este negația acestui rezultat:

Corola 8.2: *Dacă funcțiile P și Q nu sînt armonice, atunci funcția $f = P + iQ$ nu poate fi olomorfă.*

8.1 Funcții particulare

În continuare, studiem cîteva funcții particulare pe care le cunoaștem din cazul real, să vedem cum se modifică dacă domeniul de definiție devine o mulțime complexă.

Definiţie 8.1: Se numește *exponențiala complexă* funcția:

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \exp z = e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}.$$

Se pot demonstra imediat proprietățile:

- $\exp(0) = 1$;
- $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2), \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
- $\exp(iy) = \cos y + i \sin y, \forall y \in \mathbb{R}$ (Euler);
- Funcția exponențială este olomorfă și periodică, de perioadă $T = 2\pi$.

Pentru funcția logaritmică, pornim de la ecuația $\exp w = z$, cu $w = u + iv \in \mathbb{C}$. Putem scrie $z = re^{i\theta}$, în forma polară și, folosind periodicitatea exponențialei, ecuația de mai sus se rezolvă cu soluția:

$$u = \ln |z|, \quad v = \mathrm{Arg} z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Obținem:

Definiţie 8.2: Se numește *logaritmul complex* al numărului $z \in \mathbb{C}^*$ mulțimea:

$$\mathrm{Ln} z = \{\ln |z| + i(\mathrm{Arg} z + 2k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Această funcție este *multiformă*, adică are o infinitate de valori pentru orice argument, iar pentru $k = 0$, se obține *valoarea principală* a logaritmului, care este cea pe care o vom folosi, anume:

$$\ln z = \ln |z| + i \mathrm{Arg} z.$$

Funcția putere și funcția radical se pot defini acum:

Definiţie 8.3: Funcția putere de exponent complex:

$$z^m = \exp(m\text{Ln}z) = \Big\{\exp(m(\ln|z| + i(\text{Arg}z + 2k\pi))) \mid k \in \mathbb{Z}\Big\}, m \in \mathbb{C}.$$

Funcția radical, de argument complex:

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} &= \exp\left(\frac{1}{n}\text{Ln}z\right) \\
&= \left\{\exp\left(\frac{1}{n}(\ln|z| + i(\text{Arg}z + 2k\pi))\right) \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \\
&= \left\{\exp\left(\frac{1}{n}\ln|z|\right)\cdot\exp\left(i\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \\
&= \left\{\sqrt[n]{r}\cdot\exp\left(i\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \mid k \in \mathbb{N}\right\}
\end{aligned}$$

Din definiția funcției exponențiale, putem obține și funcțiile trigonometrice complexe:

Definiţie 8.4: Pentru orice $z \in \mathbb{C}$, definim:

$$\begin{aligned}
\cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\
\sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\
\tan z &= -i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} \\
\cot z &= i\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}
\end{aligned}$$

Observaţie 8.1: Funcțiile trigonometrice complexe sînt *uniforme* (adică nu sînt multiforme), iar toate formulele din cazul real rămîn adevărate.

Avem, de asemenea, și funcții trigonometrice hiperbolice:

Definiţie 8.5:

$$\begin{aligned}
\sinh z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} \\
\cosh z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} \\
\tanh z &= \frac{\sinh z}{\cosh z}.
\end{aligned}$$

Remarcăm că au loc legăturile:

$$\sinh z = -i\sin(iz), \quad \cosh z = \cos(iz).$$

Rezolvarea unor ecuații trigonometrice ne conduce la introducerea funcțiilor trigonometrice inverse:

$$z = \sin w \Rightarrow z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \Leftrightarrow e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0,$$

pe care o rezolvăm ca pe o ecuația de gradul al doilea și obținem:

$$w = \text{Arcsin}z = -i\text{Ln}(iz \pm \sqrt{1 - z^2}).$$

Similar, obținem și:

$$\begin{aligned}\text{Arccos}z &= i\text{Ln}(z \pm \sqrt{z^2 - 1})\\ \text{Arctan}z &= -\frac{i}{2}\text{Ln}\frac{i - z}{i + z}.\end{aligned}$$

8.2 Exerciții

1. Să se determine funcția olomorfă $f = P + iQ$ pe $\mathbb{C}$, dacă $Q(x,y) = \varphi(x^2 - y^2), \varphi \in \mathcal{C}^2$.
   Soluție: Fie $\alpha = x^2 - y^2$. Atunci:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x\varphi'(\alpha)\\ &\frac{\partial Q}{\partial y} = -2y\varphi'(\alpha)\\ \Rightarrow &\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = 2\varphi'(\alpha) + 4x^2\varphi''(\alpha)\\ &\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = -2\varphi'(\alpha) + 4y^2\varphi''(\alpha).\end{aligned}$$

Deoarece Q trebuie să fie armonică, avem $\Delta Q = 0, \forall x, y$, de unde:

$$\varphi''(\alpha) = 0 \Rightarrow \varphi(\alpha) = c\alpha + c_1.$$

Din condițiile Cauchy-Riemann pentru P și Q, obținem acum:

$$\begin{cases} P_x &= Q_y = -2cy\\ P_y &= -Q_x = -2cx.\end{cases}$$

Integrăm a doua ecuație și înlocuim în prima, pentru a obține:

$$P(x,y) = -2cxy + k.$$

În fine:

$$f(z) = -2cxy + k + i(c(x^2 - y^2) + c_1) \Rightarrow f(z) = ciz^2 + d, c, d \in \mathbb{R}.$$

2. Fie $P(x,y) = e^{2x}\cos 2y + y^2 - x^2$. Să se determine funcția olomorfă $f = P + iQ$ pe $\mathbb{C}$ astfel încît $f(0) = 1$.

Soluție: Verificăm că P este armonică. Verificăm condițiile Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial Q}{\partial y} = 2e^{2x}\cos 2y - 2x \\ -\frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial Q}{\partial x} = 2e^{2x}\sin 2y - 2y. \end{aligned}$$

Integrăm a doua ecuație în raport cu x, înlocuim în prima și obținem:

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{2x}\cos 2y + y^2 - x^2 + i(e^{2x}\sin 2y - 2xy + k) \\ &= e^{2x}(\cos 2y + i\sin 2y) - (x+iy)^2 + ki \\ \Rightarrow f(z) &= e^{2z} - z^2 + ki. \end{aligned}$$

Folosind condiția din enunț, găsim $k = 0$.

3. Determinați soluțiile $w \in \mathbb{C}$ ale ecuației $e^w = -2i$.

4. Rezolvați ecuația $z^3 + 2 - 2i = 0$.

5. Calculați:

(a) $\sin(1+i)$;

(b) $\sinh(1-i)$;

(c) $\tan\left(\frac{\pi}{4} - i\ln 3\right)$;

(d) $\tanh\left(\ln 2 + \frac{\pi i}{4}\right)$;

(e) $\mathrm{Arccos}(i\sqrt{3})$.

6. Rezolvați ecuația $\sin z = 2, z \in \mathbb{C}$.

Observație: Ecuația nu are soluții pentru numere reale, desigur, dar pentru numere complexe, funcția sinus nu mai are imaginea $[-1,1]$. O discuție ceva mai tehnică, privitoare și la implicațiile geometrice ale unui sinus supraunitar se poate găsi aici.

7. Să se determine funcția olomorfă $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ dacă:

(a) $u(x,y) = x^2 - y^2 - 2y$;

(b) $u(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$;

(c) $u(x,y) = (x\cos y - y\sin y)e^x$.

SEMINAR 9

INTEGRALE COMPLEXE

9.1 Teorema lui Cauchy

În multe situații, putem calcula integralele complexe direct, într-o manieră asemănătoare cu integralele curbilinii. Un exemplu simplu:

$$I_1 = \int_{|z|=1} z|dz|.$$

Folosind forma polară, $z = e^{it}$, deoarece integrala se face pe $|z| = 1$, iar $t \in [0, 2\pi]$. Rezultă $dz = ie^{it}dt$, deci $|dz| = dt$. Atunci:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} e^{it}dt = \frac{1}{i}e^{it}\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Un alt exemplu:

$$I_2 = \int_S z|dz|,$$

unde S este segmentul care unește pe 0 și i. Putem parametriza acest segment: $S : z = ti, t \in [0, 1]$, deci $dz = idt$ și din nou $|dz| = dt$. Rezultă:

$$I_2 = \int_0^1 tidt = \frac{1}{2}.$$

Dar în unele situații, putem calcula chiar mai ușor:

Teoremă 9.1 (Cauchy): *Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu simplu conex și $f : D \to \mathbb{C}$ o funcție olomorfă pe D, cu $P = \mathrm{Re} f$ și $Q = \mathrm{Im} f$, funcții de clasă $\mathcal{C}^1(D)$.*

Fie $\gamma : [a,b] \to D$ o curbă închisă și jordaniană (fără autointersecții) de clasă $\mathcal{C}^1$ pe porțiuni, astfel încît $\mathrm{Int}\gamma$ *să verifice condițiile formulei Green-Riemann.*

Atunci $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 0.$

Acesta este un caz simplu în care calculul se termină imediat cu rezultat nul.

În exerciții, vom folosi adesea următoarea:

Teoremă 9.2 (Formula integrală Cauchy)**:** *Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu și $f : D \to \mathbb{C}$ o funcție olomorfă pe D. Fie $\overline{\Delta} \subseteq D$, unde Δ este un domeniu simplu conex, mărginit, cu frontiera γ, care este o curbă închisă, jordaniană, de clasă $\mathcal{C}^1$ pe porțiuni, orientată pozitiv.*

Atunci pentru orice $a \in \Delta$ fixat are loc:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}dz.$$

Principala aplicație a acestei teoreme este să ne ajute să calculăm integrale pe domenii în interiorul cărora funcția pe care o integrăm are probleme. Un exemplu:

$$\int_{|z-2i|=1} \frac{1}{z^2+4}dz.$$

Observăm că $z = 2i$ este un punct cu probleme pentru funcția considerată și aplicăm formula integrală Cauchy.

Putem rescrie integrala astfel, izolînd punctul cu probleme:

$$\int_{|z-2i|=1} \frac{1}{z^2+4}dz = \int_{|z-2i|=1} \frac{\frac{1}{z+2i}}{z-2i}dz = \frac{f(z)}{z-2i}dz,$$

unde am introdus exact funcția cu probleme, adică $f(z) = \dfrac{1}{z+2i}$.

Aplicăm formula integrală Cauchy și obținem:

$$f(2i) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-2i|=1} \frac{f(z)}{z-2i}dz \Rightarrow \int_{|z-2i|=1} \frac{f(z)}{z-2i}dz = 2\pi i f(2i) = \frac{\pi}{2}.$$

Vor exista situații cînd punctul izolat nu poate fi eliminat atît de ușor (sau chiar deloc), cazuri în care vom aplica un rezultat fundamental, *teorema reziduurilor*.

9.2 Exerciții

1. Calculați integrala $\displaystyle\int_\Gamma z^2dz$, unde:

(a) $\Gamma = [-1, i] \cup [i, 1]$;

(b) $\Gamma = \{z(t) = 2 + it^2 \mid 0 \le t \le 1\}$;

(c) $\Gamma = \{z(t) = t + i\cos\dfrac{\pi t}{2} \mid -1 \le t \le 1\}$;

(d) $\Gamma = OA$, cu $O(0,0)$ și $A(2,1)$.

Indicații: Se parametrizează drumurile și se calculează ca în exemplele de mai sus.

2. Folosind teorema Cauchy sau formula integrală Cauchy, calculați:

(a) $\displaystyle\int_{|z-1|=3} z^4 dz$;

(b) $\displaystyle\int_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2 - 6z + 5}$;

(c) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z(z-2)} dz$;

(d) $\displaystyle\int_{\Gamma} \frac{\exp(z^2)}{z^2 - 6z} dz$, unde $\Gamma : |z-2| = r, r \in \{1, 3, 5\}$;

(e) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\exp(3z)}{z^4} dz$;

(f) $\displaystyle\int_{|z-i|=1} \frac{1}{(z^2+1)^2} dz$;

(g) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2(z-2)} dz$.

Indicații: Ideea de bază este să identificăm punctele cu probleme ale funcțiilor de integrat în interiorul domeniilor pe care integrăm, apoi să descompunem integrandul cu o funcție căreia i se poate aplica teorema Cauchy.

(a) funcția z^4 este olomorfă, deci integrala este nulă;

(b) avem $\dfrac{\cos z}{(z-1)(z-5)}$, dar singurul punct cu probleme din interiorul domeniului este $z_1 = 1$. Definim $f(z) = \dfrac{\cos z}{z-5}$, iar integrala devine $\displaystyle\int_{|z|=4} \frac{f(z)}{z-1} dz$, care se calculează cu formula Cauchy.

(c) pentru $r = 1$, funcția este olomorfă, deci integrala este nulă. Pentru $r = 3$, $z = 0$ este punct cu probleme, deci definim $f(z) = \dfrac{\exp(z^2)}{z-6}$.

9.3 Teorema reziduurilor

Similar cu orice funcție reală, și funcțiile complexe pot fi dezvoltate în serii de puteri. În cazul complex, seriile se numesc *serii Laurent* și pot conține și puteri negative.

Informal, punctele cu probleme care ne interesează se numesc *poli* sau *puncte singulare*. Ordinul unui pol $z = a$ este multiplicitatea algebrică a rădăcinii $z = a$ în dezvoltarea în serie Laurent a funcției f. În particular, avem *poli simpli, dubli* etc.

Definiţie 9.1: Fie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ o funcție complexă și dezvoltarea sa în serie Laurent în jurul unui punct $z_0 \in \mathbb{C}$:

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n \in \mathbb{R}.$$

Se numește *reziduul* funcției f în punctul singular z_0 coeficientul a_{-1} din dezvoltarea de mai sus, notat $\mathrm{Rez}(f, z_0)$.

Următoarea teoremă ne dă metode de calcul al reziduurilor, în funcție de multiplicitatea lor:

Teoremă 9.3 (Calculul reziduurilor)**:** *(1)* $\mathrm{Rez}(f, a) = c_{-1}$*, unde* c_{-1} *este coeficientul lui* $\dfrac{1}{z-a}$ *în dezvoltarea în serie Laurent a funcției* f *în vecinătatea singularității* $z = a$.

(2) Dacă $z = a$ *este pol de ordinul* $p \geq 2$ *pentru* f*, atunci:*

$$\mathrm{Rez}(f, a) = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \to a} \Big[(z-a)^p f(z) \Big]^{(p-1)};$$

(3) Dacă $z = a$ *este pol simplu pentru* f*, atunci, particularizînd formula de mai sus, avem:*

$$\mathrm{Rez}(f, a) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z);$$

(4) Dacă f *se poate scrie ca un cît de funcții,* $f = \dfrac{A}{B}$*, olomorfe în jurul lui* a *și dacă* $z = a$ *este pol simplu pentru* f*, adică* $B(a) = 0$*, atunci:*

$$\mathrm{Rez}(f, a) = \lim_{z \to a} \frac{A(z)}{B'(z)}.$$

Rezultatul esențial al acestei secțiuni ne arată că, dacă integrăm o funcție cu probleme, valoarea integralei este dată în mod esențial de reziduurile sale:

Teoremă 9.4 (Teorema reziduurilor)**:** *Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu și $f : D - \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \to \mathbb{C}$ o funcție olomorfă pentru care α_i sînt poli.*

Fie $K \subseteq D$ un compact cu frontiera $\Gamma = \partial K$, o curbă de clasă $\mathcal{C}^1$, jordaniană, orientată pozitiv și care conține toate α_i în interior. Atunci:

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Rez}(f, \alpha_j).$$

De exemplu, să calculăm integrala:

$$I = \int_{|z|=r} \frac{e^z}{(z-i)(z-2)} dz, r > 0, r \neq 1, 2.$$

Soluție: Dacă $0 < r < 1$, putem aplica teorema lui Cauchy (9.1) și găsim $I = 0$.

Dacă $1 < r < 2$, aplicăm formula integrală a lui Cauchy (9.2) și găsim:

$$\int_{|z|=r} \frac{e^z}{(z-i)(z-2)} dz = \int_{|z|=r} \frac{\frac{e^z}{z-2}}{z-i} dz = \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z-i} dz,$$

unde $f(z) = \dfrac{e^z}{z-2}$. Rezultă:

$$\int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z-i} dz = 2\pi i f(i) = 2\pi i \frac{e^i}{i-2}.$$

Dacă $r > 2$, aplicăm teorema reziduurilor, cu i și 2 poli simpli. Avem:

$$\mathrm{Rez}(f, i) = \lim_{z \to i} (z-i) \frac{e^z}{(z-i)(z-2)} = \frac{e^i}{i-2}$$

$$\mathrm{Rez}(f, 2) = \lim_{z \to 2} \frac{e^z}{(z-i)(z-2)} = \frac{e^2}{2-i}.$$

Rezultă, din teorema reziduurilor:

$$\int_{|z|=r} \frac{e^z}{(z-i)(z-2)} dz = 2\pi i \left(\frac{e^i}{i-2} + \frac{e^2}{2-i} \right).$$

9.4 Exerciții

1. Calculați reziduurile funcțiilor în punctele a indicate:

(a) $f(z) = \dfrac{\exp(z^2)}{z-1}, a = 1;$

(b) $f(z) = \dfrac{\exp\left(z^2\right)}{(z-1)^2}, a = 1;$

(c) $f(z) = \dfrac{z+2}{z^2-2z}, a = 0;$

(d) $f(z) = \dfrac{1+e^z}{z^4}, a = 0;$

(e) $f(z) = \dfrac{\sin z}{4z^2}, a = 0;$

(f) $f(z) = \dfrac{z}{1-\cos z}, a = 0.$

Indicație: Verificăm multiplicitatea polului $z = a$ și aplicăm formula corespunzătoare din teorema 9.3.

2. Să se calculeze următoarele integrale:

(a) $I = \displaystyle\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2-1};$

(b) $I = \displaystyle\int_{\gamma} \frac{dz}{z^4+1}, \gamma : x^2+y^2-2x = 0;$

(c) $I = \displaystyle\int_{|z|=3} \frac{z^2+1}{(z-1)^2(z+2)}dz.$

Soluție: (a) Punctele $z = \pm 1$ sînt poli de ordinul 1 pentru funcția $f(z) = \dfrac{1}{z^2-1}$. Ele sînt situate în interiorul discului pe care integrăm, cu $|z| = 2$, deci putem aplica teorema reziduurilor:

$$I = 2\pi i \cdot \Big(\mathrm{Rez}(f, z_1) + \mathrm{Rez}(f, z_2)\Big).$$

Calculăm separat reziduurile:

$$\mathrm{Rez}(f, z_1) = \lim_{z\to 1}(z-1)\cdot\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{2}$$
$$\mathrm{Rez}(f, z_2) = \lim_{z\to -1}(z+1)\cdot\frac{1}{z^2-1} = -\frac{1}{2}.$$

Rezultă:

$$I = \int_{|z|=2}\frac{dz}{z^2-1} = 2\pi i\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) = 0.$$

(b) Curba γ este un cerc centrat în $(1,0)$ și cu raza 1. Căutăm polii funcției $f(z) = \dfrac{1}{z^4+1}$ care se află în interiorul lui γ.

Avem succesiv:

$$\begin{aligned} z^4+1=0 &\Rightarrow z^4 = -1 = \cos\pi + i\sin\pi \Rightarrow \\ z &= \sqrt[4]{\cos\pi + i\sin\pi} \Rightarrow \\ z_k &= \cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}, k=0,1,2,3. \end{aligned}$$

Doar punctele z_0, z_3 se află în interiorul discului delimitat de γ și calculăm reziduurile în aceste puncte.

Putem aplica formula din Teorema 9.3 (4) și avem:

$$\begin{aligned} \mathrm{Rez}(f, z_0) &= \frac{A(z)}{B'(z)}\Big|_{z_0} = \frac{1}{4z^3}\Big|_{z_0} = -\frac{1}{4}e^{\frac{\pi i}{4}} \\ \mathrm{Rez}(f, z_3) &= \frac{A(z)}{B'(z)}\Big|_{z_3} = \frac{1}{4z^3}\Big|_{z_3} = -\frac{1}{4}e^{\frac{7\pi i}{4}}. \end{aligned}$$

Rezultă:

$$I = \int_\gamma \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i\left(-\frac{1}{4}e^{\frac{\pi i}{4}} - \frac{1}{4}e^{\frac{7\pi i}{4}}\right) = -\frac{\pi\sqrt{2}i}{2}.$$

(c) Avem doi poli, $z=1, z=-2$ în interiorul conturului. Se vede că $z_1 = 1$ este pol de ordinul 2, iar $z_2 = -2$ este pol de ordinul 1. Calculăm reziduurile:

$$\begin{aligned} \mathrm{Rez}(f, z_1) &= \frac{1}{2!}\lim_{z\to 1}\left[(z-1)^2\frac{z^2+1}{(z-1)^2(z+2)}\right] \\ &= \frac{1}{2!}\lim_{z\to 1}\frac{z^2+4z-1}{(z+2)^2} \\ &= \frac{2}{9} \\ \mathrm{Rez}(f, z_2) &= \lim_{z\to -2}(z+2)\frac{z^2+1}{(z-1)^2(z+2)} = \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

Rezultă:

$$I = \int_{|z|=3}\frac{z^2+1}{(z-1)^2(z+2)}dz = \frac{14}{9}\pi i.$$

3. Să se calculeze integralele:

(a) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{dz}{\sin z}$;

(b) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2} dz$;

(c) $\displaystyle\int_{|z|=5} z e^{\frac{3}{z}} dz$;

(d) $\displaystyle\int_{|z-1|=1} \frac{dz}{(z+1)(z-1)^3}$;

(e) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^4} dz$.

Indicații: (a) $z = 0$ este singurul pol din interiorul domeniului;

(b), (c): Dezvoltăm în serie Laurent și identificăm reziduurile folosind definiția.

(d) Avem $z = 1$ pol de ordin 3 și $z = -1$ pol simplu. Doar $z = 1$ se află în interiorul domeniului și dezvoltăm în serie Laurent după puterile lui $z - 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z+1} &= \frac{1}{2 - (-(z-1))} \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \left(-\frac{z-1}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^n} \\
&= \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}},
\end{aligned}$$

pentru $|z - 1| < 2$.

Rezultă:

$$\frac{1}{(z+1)(z-1)^3} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{(z-1)^{n-3}}{2^{n+1}} = \frac{1}{2(z-1)^3} - \frac{1}{4(z-1)^2} + \frac{1}{8(z-1)} - \frac{1}{16} + \ldots,$$

deci $\operatorname{Rez}(f, 1) = \frac{1}{8}$.

9.5 Aplicații ale teoremei reziduurilor

Putem folosi teorema reziduurilor pentru a calcula integrale trigonometrice de forma:

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta,$$

unde R este o funcție rațională.

Facem schimbarea de variabilă $z = e^{i\theta}$ și atunci, pentru $\theta \in [0, 2\pi]$, z descrie cercul $|z| = 1$, o dată, în sens direct.

Folosim formulele lui Euler:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big)$$
$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i}\Big(z - \frac{1}{z}\Big).$$

Atunci, dacă $z = e^{i\theta}$, rezultă $dz = ie^{i\theta}\, d\theta = izd\theta$, iar integrala devine:[1]

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta = \oint_{|z|=1} R_1(z) dz,$$

unde:

$$R_1(z) = \frac{1}{iz} R\Big(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\Big).$$

Această funcție poate avea poli și deci putem folosi teorema reziduurilor. Dacă $a_1, \ldots, a_n$ sînt polii din interiorul cercului unitate, avem:

$$I_1 = 2\pi i \sum_{k \geq 1} \mathrm{Rez}(R_1, a_k).$$

Să vedem cîteva exemple:

(a) $\displaystyle\int_0^{2\,\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos\theta}$;

(b) $\displaystyle\int_0^{2\,\pi} \frac{d\theta}{1 + 3\cos^2\theta}$;

(c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{1 + i\sin\theta}\, d\theta$;

(d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a\sin\theta}, |a| < 1, a \in \mathbb{R}$.

[1] $\oint$ marchează o integrală pe un contur *închis*

Soluție:
(a) Notăm $z = e^{i\theta}$, cu $\theta \in [0, 2\pi]$. Atunci avem succesiv:

$$\begin{aligned}
dz = ie^{i\theta} d\theta = izdz \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz} \\
\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \\
\frac{1}{2+\cos\theta} = \frac{2z}{z^2+4z+1} \\
\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta} &= \oint_{|z|=1} \frac{2z}{z^2+4z+1} \frac{dz}{iz} \\
&= -2i \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+4z+1}.
\end{aligned}$$

Acum folosim teorema reziduurilor. Singularitățile funcției $f(z) = \dfrac{1}{z^2+4z+1}$ sînt $z = -2 \pm \sqrt{3}$, care sînt poli simpli. Numai $z = -2 + \sqrt{3}$ se află în interiorul cercului $|z| = 1$ și calculăm reziduul folosind Teorema 9.3(2).

SEMINAR 10

TRANSFORMATA LAPLACE

10.1 Definiții și proprietăți

Transformata Laplace este o transformare integrală, care se poate aplica unor funcții speciale, numite *funcții original*.

Definiţie 10.1: O funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se numește *original* dacă:

(a) $f(t) = 0$ pentru orice $t < 0$;

(b) f este continuă (eventual pe porțiuni) pe intervalul $[0, \infty)$;

(c) Este mărginită de o exponențială, adică există $M > 0$ și $s_0 \geq 0$ astfel încît:

$$|f(t)| \leq Me^{s_0 t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Vom nota cu $\mathcal{O}$ mulțimea funcțiilor original.

Pornind cu o funcție original, definiția transformatei Laplace este:

Definiţie 10.2: Păstrînd contextul și notațiile de mai sus, fie $f \in \mathcal{O}$ și mulțimea:

$$S(s_0) = \{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > s_0\}.$$

Funcția:

$$F : S(s_0) \to \mathbb{C}, \quad F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

se numește *transformata Laplace* a lui f sau *imaginea Laplace* a originalului f.
Vom mai folosi notația $F = \mathcal{L}f$ sau, explicit, $\mathcal{L}f(t) = F(s)$.

Proprietățile esențiale ale transformatei Laplace sînt date mai jos. Fiecare dintre ele va fi folosită pentru a calcula o transformată Laplace pentru o funcție care nu se regăsește direct într-un tabel de valori.

- **Liniaritate:** $\mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{L} f + \beta \mathcal{L} g$, pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, iar f, g funcții original;
- **Teorema asemănării:**
$$\mathcal{L} f(\alpha t) = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right);$$
- **Teorema deplasării:**
$$\mathcal{L}\left(f(t)e^{s_0 t}\right) = F(s - s_0);$$
- **Teorema întîrzierii:** Definim *întîrziata cu* τ a funcției $f \in \mathcal{O}$ prin:
$$f_\tau(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau \\ f(t-\tau), & t \geq \tau \end{cases}.$$
Atunci, dacă $\mathcal{L} f(t) = F(s)$, $\mathcal{L} f_\tau(t) = e^{-st} F(s)$;
- **Teorema derivării imaginii:**
$$\mathcal{L}\left(t^n f(t)\right) = (-1)^n F^{(n)}(s);$$
- **Teorema integrării originalului:** Fie $f \in \mathcal{O}, \mathcal{L} f(t) = F(s)$ și $g(t) = \displaystyle\int_0^t f(\tau) d\tau$. Atunci:
$$\mathcal{L} g(t) = \frac{1}{s} F(s);$$
- **Teorema integrării imaginii:** Fie $\mathcal{L} f(t) = F(s)$ și G o primitivă a lui F în $S(s_0)$, cu $G(\infty) = 0$. Atunci:
$$\mathcal{L} \frac{f(t)}{t} = -G(s).$$

10.2 Tabel de transformate Laplace

În tabelul de mai jos, vom considera funcțiile $f(t)$ ca fiind funcții original, adică nule pentru argument negativ. Echivalent, putem gîndi $f(t)$ ca fiind, de fapt, înmulțite cu *funcția lui Heaviside*:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}.$$

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$	$F(s) = \mathcal{L}(f(t))$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$u(t-\tau)$	$\frac{1}{s}e^{-\tau s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$t^n e^{-\alpha t}$	$\frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s+\alpha}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sinh(\alpha t)$	$\frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}$
$\cosh(\alpha t)$	$\frac{s}{s^2-\alpha^2}$
$e^{-\alpha t}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}\cos(\omega t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha^2)+\omega^2}$
$\ln t$	$-\frac{1}{s}\left(\ln s + \gamma\right)$[1]

[1]Constanta Euler-Mascheroni, $\gamma \simeq 0,577\dots \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

10.3 Exerciții

1. Calculați transformatele Laplace pentru funcțiile (presupuse original):

(a) $f(t) = 1, t \geq 0$;

(b) $f(t) = t, t \geq 0$;

(c) $f(t) = t^n, n \in \mathbb{N}$;

(d) $f(t) = e^{at}, t \geq 0, a \in \mathbb{R}$;

(e) $f(t) = \sin(at), t \geq 0, a \in \mathbb{R}$.

Soluție: (a) Avem direct din definiție:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} dt = \lim_{n \to \infty} \int_0^n e^{-st} dt = \frac{1}{s}, s > 0.$$

(b) Integrăm prin părți și obținem $F(s) = \dfrac{1}{s^2}$.
(c) Facem substituția $st = \tau$ și găsim:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} t^n dt = \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^\infty e^{-\tau} \tau^n d\tau = \frac{n!}{s^{n+1}},$$

pentru $s > 0$, folosind funcția Gamma a lui Euler:

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx, a > 0, \quad \Gamma(n+1) = n!, n \in \mathbb{N}.$$

(d) $F(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{at}\, e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt = \frac{1}{s-a}, s > a.$
(e) Integrăm prin părți și ajungem la:

$$F(s) = \frac{1}{a} - \frac{s^2}{a^2} F(s) \Rightarrow F(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}, s > 0.$$

2. Folosind tabelul de valori și proprietățile, să se determine transformatele Laplace pentru funcțiile (presupuse original):

(a) $f(t) = 5$;

(b) $f(t) = 3t + 6t^2$;

(c) $f(t) = e^{-3t}$;

(d) $f(t) = 5e^{-3t}$;

(e) $f(t) = \cos(5t)$;

(f) $f(t) = \sin(3t)$;

(g) $f(t) = 3(t-1) + e^{-t-1}$;

(h) $f(t) = 3t^3(t-1) + e^{-5t}$;

(i) $f(t) = 5e^{-3t}\cos(5t)$;

(j) $f(t) = e^{2t}\sin(3t)$;

(k) $f(t) = te^{-t}\cos(4t)$;

(l) $f(t) = t^2\sin(3t)$;

(m) $f(t) = t^3\cos t$.

Indicații: În majoritatea cazurilor, se folosește tabelul și proprietatea de liniaritate. În plus:

(i, j) Folosim $\mathcal{L}(e^{at}f(t)) = F(s-a)$;
(k) Folosim $\mathcal{L}(tf(t)) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(f(t))$;
(l) Folosim $\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n \dfrac{d^n F(s)}{ds^n}$;

3. Folosind teorema derivării imaginii, să se determine transformatele Laplace pentru funcțiile (presupuse original):

(a) $f(t) = t$;

(b) $f(t) = t^2$;

(c) $f(t) = t\sin t$;

(d) $f(t) = te^t$.

Indicație: Conform proprietății de derivare a imaginii, avem:

$$\mathcal{L}(tf(t)) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(f(t)).$$

4. Folosind teorema integrării originalului, să se determine transformatele Laplace pentru funcțiile (presupuse original):

(a) $f(t) = \int_0^t \cos(2\tau)d\tau$;

(b) $f(t) = \int_0^t e^{3\tau}\cos(2\tau)d\tau$;

(c) $f(t) = \int_0^t \tau e^{-3\tau}d\tau$.

Indicație: Conform proprietății de integrare a originalului, avem:

$$\mathcal{L}\int_0^t f(\tau)d\tau = \frac{F(s)}{s}.$$

10.4 Aplicații ale transformatei Laplace

Principala aplicație a transformatei Laplace este pentru rezolvarea ecuațiilor și sistemelor diferențiale de ordinul întîi sau superior.

Aceste aplicații se bazează pe calculele care se pot obține imediat din definiția transformatei Laplace și a proprietăților sale:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}f' &= s\mathcal{L}f - f(0)\\ \mathcal{L}f'' &= s^2\mathcal{L}f - sf(0) - f'(0).\end{aligned}$$

De fapt, în general, avem:

$$\mathcal{L}f^{(n)} = s^n\mathcal{L}f - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).$$

De asemenea, pentru integrale, știm deja teorema integrării originalului:

$$\mathcal{L}\int_0^t f(\tau)d\tau = \frac{1}{s}F(s), \quad F(s) = \mathcal{L}f(t).$$

Rezultă, folosind transformarea inversă:

$$\int_0^t f(\tau)d\tau = \mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{s}F(s)\Big).$$

De exemplu, pentru a rezolva ecuația diferențială:

$$y'' + ay' + by = r(t), \quad y(0) = K_0, y'(0) = K_1,$$

aplicăm transformata Laplace și folosim proprietățile de mai sus. Fie $Y = \mathcal{L}y(t)$

Se obține ecuația algebrică:

$$(s^2Y - sy(0) - y'(0)) + a(sY - y(0)) + bY = R(s),$$

unde $R(s) = \mathcal{L}r$. Forma echivalentă este:

$$(s^2 + as + b)Y = (s + a)y(0) + y'(0) + R(s).$$

Împărțim prin $s^2 + as + b$ și folosim formula:

$$Q(s) = \frac{1}{s^2 + as + b} = \frac{1}{(s + \frac{1}{2}a)^2 + b - \frac{1}{4}a^2},$$

de unde rezultă:

$$Y(s) = \Big((s + a)y(0) + y'(0)\Big)Q(s) + R(s)Q(s).$$

În forma aceasta, descompunem $Y(s)$ în fracții simple, dacă este nevoie și folosim tabelul de transformate Laplace, pentru a afla $y = \mathcal{L}^{-1}(Y)$.

De exemplu:

$$y'' - y = t, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1.$$

Soluție: Aplicăm transformata Laplace și ajungem la ecuația:

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) - Y = \frac{1}{s^2}$$

$$(s^2 - 1)Y = s + 1 + \frac{1}{s^2}.$$

Rezultă $Q = \dfrac{1}{s^2 - 1}$ și ecuația devine:

$$\begin{aligned} Y &= (s+1)Q + \frac{1}{s^2}Q \\ &= \frac{s+1}{s^2-1} + \frac{1}{s^2(s^2-1)} \\ &= \frac{1}{s-1} + \left(\frac{1}{s^2-1} - \frac{1}{s^2}\right) \end{aligned}$$

Folosind tabelul și proprietățile transformatei Laplace, obținem soluția:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}Y \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^{-1}}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2-1}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) \\ &= e^t + \sinh t - t. \end{aligned}$$

Exerciții

1. Să se rezolve următoarele probleme Cauchy, folosind transformata Laplace:

(a) $y'(t) + 2y(t) = 4t, y(0) = 1$;

(b) $y'(t) + y(t) = \sin 4t, y(0) = 0$;

(c) $y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 0, y(0) = 0, y'(0) = 0$;

(d) $2y''(t) - 6y'(t) + 4y(t) = 3e^{3t}, y(0) = 1, y'(0) = -1$;

(e) $y''(t) - 2y(t) + y(t) = e^t, y(0) = -2, y'(0) = -3$;

(f) $y''(t) + 4y(t) = 3\cos^2(t), y(0) = 1, y'(0) = 2$.

2. Să se rezolve următoarele sisteme diferențiale:

(a) $\begin{cases} x' + x + 4y & = 10 \\ x - y' - y & = 0 \\ x(0) = 4, & y(0) = 3 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x' + x - y & = e^t \\ y' + y - x & = e^t \\ x(0) = 1, & y(0) = 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x' + 2y' + x - y & = 5\sin t \\ 2x' + 3y' + x - y & = e^t \\ x(0) = 2, & y(0) = 1 \end{cases}$

Indicație: Aplicăm transformata Laplace fiecărei ecuații și notăm $\mathcal{L}x(t) = X(s)$ și $\mathcal{L}y(t) = Y(s)$. Apoi rezolvăm sistemul *algebric* obținut cu necunoscutele X și Y, cărora la final le aplicăm transformata Laplace inversă.

SEMINAR 11

TRANSFORMATA Z

Această transformată se definește pe un caz discret, pornind de la:

Definiţie 11.1: Se numește *semnal discret* o funcție $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ dată de $n \mapsto x_n$ sau, echivalent, $x(n)$ ori $x[n]$.

Mulțimea semnalelor discrete se va nota cu S_d, iar cele cu suport pozitiv (nule pentru $n < 0$ se va nota S_d^+.

Un semnal particular este *impulsul unitar discret* la momentul k, definit prin:

$$\delta_k(n) = \begin{cases} 1, & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases},$$

definit pentru $k \in \mathbb{Z}$ fixat.

Pentru $k = 0$, vom nota $\delta_0 = \delta$.

Definiţie 11.2: Fie $x \in S_d$ și $k \in \mathbb{Z}$ fixat. Semnalul $y = (x_{n-k})$ se numește *întîrziatul lui x cu k momente.*

O operație foarte importantă, pe care se vor baza unele proprietăți esențiale ale transformatei Z este *convoluția:*

Definiţie 11.3: Fie $x, y \in S_d$. Dacă seria $\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} x_{n-k} y_k$ este convergentă pentru orice $n \in \mathbb{Z}$ și are suma z_n, atunci semnalul $z = (z_n)$ se numește *convoluția* semnalelor x și y și se notează $z = x * y$.

Trei proprietăți imediate sînt:

- $x * y = y * x$;
- $x * \delta = x$;
- $(x * \delta_k)(n) = x_{n-k}$.

Ajungem acum la definiția principală:

Definiţie 11.4: Fie $s \in S_d$, cu $s = (a_n)_n$. Se numește *transformata Z* sau *transformata Laplace discretă* a acestui semnal funcția definită prin:

$$L_s(z) = Z_s(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^{-n},$$

care se definește în domeniul de convergență al seriei Laurent din definiție.

Principalele proprietăți pe care le vom folosi în calcule sînt:

(1) **Inversarea transformării** Z**:** Fie $s \in S_d^+$, cu $s = (a_n)$. Presupunem că $Z_s(z)$ este olomorfă în domeniul $|z| \in (r, R)$. Atunci putem recupera semnalul a_n prin formula:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma z^{n-1} Z_s(z) dz, \quad n \in \mathbb{Z},$$

unde γ este discul de rază $\rho \in (r, R)$.

(2) **Teorema de convoluție:** Fie $s, t \in S_d^+$. Atunci $s * t = S_d^+$ și are loc $L_{s*t} = L_s \cdot L_t$. În particular:

$$L_{s*\delta_k}(z) = z^{-k} L_s(z), \quad k \in \mathbb{Z};$$

(3) **Prima teoremă de întîrziere:** Pentru $n \in \mathbb{N}^*$:

$$L_s(z_{t-n}) = z^{-n} L_s(f);$$

(4) **A doua teoremă de întîrziere (teorema de deplasare):**

$$L_s(z_{t+n}) = z^n \cdot \left(L_s(z) - \sum_{t=0}^{n-1} z_t z^{-t} \right), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Cîteva transformate uzuale sînt:

s	L_s
$\begin{cases} h_n = 0, & n < 0 \\ h_n = 1, & n \geq 0 \end{cases}$	$\dfrac{z}{z-1}$
$\delta_k, k \in \mathbb{Z}$	$\dfrac{1}{z^k}$
$s = (n)_{n\in\mathbb{N}}$	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$
$s = (n^2)_{n\in\mathbb{N}}$	$\dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
$s = (a^n)_{n\in\mathbb{N}}, a \in \mathbb{C}$	$\dfrac{z}{z-a}$
$s = (e^{an})_{n\in\mathbb{N}}, a \in \mathbb{R}$	$\dfrac{z}{z-e^a}$
$s = (\sin(\omega n))_{n\in\mathbb{N}}, \omega \in \mathbb{R}$	$\dfrac{z\sin\omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}$
$s = (\cos(\omega n))_{n\in\mathbb{N}}, \omega \in \mathbb{R}$	$\dfrac{z(z-\cos\omega)}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}$

11.1 Exerciții (*)

1. Să se determine semnalul $x \in S_d^+$, a cărui transformată Z este dată de:

(a) $\mathcal{L}_s(z) = \dfrac{z}{(z-3)^2}$;

(b) $\mathcal{L}_s(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z^2+1)}$;

(c) $\mathcal{L}_s(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2(z^2+z-6)}$;

(d) $\mathcal{L}_s(z) = \dfrac{z}{z^2+2az+2a^2}, a >$ 0 parametru.

Soluție:

(a) Avem:

$$
\begin{aligned}
x_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho} z^{n-1}\mathcal{L}_s(z)dz \\
&= \mathrm{Rez}(z^{n-1}\mathcal{L}_s(z), 3) \\
&= \mathrm{Rez}\left(\frac{z^n}{(z-3)^2}, 3\right) \\
&= \lim_{z\to 3}\left((z-3)^2\cdot\frac{z^n}{(z-3)^2}\right)' \\
&= \lim_{z\to 3} nz^{n-1} \\
&= n3^{n-1}.
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
x_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho} z^{n-1}\mathcal{L}_s(z)dz \\
&= \mathrm{Rez}(z^{n-1}\mathcal{L}_s(z), 1) + \mathrm{Rez}(z^{n-1}\mathcal{L}_s(z), i) + \mathrm{Rez}(z^{n-1}\mathcal{L}_s(z), -i) \\
\mathrm{Rez}(z^{n-1}\mathcal{L}_s(z), 1) &= \lim_{z\to 1} z^{n-1}\frac{z}{(z-1)(z^2+1)}\cdot(z-1) = \frac{1}{2} \\
\mathrm{Rez}(z^{n-1}\mathcal{L}_s(z), i) &= \frac{i^n}{2i\cdot(i-1)} \\
\mathrm{Rez}(z^{n-1}\mathcal{L}_s(z), -i) &= \frac{(-1)^n i^n}{2i(i+1)}.
\end{aligned}
$$

Remarcăm că pentru $n = 4k$ și $n = 4k+1$, avem $x_n = 0$, iar în celelalte două cazuri, $x_n = 1$.

(c)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Rez}(z^{n-1}\mathcal{L}_s(z), 1) &= \lim_{z\to 1}\left[z^{n-1}\cdot(z-1)^2\cdot\frac{z^2}{(z-1)^2\cdot(z^2+z-6)}\right]' \\
&= -\frac{4n+3}{16}. \\
\mathrm{Rez}(z^{n-1}\mathcal{L}_s(z), 2) &= \frac{2^n}{5} \\
\mathrm{Rez}(z^{n-1}\mathcal{L}_s(z), -3) &= -\frac{(-3)^n}{80}.
\end{aligned}
$$

Obținem $x_n = -\dfrac{4n+3}{16} + \dfrac{2^n}{5} - \dfrac{(-3)^n}{80}$.

(d) $z_{1,2} = a(-1 \pm i)$ sînt poli simpli. Avem:

$$\begin{aligned} x_n &= \text{Rez}\left(\frac{z^n}{(z^2+2a+2a^2)}, z_1\right) + \text{Rez}\left(\frac{z^n}{(z^2+2a+2a^2)}, z_2\right) \\ &= \frac{a^n(-1+i)^n}{2z_1+2a} + \frac{a^n(-1-i)^n}{2z_1+2a} \\ &= -\frac{i}{2a}(z_1^n - z_2^n). \end{aligned}$$

Putem scrie trigonometric numerele z_1 și z_2:

$$\begin{aligned} z_1 &= a(-1+i) = a\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \\ z_2 &= a(-1-i) = a\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} - i\sin\frac{3\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Deci: $x_n = 2^{\frac{n}{2}} a^{n-1} \sin\frac{3n\pi}{4}$.

2. Fie $x = (x_n) \in S_d^+$ și $y = (y_n)$, unde $y_n = x_0 + \cdots + x_n$. Să se arate că $Y(z) = \dfrac{z}{z-1}X(z)$.
Soluție:
Avem $Y(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n z^{-n}$. Dar:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} \text{ și } \sum_{n=0}^{\infty} x_{n-1} z^n = \frac{1}{z}X(z),$$

deoarece $x_{-1} = 0$. Putem continua și obținem $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_{n-k} z^{-n} = \dfrac{1}{z^k}X(z)$. Așadar:

$$Y(z) = X(z) \cdot \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots\right) = X(z) \cdot \frac{z}{z-1}.$$

3. Cu ajutorul transformării Z, să se determine șirurile (x_n) definite prin următoarele relații:

(a) $x_0 = 0, x_1 = 1, x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, n \in \mathbb{N}$ (șirul lui Fibonacci);

(b) $x_0 = 0, x_1 = 1, x_{n+2} = x_{n+1} - x_n, n \in \mathbb{N}$;

(c) $x_0 = x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 0, x_{n+4} + 2x_{n+3} + 3x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = 0, n \in \mathbb{N}$;

(d) $x_0 = 2, x_{n+1} + 3x_n = 1, n \in \mathbb{Z}$;

(e) $x_0 = 0, x_1 = 1, x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = (n+1)4^n, n \in \mathbb{N}$.

Soluție:

Abordarea generală este să considerăm șirul (x_n) ca fiind restricția unui semnal $x \in S_d^+$ la $\mathbb{N}$ și rescriem relațiile de recurență sub forma unor ecuații de convoluție $a * x = y$, pe care le rezolvăm în S_d^+.

(a) Fie $x \in S_d^+$, astfel încît restricția lui la $\mathbb{N}$ să fie șirul căutat. Deoarece avem:

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = y_n, n \in \mathbb{Z},$$

cu $y_n = 0$ pentru $n \neq -1$ și $y_{-1} = 1$, avem ecuația de convoluție:

$$a * x = y, \text{ unde } a = \delta_{-2} + \delta_{-1} + \delta, y = \delta_{-1}.$$

Aplicăm transformata Z și rezultă:

$$\mathcal{L}_s x(z)(z^2 - z - 1) = z \Longrightarrow x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

(b) Ca în cazul anterior, avem $a * x = y$, cu $a = \delta_{-2} - \delta_{-1} + \delta$, unde $y = \delta_{-1}$. Aplicînd transformata Z, obținem:

$$\mathcal{L}_s x(z)(z^2 - z + 1) = z \Longrightarrow \mathcal{L}_s x(z) = \frac{z}{z^2 - z + 1}.$$

Obținem:

$$x_n = \operatorname{Rez}\left(z^{n-1}\frac{z}{z^2 - z + 1}, \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{Rez}\left(z^{n-1}\frac{z}{z^2 - z + 1}, \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right).$$

Calculăm reziduurile, cu notația $\varepsilon = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ și $\overline{\varepsilon} = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Rez}\left(\frac{z^n}{z^2 - z + 1}, \varepsilon\right) &= \lim_{z \to \varepsilon} \frac{z^n}{z^2 - z + 1}\left(z - \varepsilon\right) \\
&= \frac{\varepsilon^n}{i\sqrt{3}} \\
&= \frac{\cos \frac{2n\pi}{3} + i \sin \frac{2n\pi}{3}}{i\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Similar:

$$\mathrm{Rez}\left(\frac{z^n}{z^2-z+1},\overline{\varepsilon}\right)=\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}-i\sin\frac{2n\pi}{3}}{-i\sqrt{3}}.$$

Rezultă:

$$x_n=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{2n\pi}{3}, n\in\mathbb{N}.$$

(c) Ecuația $a*x=y$ este valabilă pentru:

$$a=\delta_{-4}+2\delta_{-3}+3\delta_{-2}+2\delta_{-1}+\delta,\quad y=-\delta_{-2}-2\delta_{-1}.$$

Aplicăm transformata Z și obținem: $\mathcal{L}_s x(z)=-\dfrac{z(z+2)}{(z^2+z+1)^2}$. Descompunem în fracții simple, calculăm reziduurile și ținem cont de faptul că rădăcinile numitorului, $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ sînt poli de ordinul 2, obținem:

$$x_n=\frac{(2n-4)(\varepsilon_1^n-\varepsilon_2^n)-(n+1)(\varepsilon_1^{n-1}+\varepsilon_1^{n-2}-\varepsilon_2^{n-1}-\varepsilon_2^{n-2})}{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)^3}=\frac{2(n-1)}{\sqrt{3}}\sin\frac{2n\pi}{3}, n\in\mathbb{N}.$$

(d) Ecuația corespunzătoare este $a*x=y$, cu $a=\delta_{-1}+3\delta$ și $y_n=1,\forall n\geq 1$, iar $y_{-1}=x_0+3x_{-1}=2$, cu $y_n=0,\forall n\leq -2$, adică $y=1+2\delta_{-1}$.

Așadar:

$$\delta_{-1}*x+3\delta*x=1+2\delta_{-1}.$$

Aplicăm transformata Z și obținem:

$$\begin{aligned}
z\mathcal{L}_s x(z)+3\mathcal{L}_s x(z)&=\frac{z}{z-1}+2z\\
&=\frac{2z^2+3z}{z-1}\\
\Longrightarrow \mathcal{L}_s x(z)&=\frac{2z^2+3z}{(z-1)(z+3)}\\
\Longrightarrow x_n&=\mathrm{Rez}(z^{n-1}\cdot\frac{2z^2+3z}{(z-1)(z+3)},1)+\mathrm{Rez}(z^{n-1}\cdot\frac{2z^2+3z}{(z-1)(z+3)},-3)
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Rez}(z^{n-1}\cdot\frac{2z^2+3z}{(z-1)(z+3)},1)=\lim_{z\to 1}(z-1)\cdot z^{n-1}\cdot\frac{2z^2+3z}{(z-1)(z+3)}=\frac{5}{4}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rez}(z^{n-1}\cdot\frac{2z^2+3z}{(z-1)(z+3)},-3)&=\lim_{z\to -3}(z+3)z^{n-1}\cdot\frac{2z^2+3z}{(z-1)(z+3)}\\
&=(-3)^{n-1}\cdot\frac{12}{-4}=-3\cdot(-3)^{n-1}.
\end{aligned}$$

Rezultă: $x_n=\dfrac{5}{4}-3\cdot(-3)^{n-1}$.

(e) Avem ecuația: $a * x = y$, unde $a = \delta_{-2} - 4\delta_{-1} + 3\delta$, cu $y_n = 0, \forall n \leq -2, y_{-1} = 1$ și $y_n = (n+1)4^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Fie $s_1 = (n4^n)_n, s_2 = (4^n)_n$. Atunci:

$$\mathcal{L}_s s_1(z) = -z\mathcal{L}_s s_2'(z) = -z\Big(\frac{z}{z-4}\Big)' = \frac{4z}{(z-4)^2}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{L}_s x(z)(z^2 - 4z + 3) = \frac{4z}{(z-4)^2} + \frac{z}{z-4} + z$$

$$= \frac{z^2}{(z-4)^2} + z$$

$$\Longrightarrow \mathcal{L}_s x(z) = \frac{z(z^2 - 7z + 16)}{(z-4)^2(z-1)(z-3)}.$$

Descompunem în fracții simple și obținem, în fine:

$$x_n = \frac{1}{9}\Big[18 \cdot 3^n + (3n - 13)4^n - 5\Big], n \in \mathbb{N}.$$

OBSERVAȚIE: Toate exercițiile cu recurențe se mai pot rezolva în alte două moduri:

(1) Se poate aplica teorema de convoluție relației de recurență. De exemplu, din recurența:

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 2$$

putem obține:

$$Z(x_{n+2}) - 2Z(x_{n+1}) + Z(x_n) = 2Z(1),$$

iar $Z(x_{n+2}) = Z(x_n * \delta_{-2}) = Z(x_n) \cdot Z(\delta_{-2})$ etc.

(2) Se poate aplica teorema de deplasare. În aceeași recurență de mai sus, de exemplu, avem:

$$Z(x_{n+2}) = z^n\Big(Z(x_n) - x_0 - x_1 z^{-1}\Big)$$

și la fel pentru celelalte.

SEMINAR 12

TRANSFORMATA FOURIER (*)

12.1 Integrala Fourier

Seriile Fourier sînt utile pentru dezvoltarea unor funcții periodice (sau convertibile în unele periodice). Însă dacă funcțiile sînt arbitrare, se folosește o metodă care extinde pe cea a seriilor Fourier, anume integralele Fourier.

Amintim că o funcție periodică $f_L(x)$, de perioadă $2L$, poate fi dezvoltată în serie Fourier cu formula:

$$f_L(x) = a_0 + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos w_n x + b_n \sin w_n x), \quad w_n = \frac{n\pi}{L}.$$

În această serie punem $L \to \infty$ și, după impunerea unor condiții de convergență, ajungem la *integrala Fourier* a funcției f, anume:

$$f(x) = \int_0^\infty A(w)\cos wx + B(w)\sin wx dw,$$

unde funcțiile A și B sînt date de:

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(v)\cos wv dv, \quad B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(v)\sin wv dv.$$

Ca în cazul seriilor Fourier, dacă f este o funcție pară, atunci $B(w) = 0$, iar integrala Fourier devine o integrală de cosinusuri:

$$f(x) = \int_0^\infty A(w)\cos wx dw, \text{ unde } A(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(v)\cos wv dv.$$

Similar, pentru f funcție impară, avem $A(w) = 0$, iar integrala Fourier devine o integrală de sinusuri:

$$f(x) = \int_0^\infty B(w) \sin wx dw, \text{ unde } B(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(v) \sin wv dv.$$

12.2 Transformata Fourier

Ideea de bază a unei transformări Fourier este următoarea. Dacă se dă o funcție periodică (sau convertită la una periodică printr-un artificiu de repetiție, practic), ei i se asociază *seria Fourier*. Aceasta o aproximează cu o serie de sinusuri și cosinusuri, funcțiile periodice cel mai des întîlnite. Practic, are loc o superpoziție de termeni cu sinusuri și cosinusuri, un fel de interferență a undelor electromagnetice. La pasul următor, *transformata Fourier* preia minimele și maximele acestor „interferențe“, iar rezultatul este un semnal (aproape) discret („digitalizat“), care reprezintă valorile cele mai importante din semnal.[1]

Rescriem formula integralei Fourier, înlocuind funcțiile A și B:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(v) \cdot \Big(\cos wv \cos wx + \sin wv \sin wx \Big) dv dw.$$

Acum putem folosi formule trigonometrice uzuale și observăm că putem rescrie:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty f(v) \cos(wx - wv) dv \right) dw.$$

Cum funcția cos este pară, integrala de la 0 la ∞ este jumătate din integrala pe tot $\mathbb{R}$, deci putem rescrie în forma:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty f(v) \cdot \cos(wx - wv) dv \right) dw.$$

Observaţie 12.1: Să remarcăm că, dacă în integrala de mai sus aveam funcția sin în loc de cos, integrala ar fi fost nulă, din imparitatea funcției sin.

Conform observației de mai sus, putem adăuga un termen similar cu sin, fără a schimba valoarea integralei. Acest lucru este util pentru a trece pe domeniu complex, unde putem porni de la formula lui Euler de scriere polară a unui număr complex. Așadar, avem:

$$f(v) \cos(wx - wv) + i f(v) \sin(wx - wv) = f(v) e^{i(wx - wv)}.$$

[1] O explicație animată este dată aici.

Trecînd la integrală, obținem *integrala Fourier complexă:*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{iw(x-v)} dv dw. \tag{12.1}$$

Dacă descompunem funcția exponențială într-un produs și scriem ca produs de integrale, obținem:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-iwv} dv \right] e^{iwx} dw.$$

Integrala din interior este exact **transformata Fourier** a lui f:

$$\widehat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx. \tag{12.2}$$

Atunci, dacă înlocuim în formula de mai sus, obținem:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(w) e^{iwx} dw, \tag{12.3}$$

care este formula *transformării Fourier inverse*.

O altă notație pentru transformata Fourier este $\widehat{f} = \mathcal{F}(f)$ și pentru transformata inversă, $f = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f})$.

Pentru orice funcție care satisface anumite proprietăți, transformata Fourier există:

Teoremă 12.1: *Dacă f este absolut integrabilă (adică integrala funcției $|f(x)|$ este convergentă) și continuă pe orice interval finit, atunci transformata Fourier dată de formula* (12.2) *există.*

Să vedem cîteva exemple.

Exemplu 12.1: Găsiți transformata Fourier a funcției:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

Soluție: Folosind definiția, integrăm:

$$\widehat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-iwx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-iwx}}{-iw} \Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{-iw\sqrt{2\pi}} (e^{-iw} - e^{iw}).$$

Folosind formula lui Euler pentru $e^{\pm iw}$, avem, în fine:

$$\widehat{f}(w) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin w}{w}.$$

Un alt exemplu:

Exemplu 12.2: Găsiți transformata Fourier a funcției:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, a > 0.$$

Soluție: Din definiție, avem:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-ax} e^{-iwx} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-(a+iw)x}}{-(a+iw)} \Big|_{x=0}^{\infty} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(a+iw)}
\end{aligned}$$

12.3 Proprietăți ale transformatei Fourier

Liniaritate: Transformata Fourier este o operație liniară:

$$\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g),$$

pentru orice funcții f, g care admit transformată Fourier și $a, b \in \mathbb{R}$.

Transformata derivatei: Dacă f este o funcție continuă și $f(x) \to 0$ pentru $|x| \to \infty$, iar $f'(x)$ este absolut integrabilă, atunci:

$$\mathcal{F}(f'(x)) = iw\mathcal{F}(f).$$

Mai departe, pentru derivate superioare, obținem, de exemplu:

$$\mathcal{F}(f''(x)) = -w^2\mathcal{F}(f(x)).$$

Convoluție: Fie f, g două funcții. Se definește *produsul lor de convoluție* $f * g$ ca fiind funcția:

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(x-p)dp = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-p)g(p)dp.$$

Comportarea transformatei Fourier față de produsul de convoluție este dată de:

$$\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g).$$

Echivalent, acest rezultat se mai poate scrie prin inversare:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(w) \cdot \widehat{g}(w) e^{iwx} dw.$$

12.4 Exerciții

Calculați transformatele Fourier ale următoarelor funcții:

(a) $f(x) = \begin{cases} e^{2ix}, & -1 < x < 1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 1, & a < x < b \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} e^{kx}, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}, k > 0$

(d) $f(x) = \begin{cases} e^{x}, & -a < x < a \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

(e) $f(x) = e^{-|x|}, x \in \mathbb{R};$

(f) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < a \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

(g) $f(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & -1 < x < 0 \\ 0, \text{ în rest} \end{cases}$

(h) $f(x) = \begin{cases} |x|, & -1 < x < 1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

(i) $f(x) = \begin{cases} x, & -1 < x < 1 \\ 0, \text{ în rest} \end{cases}$

12.5 Tabele de transformate Fourier

$f(x)$	$\widehat{f_c}(w) = \mathcal{F}_c(f)$
$\begin{cases} 1, & 0 < x < a \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin aw}{w}$
$x^{a-1}, 0 < a < 1$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma(a)}{w^a} \cos \frac{a\pi}{2}$
$e^{-ax}, a > 0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{a}{a^2+w^2}$
$e^{-x^2/2}$	$e^{-w^2/2}$
$e^{-ax^2}, a > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-w^2/(4a)}$
$x^n e^{-ax}, a > 0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{n!}{(a^2+w^2)^{n+1}} \operatorname{Re}(a+iw)^{n+1}$
$\begin{cases} \cos x, & 0 < x < a \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin a(1-w)}{1-w} + \frac{\sin a(1+w)}{1+w} \right]$
$\cos(ax^2), a > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} \cos\left(\frac{w^2}{4a} - \frac{\pi}{4} \right)$
$\sin(ax^2), a > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} \cos\left(\frac{w^2}{4a} + \frac{\pi}{4} \right)$
$\frac{\sin ax}{x}, a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}(1 - u(w-a))$[2]
$\frac{e^{-x}\sin x}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \arctan \frac{2}{w^2}$

Figura 12.1: *Transformate Fourier cu cosinusuri (pentru funcții pare)*

[2] $u(t-a)$ este funcția Heaviside (eng. *unit step function*), definită prin:

$$u(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t > a \end{cases}$$

$f(x)$	$\widehat{f_s}(x) = \mathcal{F}_s(f)$
$\begin{cases} 1, & 0 < x < a \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$	$\frac{\sqrt{2}}{\pi}\left[\frac{1-\cos aw}{w}\right]$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{\sqrt{w}}$
$x^{-3/2}$	$2\sqrt{w}$
$x^{a-1}, 0 < a < 1$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\Gamma(a)}{w^a}\sin\frac{a\pi}{2}$
$e^{-ax}, a > 0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{w}{a^2+w^2}$
$\frac{e^{-ax}}{x}, a > 0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\arctan\frac{w}{a}$
$x^n e^{-ax}, a > 0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{n!}{(a^2+w^2)^{n+1}}\mathrm{Im}(a+iw)^{n+1}$
$xe^{-x^2/2}$	$we^{-w^2/2}$
$xe^{-ax^2}, a > 0$	$\frac{w}{(2a)^{3/2}}e^{-w^2/(4a)}$
$\begin{cases} \sin x, & 0 < x < a \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\sin a(1-w)}{1-w} - \frac{\sin a(1+w)}{1+w}\right]$
$\frac{\cos ax}{x}, a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}u(w-a)$
$\arctan 2ax, a > 0$	$\sqrt{2\pi}\frac{\sin aw}{w}e^{-aw}$

Figura 12.2: *Transformate Fourier cu sinusuri (pentru funcții impare)*

$f(x)$	$\widehat{f}(w) = \mathcal{F}(f)$
$\begin{cases} 1, & -b < x < b \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin bw}{w}$
$\begin{cases} 1, & b < x < c \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$	$\frac{e^{-ibw} - e^{-icw}}{iw\sqrt{2\pi}}$
$\frac{1}{x^2+a^2}, a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-a\|w\|}}{a}$
$\begin{cases} e^{-ax}, & x > 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}, a > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} a + iw$
$\begin{cases} e^{ax}, & b < x < c \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$	$\frac{e^{(a-iw)c} - e^{(a-iw)b}}{\sqrt{2\pi}(a-iw)}$
$\begin{cases} e^{iax}, & -b < x < b \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin b(w-a)}{w-a}$
$\begin{cases} e^{iax}, & b < x < c \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$	$\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ib(a-w)} - e^{ic(a-w)}}{a-w}$
$e^{-ax^2}, a > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-w^2/(4a)}$
$\frac{\sin ax}{x}, a > 0$	$\begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, & \|w\| < a \\ 0, & \|w\| > a \end{cases}$

Figura 12.3: *Transformate Fourier generale (pentru funcții arbitrare)*

SEMINAR 13

SUBIECTE EXAMEN

13.1 Examen AM2, 2017–2018

NR I

1. Determinați funcția olomorfă $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f = u + iv$, știind că:

$$\mathrm{Re} f = u(x, y) = x^2 - y^2 - 2y, \quad u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

și că $f(1) = 1$.

2. Să se calculeze integralele:
(a) Folosind teorema lui Cauchy:

$$\int_{|z|=3} e^z + \frac{z+8}{z-1} dz;$$

(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2+\cos t)^2} dt.$

3. Fie funcția:

$$f : \mathbb{C} - \{0, 2\} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{e^{2z}}{z^2(z-2)}.$$

Să se determine:

(a) $\mathrm{Rez}(f, 0), \mathrm{Rez}(f, 2)$;

(b) $\int_{|z-2|=3} f(z)dz.$

4. Să se determine soluția ecuației diferențiale, folosind transformata Laplace:

$$x'' - 4x' + 3x = 3t, \quad x(0) = 2, x'(0) = 3.$$

5. Să se rezolve ecuația integrală:

$$\varphi(t) = e^t + \int_0^t e^u \varphi(t-u)du.$$

NR 2.

1. Să se determine funcția olomorfă $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f = u + iv$, dacă:

$$\mathrm{Imf} = v(x,y) = x^3 - 3xy^2, \quad v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

și știind că $f(1) = 1$.

2. Să se calculeze integralele:
(a) Folosind teorema lui Cauchy:

$$\int_{|z|=3} z^2 + \frac{z+7}{z-2} dz.$$

(b) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 3t}{5 - 4\cos t} dt.$

3. Fie funcția:

$$f : \mathbb{C} - \{1,3\} \to \mathbb{C}, f(z) = \frac{e^z}{(z-1)(z-3)^2}.$$

Să se determine:

(a) $\mathrm{Rez}(f,1), \mathrm{Rez}(f,3);$

(b) $\displaystyle\int_{|z-3|=4} f(z)dz.$

4. Să se rezolve ecuația diferențială, folosind transformata Laplace:

$$x'' - 6x' + 5x = 4e^t, \quad x(0) = 2, x'(0) = -1.$$

5. Să se rezolve ecuația integrală:

$$\varphi(t) = t + 4\int_0^t \frac{t-u}{\varphi}(u)du.$$

13.2 Restanță AM2, 2017–2018

1. Rezolvați ecuațiile diferențiale:

(a) $y'' - 3y' + 2y = x + 1;$

(b) $x^2y'' - 5xy' + 9y = x, x > 0.$

2. Să se determine liniile de cîmp pentru:

$$\vec{V}(x,y,z) = yz\vec{i} + xz\vec{j} + (x+y)\vec{k}.$$

3. Să se aducă la forma canonică și să se rezolve ecuația:

$$\begin{cases} 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ u(x,0) & = x + 2 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) & = 3x^2 + 1. \end{cases}$$

4. Să se determine funcția olomorfă $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f = u + iv$ știind că $v = x^4 + 6x^2y^2 + y^4, f(1) = 1.$

5. Fie funcția complexă:

$$f : \mathbb{C} - \{-1, 1\} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^2(z-1)}.$$

(a) Să se calculeze $\mathrm{Rez}(f, 1), \mathrm{Rez}(f, -1)$;

(b) Să se calculeze $\displaystyle\int_{|z+1|=3} f(z)dz$.

6. Să se rezolve ecuația $x'' - 2x' - 5x = 16t \cdot e^t$, știind că $x(0) = 3, x'(0) = 4$.

7. Calculați integrala:

$$\int_{|z+1|=4} \left(z^2 + \frac{z+7}{z-2}\right) dz.$$

8. Calculați $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos\theta} d\theta$.

INDEX