INTEGRALE TRIPLE

- **Să se calculeze următoarele integrale triple** $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz$ **:**

1. Ω este mulțimea mărginită de planele $x=0$, $y=0$, $z=0$ și planul $\alpha: x+y+2z=2$, $f(x,y,z)=x+y+z$

2. $\Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+\frac{y^2}{4}\le 1,\ x^2+y^2\ge 1, x\ge 0, y\ge 0,\ 0\le z\le 5\right\}$, $f(x,y,z)=\frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}}$

3. Ω este mulțimea mărginită de cilindrul $x^2+y^2=a^2$ și planele $z=0$, $z=1$, $y=x$, $y=\sqrt{3}x$, $f(x,y,z)=xy$

- **Să se calculeze volumul mulțimilor Ω mărginite de suprafețele indicate (încercați să reprezentați grafic mulțimea a cărei volum se cere):**

4. $z=x^2+y^2$, $z=x+y$

5. $2x^2+y^2+z^2=1$, $2x^2+y^2-z^2=0$, $z\ge 0$

6. $z=x^2+y^2-1$, $z=2-x^2-y^2$

7. $z=4-x^2-y^2$, $2z=5+x^2+y^2$

8. $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2=\frac{1}{2}$

9. $x^2+y^2=1$, $z^2=x^2+y^2$, $z\ge 0$

10. $x^2+y^2+z^2=1$, $y^2+z^2=x^2$, $x\ge 0$

11. $x^2+y^2=z^2$, $x^2+y^2+z^2=2z$

12. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=2z$, $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=z^2$

13. $\left(x^2+y^2+z^2\right)^3=x$

14. $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=8x$

15. $\left(x^2+y^2\right)^3=z^2$, $z=0$, $z=8$

16. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$, $0\le z\le c$, $a,b,c>0$

Indicații și soluții:

1. Se determină punctele de intersecție ale planului α cu axele de coordonate și se obține $A(2,0,0)$, $B(0,2,0)$ și $C(0,0,1)$. Mulțimea de integrare este un tetraedru (se reprezintă grafic). Pentru variabila z avem $0 \le z \le \frac{1}{2}(2-x-y)$, deci :

$$\iiint_\Omega (x+y+z)\,dxdydz = \iint_D \left(\int_0^{\frac{1}{2}(2-x-y)} (x+y+z)\,dz \right) dxdy = \frac{1}{2}\iint_D \left(-\frac{3(x^2+y^2)}{4} - \frac{3}{2}xy + x + y + 1 \right) dxdy$$

Proiecția mulțimii de integrare pe planul xOy este triunghiul OAB, ecuația laturii AB fiind $x+y=2$ (se face $z=0$ în ecuația planului α sau se scrie ecuația unei drepte ce trece prin 2 puncte date). $D = pr_{xOy}\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \in [0,2]\ ,\ 0 \le y \le 2-x \right\}$, domeniu de tip intergrafic și avem:

$$\frac{1}{2}\iint_D (...)\,dxdy = \frac{1}{2}\int_0^2 \left(\int_0^{2-x} \left(-\frac{3(x^2+y^2)}{4} - \frac{3}{2}xy + x + y + 1 \right) dy \right) dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + 1 \right) dx = \frac{5}{12}.$$

2. $x^2 + \frac{y^2}{4} \le 1$ este interiorul unui cilindru eliptic, de semiaxe $a=1$ și $b=2$, cu axa de simetrie Oz; $x^2+y^2 \ge 1$ este exteriorul unui cilindru drept, cu secțiunea cerc de rază 1. Pentru variabila z avem $0 \le z \le 5$, deci : $\iiint_\Omega \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdydz = \iint_D \left(\int_0^5 \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dz \right) dxdy = \frac{25}{2}\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$.

$D = pr_{xOy}\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + \frac{y^2}{4} \le 1\ ,\ x^2+y^2 \ge 1, x \ge 0\ , y \ge 0 \right\}$, $x^2 + \frac{y^2}{4} \le 1$ este interiorul elipsei de semiaxe $a=1$ și $b=2$ iar $x^2+y^2 \ge 1$ este exteriorul cercului cu centrul în origine și rază 1. Din cele 2 inecuații și din condițiile $x \ge 0$, $y \ge 0$ se determină $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \in [0,1], \sqrt{1-x^2} \le y \le 2\sqrt{1-x^2} \right\}$ (domeniu de tip intergrafic) și avem:

$$\frac{25}{2}\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy = \frac{25}{2}\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{2\sqrt{1-x^2}} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy \right) dx = \frac{25}{2}\int_0^1 \sqrt{4-3x^2}\,dx - \frac{25}{2} = (...) = \frac{25}{12\sqrt{3}}\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)$$

3. Pentru variabila z avem $0 \le z \le 1$, deci : $\iiint_\Omega xy\,dxdydz = \iint_D \left(\int_0^1 xy\,dz \right) dxdy = \iint_D xy\,dxdy$. După ce se reprezintă grafic mulțimea Ω (atenție, $y=x$ și $y=\sqrt{3}x$ sunt plane!), se observă că $D = pr_{xOy}\Omega = 2A$, unde A este sectorul de cerc de rază a, cuprins între dreptele de ecuații $y=x$ și $y=\sqrt{3}x$ pentru $x \ge 0$. Se trece la coordonate polare cu $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, jacobianul $J=r$, cu $r \in [0,a]$ și $t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$ (domeniu de tip dreptunghi). Obținem: $\iint_D xy\,dxdy = 2\int_0^a \left(\int_{\pi/4}^{\pi/3} r^3 \sin t \cos t\,dt \right) dr = (...) = \frac{a^4}{16}$

<u>*Variantă de rezolvare*</u>: După ce se reprezintă grafic domeniul de integrare Ω, se poate trece direct la coordonate cilindrice: $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $z = z$, jacobianul $J=r$, cu $r \in [0,a]$, $t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$ și $z \in [0,1]$. Se obține : $\iiint_\Omega xy\,dxdydz = 2\int_0^a \left(\int_{\pi/4}^{\pi/3} \left(\int_0^1 r^3 \sin t \cos t\,dz \right) dt \right) dr = (...) = \frac{a^4}{16}$.

4. $z=x^2+y^2$ este paraboloid eliptic cu vârful în $O(0,0,0)$ și axa de simetrie Oz; $z=x+y$ este un plan ce trece prin origine și nu intersectează axele de coordonate în alt punct (se verifică acest lucru prin calcul). Mulțimea Ω este ”deasupra” paraboloidului și ”sub” plan (ceea ce înseamnă că pentru variabila z avem $x^2+y^2\le z\le x+y$), deci: $V=\iint_D\left(\int_{x^2+y^2}^{x+y}dz\right)dxdy=\iint_D\left(x+y-x^2-y^2\right)dxdy$. Pentru a obține $D=pr_{xOy}\Omega$ se ”elimină” z din ecuațiile inițiale și avem $x^2+y^2=x+y$, adică $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ (cerc cu centrul în $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ și rază $\frac{1}{\sqrt{2}}$, deci D este domeniul situat în interiorul acestui cerc: $D=pr_{xOy}\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\le\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}$. Se trece la coordonate polare cu $x=\frac{1}{2}+r\cos t$, $y=\frac{1}{2}+r\sin t$, jacobianul $J=r$, cu $r\in\left[0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ și $t\in[0,2\pi]$.

Obținem: $V=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(-r^3+\frac{r}{2}\right)dr\right)dt=(...)=\frac{\pi}{8}$.

5. $2x^2+y^2+z^2=1$ se rescrie în forma $\frac{x^2}{\left(1/\sqrt{2}\right)^2}+y^2+z^2=1$ și este ecuația unui elipsoid; $2x^2+y^2-z^2=0$ se rescrie în forma $\frac{x^2}{\left(1/\sqrt{2}\right)^2}+y^2-z^2=0$ și este ecuația unui con eliptic, cu deschidere ”în sus” pentru $z\ge 0$. Mulțimea Ω este ”deasupra” conului și ”sub” elipsoid (ceea ce înseamnă că pentru variabila z avem $\sqrt{2x^2+y^2}\le z\le\sqrt{1-2x^2-y^2}$), deci: $V=\iint_D\left(\sqrt{1-2x^2-y^2}-\sqrt{2x^2+y^2}\right)dxdy$. Pentru a obține $D=pr_{xOy}\Omega$ se ”elimină” z din ecuațiile inițiale și obținem elipsa de ecuație $\frac{x^2}{(1/2)^2}+\frac{y^2}{\left(1/\sqrt{2}\right)^2}=1$, adică $D=pr_{xOy}\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,\frac{x^2}{(1/2)^2}+\frac{y^2}{\left(1/\sqrt{2}\right)^2}\le 1\right\}$. Se trece la coordonate polare generalizate cu $x=\frac{1}{2}r\cos t$, $y=\frac{1}{\sqrt{2}}r\sin t$, jacobianul $J=\frac{r}{2\sqrt{2}}$, cu $r\in[0,1]$ și $t\in[0,2\pi]$. Obținem: $V=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\left(\frac{r}{2\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{r^2}{2}}-\frac{r^2}{4}\right)dr\right)dt=(...)=\frac{\pi\left(\sqrt{2}-1\right)}{3}$.

6. $z=x^2+y^2-1$ se rescrie în forma $x^2+y^2=z+1$ și este ecuația unui paraboloid eliptic, cu vârful în $A(0,0,-1)$, deschidere ”în sus”, axă de simetrie Oz; $z=2-x^2-y^2$ se rescrie în forma $x^2+y^2=\frac{z-2}{-1}$ și este ecuația unui paraboloid eliptic, cu vârful în $B(0,0,2)$, deschidere ”în jos”, axă de simetrie Oz. Mulțimea Ω este situată între cei doi paraboloizi (ceea ce înseamnă că pentru variabila z avem $x^2+y^2-1\le z\le 2-x^2-y^2$), deci: $V=\iint_D\left(\int_{x^2+y^2-1}^{2-x^2-y^2}dz\right)dxdy=\iint_D\left(3-2x^2-2y^2\right)dxdy$. Pentru a obține $D = pr_{xOy}\Omega$ se "elimină" z din ecuațiile inițiale și obținem cercul de ecuație $x^2 + y^2 = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2$,

adică $D = pr_{xOy}\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + y^2 \le \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 \right\}$. Se trece la coordonate polare cu $x = r\cos t$,

$y = r\sin t$, $J = r$, cu $r \in \left[0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$ și $t \in [0, 2\pi]$. Obținem: $V = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} (3r - 2r^3)\, dr \right) dt = (...) = \frac{9\pi}{4}$.

7. $z = 4 - x^2 - y^2$ se rescrie în forma $x^2 + y^2 = \frac{z-4}{-1}$ și este ecuația unui paraboloid eliptic, cu vârful în $A(0,0,4)$, deschidere "în jos", axă de simetrie Oz; $2z = 5 + x^2 + y^2$ se rescrie în forma $x^2 + y^2 = \frac{z - 5/2}{1/2}$ și este ecuația unui paraboloid eliptic, cu vârful în $B(0,0,5/2)$, deschidere "în sus", axă de simetrie Oz. Mulțimea Ω este situată între cei doi paraboloizi: $V = \iint\limits_D \left(\int_{\frac{5+x^2+y^2}{2}}^{4-x^2-y^2} dz \right) dxdy = \frac{1}{2} \iint\limits_D (3 - 3x^2 - 3y^2)\, dxdy$. Pentru a obține $D = pr_{xOy}\Omega$ se "elimină" z din ecuațiile inițiale și obținem cercul de ecuație $x^2 + y^2 = 1$, adică $D = pr_{xOy}\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + y^2 \le 1 \right\}$.
Se trece la coordonate polare cu $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $J = r$, cu $r \in [0,1]$ și $t \in [0, 2\pi]$. Obținem: $V = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (r - r^3)\, dr \right) dt = (...) = \frac{3\pi}{4}$.

8. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ este sfera centrată în origine, de rază 1; $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ se rescrie în forma $\frac{x^2}{(1/\sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{(1/\sqrt{2})^2} = 1$ și este ecuația unui cilindru eliptic, cu secțiunea cerc, de rază $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Volumul mulțimii formate "în exteriorul" cilindrului și "în interiorul" sferei nu se poate calcula direct; Considerăm mulțimea Ω formată în interiorul cilindrului (și mărginită de cele două calote ale sferei). Datorită simetriei mulțimii Ω (reiese cu ușurință din reprezentarea grafică) vom considera pentru variabila z domeniul $0 \le z \le \sqrt{1 - x^2 - y^2}$), deci : $V = 2\iint\limits_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dxdy$. $D = pr_{xOy}\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + y^2 \le \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \right\}$.

Se trece la coordonate polare cu $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $J = r$, cu $r \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ și $t \in [0, 2\pi]$. Obținem:

$V = 2\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(r\sqrt{1 - r^2}\right) dr \right) dt = (...) = \frac{\pi\left(4 - \sqrt{2}\right)}{3}$. Dacă se cere explicit volumul mulțimii formate "în exteriorul" cilindrului și "în interiorul" sferei, se va determina ca diferență între volumul sferei și volumul calculat mai sus (va rezulta $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$).

9. $x^2 + y^2 = 1$ este cilindru eliptic, cu secțiunea cerc, de rază 1; $z^2 = x^2 + y^2$ se rescrie în forma $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ și este ecuația unui con eliptic, cu secțiunea cerc, axa de simetrie Oz. Mulțimea Ω este situată în interiorul cilindrului și în exteriorul conului, deasupra planului $z = 0$ (cele 2 suprafețe se intersectează după un plan de ecuație $z = 1$). Astfel, pentru variabila z avem domeniul $0 \le z \le \sqrt{x^2 + y^2}$, deci: $V=\iint\limits_D\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$. $D=pr_{xOy}\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,x^2+y^2\le 1\right\}$. Se trece la coordonate polare cu $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, $J=r$, cu $r\in[0,1]$ și $t\in[0,2\pi]$. Obținem: $V=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 r^2\,dr\right)dt=(...)=\dfrac{2\pi}{3}$.

10. $x^2+y^2+z^2=1$ este sfera centrată în origine, de rază 1; $y^2+z^2-x^2=0$ este ecuația unui con eliptic, cu secțiunea cerc, axa de simetrie Ox. Volumul mulțimii formate ”în exteriorul” conului și ”în interiorul” sferei nu se poate calcula direct; Considerăm mulțimea Ω formată în interiorul conului și în interiorul calotei sferice (”cornetul cu înghețată”). Pentru variabila x avem domeniul $\sqrt{z^2+y^2}\le x\le\sqrt{1-z^2-y^2}$), deci :

11. $V=\iint\limits_D\left(\int_{\sqrt{z^2+y^2}}^{\sqrt{1-z^2-y^2}}dx\right)dydz=\iint\limits_D\left(\sqrt{1-z^2-y^2}-\sqrt{z^2+y^2}\right)dydz$

$D=pr_{yOz}\Omega=\left\{(y,z)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,z^2+y^2\le\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}$; Coordonate polare cu $y=r\cos t$, $z=r\sin t$, $J=r$, cu $r\in\left[0,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$ și $t\in[0,2\pi]$. Obținem: $V=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(r\sqrt{1-r^2}-r^2\right)dr\right)dt=(...)=\dfrac{2\pi\left(\sqrt{2}-1\right)}{3\sqrt{2}}$. Dacă se cere explicit volumul mulțimii formate ”în exteriorul” conului și ”în interiorul” sferei, se va determina ca diferență între volumul semisferei (avem în enunț $x\ge 0$) și volumul calculat mai sus.

12. $x^2+y^2=z^2$ este un con eliptic, secțiunea cerc, axa de simetrie Oz; $x^2+y^2+z^2=2z$ se rescrie sub forma $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ și este ecuația unei sfere centrate în $A(0,0,1)$ și raza 1. Mulțimea Ω este în interiorul sferei și în exteriorul conului (cele 2 suprafețe se intersectează după un plan de ecuație $z=1$). ATENȚIE !!!! Pentru variabila z ”de pe sferă” vom avea $z=1-\sqrt{1-x^2-y^2}$ deoarece z este situat sub planul median al sferei, deci avem domeniul $1-\sqrt{1-x^2-y^2}\le z\le\sqrt{x^2+y^2}$) și $V=\iint\limits_D\left(\int_{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{x^2+y^2}}dz\right)dxdy=\iint\limits_D\left(\sqrt{x^2+y^2}-1+\sqrt{1-x^2-y^2}\right)dxdy$;

$D=pr_{xOy}\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,x^2+y^2\le 1\right\}$. Se trece la coordonate polare cu $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, $J=r$, cu $r\in[0,1]$ și $t\in[0,2\pi]$. Obținem: $V=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\left(r\sqrt{1-r^2}+r^2-r\right)dr\right)dt=(...)=\dfrac{\pi}{3}$.

13. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=2z$ se rescrie în forma $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=\dfrac{z}{1/2}$ și este un paraboloid eliptic, cu deschiderea ”în sus”, axa de simetrie Oz; $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=z^2$ este ecuația unui con eliptic, axa de simetrie Oz. Mulțimea Ω este situată ”deasupra” paraboloidului și ”sub” con. Astfel $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\right)\le z\le\sqrt{\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}}$, deci:

$V=\iint\limits_D\left(\sqrt{\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\right)\right)dxdy$ iar $D=pr_{xOy}\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{36}\le 1\right\}$ (interiorul unei elipse). Se trece la coordonate polare generalizate cu $x=4r\cos t$, $y=6r\sin t$, $J=24r$, cu $r\in[0,1]$ și $t\in[0,2\pi]$. Obținem: $V=(...)=48\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\left(r^2-r^3\right)dr\right)dt=(...)=8\pi$.

14. Mulțimea Ω nu se poate reprezenta grafic. Datorită formei ecuației lui Ω, folosim direct trecerea la coordonate sferice cu $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$, $J = r^2\sin\theta$. Domeniile pentru r,θ,φ se stabilesc după verificarea ecuației lui Ω, prin înlocuirea cu coordonate sferice. Ecuația lui Ω devine astfel $r^6 = r\sin\theta\cos\varphi$, de unde se impune condiția $\sin\theta\cos\varphi \geq 0$, adică $\theta \in [0,\pi]$ și $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ și $r = \sqrt[5]{\sin\theta\cos\varphi}$, deci $r \in \left[0,\sqrt[5]{\sin\theta\cos\varphi}\right]$. Se obține

$$V = \int_0^{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\sqrt[5]{\sin\theta\cos\varphi}} r^2\sin\theta dr\right)d\varphi d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{8}{5}}\theta\cos^{\frac{3}{5}}\varphi d\varphi\right)d\theta =$$

$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi}\sin^{\frac{8}{5}}\theta\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{3}{5}}\varphi d\varphi\right)d\theta$. Calculăm separat cele 2 integrale (conform teoremei Fubini).

Fie $A_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{3}{5}}\varphi d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{3}{5}}\varphi d\varphi$. Vom face schimbarea de variabilă $\sin^2\varphi = y$, cu $\cos\varphi d\varphi = \frac{1}{2\sqrt{y}}dy$, cu $y \in [0,1]$, pentru a pune în evidență o integrală de tip Beta. Scriem

$$\cos^{\frac{3}{5}}\varphi = \sqrt[5]{\left(1-\sin^2\varphi\right)\cos\varphi} = \sqrt[5]{(1-y)}\cdot\sqrt[5]{\left(1-\sin^2\varphi\right)^{\frac{1}{2}}} = (...) = \sqrt[5]{(1-y)}\cdot\sqrt[10]{1-y} = (1-y)^{\frac{3}{10}},$$

$d\varphi = \frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{\cos\varphi}dy$, deci $d\varphi = \frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y}}dy$. Integrala A_1 devine:

$A_1 = 2\int_0^1 (1-y)^{\frac{3}{10}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y}}dy = \int_0^1 (1-y)^{-\frac{1}{5}}\cdot y^{-\frac{1}{2}}dy = B\left(\frac{4}{5},\frac{1}{2}\right)$. Similar se calculează integrala $A_2 = \int_0^{\pi}\sin^{\frac{8}{5}}\theta d\theta$ și se obține $A_2 = \frac{1}{2}B\left(\frac{13}{10},\frac{1}{2}\right)$. În final avem:

$$V = \frac{1}{6}B\left(\frac{4}{5},\frac{1}{2}\right)\cdot B\left(\frac{13}{10},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{13}{10}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{13}{10}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{5}\right)} = (...) = \frac{5\pi}{24}.$$

15. Mulțimea Ω nu se poate reprezenta grafic. Datorită formei ecuației lui Ω, folosim direct trecerea la coordonate sferice cu $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$, $J = r^2\sin\theta$. Domeniile pentru r,θ,φ se stabilesc după verificarea ecuației lui Ω, prin înlocuirea cu coordonate sferice. Ecuația lui Ω devine astfel $r^4 = 8r\sin\theta\cos\varphi$, de unde se impune condiția $\sin\theta\cos\varphi \geq 0$, adică $\theta \in [0,\pi]$ și $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ și $r = 2\sqrt[3]{\sin\theta\cos\varphi}$, deci $r \in \left[0,2\sqrt[3]{\sin\theta\cos\varphi}\right]$. Se obține

$$V = \int_0^{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\sqrt[3]{\sin\theta\cos\varphi}} r^2\sin\theta dr\right)d\varphi d\theta = (...) = \frac{8\pi}{3}.$$

16. Mulțimea Ω nu se poate reprezenta grafic. Datorită formei ecuației lui Ω, folosim direct trecerea la coordonate cilindrice cu $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $z = z$, $J = r$. Ecuația lui Ω devine $r^6 = z^2$, cu $z \in [0,8]$, deci $r \in [0,2]$ și $t \in [0,2\pi]$. Se obține $V = \int_0^{2\pi}\int_0^2\left(\int_0^8 rdz\right)dr\,dt = (...) = 32\pi$.

17. Mulțimea Ω este un con eliptic (deschidere ”în sus”). Trecem direct la coordonate cilindrice generalizate cu $x = a\cdot r\cos t$, $y = b\cdot r\sin t$, $z = z$, $J = r$ și $z\in[0,c]$. Ecuația lui Ω devine $r = \frac{z}{c}$, deci $r\in\left[0,\frac{z}{c}\right]$ și $t\in[0,2\pi]$. Se obține $V = \int_0^{2\pi}\int_0^{c}\left(\int_0^{\frac{z}{c}} abr\,dr\right)dz\,dt = (...) = abc\frac{\pi}{3}$.