INTEGRALE DE SUPRAFAȚĂ

1. Să se determine aria suprafeței din planul $3x+4y-z+2=0$ care are ca proiecție pe planul xOy deptunghiul $[0,5]\times[1,4]$.

2. Să se determina aria suprafeței de ecuație $z=x^2+2y$ care are ca proiecție pe planul xOy triunghiul de vârfuri $(0,0)$, $(1,0)$ și $(1,1)$.

3. Să se determine aria suprafeței din planul $2x+5y+z=10$ care se află în interiorul cilindrului de ecuație $x^2+y^2=9$.

4. Calculați aria suprafeței din paraboloidul $z=x^2+y^2$ care se află sub planul de ecuație $z=h$, $h>0$.

5. Determinați aria suprafeței din paraboloidul $z=4-x^2-y^2$ care se află deasupra planului xOy.

6. Să se determine aria suprafeței din paraboloidul hiperbolic $z=y^2-x^2$ care se află între cilindrii de ecuații $x^2+y^2=1$ și $x^2+y^2=4$.

7. Să se calculeze $\iint\limits_S y\,d\sigma$, unde S este suprafața paraboloidului $y=x^2+z^2$ situată în interiorul cilindrului $x^2+z^2=4$.

8. Să se calculeze $\iint\limits_S x^2\,d\sigma$, unde S este suprafața sferei $x^2+y^2+z^2=1$.

9. Să se determine aria suprafeței de pe sfera $x^2+y^2+z^2=1$, aflată în interiorul conului $x^2+y^2=z^2$.

10. Să se determine aria suprafeței din conul $z=\sqrt{x^2+y^2}$ care se află în interiorul cilindrului de ecuație $x^2+y^2=2x$.

11. Calculați $\int\limits_S xy\,dy\wedge dz+yz\,dz\wedge dx+(x+y)\,dx\wedge dy$, unde S este suprafața definită prin: $S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2=a^2\,,\, x>0\,,\, y>0\,,\, 0<z<h\right\}$.

12. Determinați fluxul câmpului vectorial $\vec{V}=x\cdot\vec{i}-z\cdot\vec{j}+y\cdot\vec{k}$ prin suprafața S din primul octant, delimitată de sfera de ecuație $x^2+y^2+z^2=4$, cu orientarea către interior.

13. Determinați fluxul câmpului vectorial $\vec{V}=0\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}-z\cdot\vec{k}$ prin suprafața S (închisă) delimitată de paraboloidul de ecuație $y=x^2+z^2$ cu $0\le y\le 1$ și discul $x^2+z^2\le 1$, din planul $y=1$.

Indicații și răspunsuri

1. Suprafața (din planul dat) se parametrizează cartezian, $r(x,y)=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+(3x+4y+2)\cdot\vec{k}$, $\overrightarrow{N}=(-3,-4,1)$ iar $\|\vec{N}\|=\sqrt{26}$ iar $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[0,5],\, y\in[1,4]\}$. Astfel:

$$aria(S)=\iint_D \sqrt{26}\,dxdy=\int_0^5\left(\int_1^4\sqrt{26}dy\right)dx=15\sqrt{26}.$$

2. Suprafața se parametrizează cartezian, $r(x,y)=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+(x^2+2y)\cdot\vec{k}$, $\overrightarrow{N}=(-2x,-2,1)$ iar $\|\vec{N}\|=\sqrt{5+4x^2}$, D este triunghiul din planul xOy de vârfuri $(0,0)$, $(1,0)$ și $(1,1)$ (reprezentați grafic !). Astfel, $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[0,1],\, 0\le y\le x\}$ (integrafic). Se obține :

$$aria(S)=\iint_D \sqrt{5+4x^2}\,dxdy=\int_0^1\left(\int_0^x\sqrt{5+4x^2}dy\right)dx=(...)=\frac{1}{12}\left(27-5\sqrt{5}\right).$$

3. Suprafața se parametrizează cartezian, $r(x,y)=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+(-2x-5y+10)\cdot\vec{k}$, $\overrightarrow{N}=(2,5,1)$ iar $\|\vec{N}\|=\sqrt{30}$, $D=pr_{xOy}S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 9\}$ este discul cu centrul în origine, de rază 3. Se trece la coordonate polare: $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, jacobianul este $J=r$, $r\in[0,3]$ și $t\in[0,2\pi]$. Se obține:

$$aria(S)=\iint_D \sqrt{30}\,dxdy=\sqrt{30}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^3 r\,dr\right)dt=(...)=9\pi\sqrt{30}.$$

4. Suprafața se parametrizează cartezian, $r(x,y)=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+(x^2+y^2)\cdot\vec{k}$, $\overrightarrow{N}=(-2x,-2y,1)$ iar $\|\vec{N}\|=\sqrt{1+4x^2+4y^2}$, $D=pr_{xOy}S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le h\}$ este discul cu centrul în origine, de rază h. Se trece la coordonate polare: $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, $J=r$, $r\in\left[0,\sqrt{h}\right]$ și $t\in[0,2\pi]$;

$$aria(S)=\iint_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\sqrt{h}}\sqrt{1+4r^2}\cdot r\,dr\right)dt=(...)=\frac{\pi}{6}\left(\sqrt{(1+4h)^3}-1\right).$$

5. Suprafața se parametrizează cartezian, $r(x,y)=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+(4-x^2-y^2)\cdot\vec{k}$, $\overrightarrow{N}=(2x,2y,1)$ iar $\|\vec{N}\|=\sqrt{1+4x^2+4y^2}$, $D=pr_{xOy}S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 4\}$ este discul cu centrul în origine, de rază 2. Se trece la coordonate polare: $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, $J=r$, $r\in[0,2]$ și $t\in[0,2\pi]$. Se obține:

$$aria(S)=\iint_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^2\sqrt{1+4r^2}\cdot r\,dr\right)dt=(...)=\frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17}-1\right).$$

6. Suprafața se parametrizează cartezian, $r(x,y)=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+(y^2-x^2)\cdot\vec{k}$, $\overrightarrow{N}=(2x,-2y,1)$ iar $\|\vec{N}\|=\sqrt{1+4x^2+4y^2}$, $D=pr_{xOy}S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\le x^2+y^2\le 4\}$ este coroana circulară cu centrul în origine, cuprinsă între discurile de rază 1 și 2. Se trece la coordonate polare: $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, $J=r$ $r\in[1,2]$ și $t\in[0,2\pi]$. Se obține:

$$aria(S)=\iint_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy=\int_0^{2\pi}\left(\int_1^2\sqrt{1+4r^2}\cdot r\,dr\right)dt=(...)=\frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17}-5\sqrt{5}\right).$$

7. Conform ecuațiilor, axa de simetrie a paraboloidului și a cilindrului este Oy. Suprafața (paraboloidului) se parametrizează cartezian, $r(x,y)=x\cdot\vec{i}+(x^2+z^2)\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$, $\overrightarrow{N}=(2x,-1,2z)$ iar

$\left\|\vec{N}\right\| = \sqrt{1+4x^2+4z^2}$ și avem: $\iint\limits_S y\,d\sigma = \iint\limits_D \left(x^2+z^2\right)\sqrt{1+4x^2+4z^2}\,dxdz$.

$D = pr_{xOz}S = \left\{(x,z)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+z^2 \le 4\right\}$ este discul cu centrul în origine, de rază 2. Se trece la coordonate polare: $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $J = r$, $r\in[0,2]$ și $t\in[0,2\pi]$. Se obține:

$\iint\limits_D \left(x^2+z^2\right)\sqrt{1+4x^2+4z^2}\,dxdz = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^2 \sqrt{1+4r^2}\cdot r^3\,dr\right)dt$. Se calculează $\int_0^2 \sqrt{1+4r^2}\cdot r^3\,dr$ cu schimbarea de variabilă $u = 4r^2+1$, $du = 8r\,dr$ iar capetele integralei devin $u=1$ și $u=17$. Se obține în final: $\iint\limits_S y\,d\sigma = \frac{\pi}{60}\left(391\sqrt{17}+1\right)$.

8. Raza sferei este 1, se parametrizează suprafața sferei folosind coordonatele sferice: $x = \sin\theta\cos\varphi$, $y = \sin\theta\sin\varphi$, $z = \cos\theta$, $\theta\in[0,\pi]$ și $\varphi\in[0,2\pi]$. Parametrizarea este $r(\theta,\varphi) = \sin\theta\cos\varphi\cdot\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\cdot\vec{j} + \cos\theta\cdot\vec{k}$. Vectorii tangenți sunt :

$$r_\theta = \frac{\partial r}{\partial\theta} = \frac{\partial x}{\partial\theta}\cdot\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial\theta}\cdot\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial\theta}\cdot\vec{k} = \cos\theta\cos\varphi\cdot\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\cdot\vec{j} - \sin\theta\cdot\vec{k}$$

$r_\varphi = \frac{\partial r}{\partial\varphi} = \frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\vec{k} = -\sin\theta\sin\varphi\cdot\vec{i} + \sin\theta\cos\varphi\cdot\vec{j} + 0\cdot\vec{k}$. Vectorul normal este:

$$\overrightarrow{N}(\theta,\varphi) = r_\theta \times r_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = \sin^2\theta\cos\varphi\cdot\vec{i} + \sin^2\theta\sin\varphi\cdot\vec{j} + \sin\theta\cos\theta\cdot\vec{k}$$

cu norma $\left\|\vec{N}\right\| = \sin\theta$. Obținem în final:

$$\iint\limits_S x^2\,d\sigma = \iint\limits_D (\sin\theta\cos\varphi)^2\sin\theta\,d\theta d\varphi = \int_0^\pi\left(\int_0^{2\pi}\sin^3\theta\cos^2\varphi\,d\varphi\right)d\theta = (...) = \frac{4\pi}{3}.$$

9. Suprafața cerută este formată din două suprafețe identice (faceți reprezentarea grafică !), deci vom putea considera pentru calcule doar suprafața corespunzătoare lui $z\ge 0$ iar la final vom înmulți aria obținută cu 2. Fie S_1 suprafața cerută, pentru $z\ge 0$. Ecuația semisferei pozitive se poate scrie $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$, deci putem parametriza cartezian și avem: $r(x,y) = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + \left(\sqrt{1-x^2-y^2}\right)\cdot\vec{k}$,

$\overrightarrow{N} = \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, 1\right)$ iar $\left\|\vec{N}\right\| = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$. $D = pr_{xOy}S_1 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2 \le \frac{1}{2}\right\}$ este discul cu centrul în origine, de rază $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Trecem la coordonate polare: $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $J = r$, $r\in\left[0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ și $t\in[0,2\pi]$. Se obține:

$aria(S_1) = 2\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dxdy = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\cdot r\,dr\right)dt = (...) = \pi\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$. Aria suprafeței cerute este $aria(S) = 2\pi\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$.

10. Suprafața se parametrizează cartezian, $r(x,y)=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\cdot\vec{k}$,

$\overrightarrow{N}=\left(\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}},\dfrac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}},1\right)$ iar $\left\|\overrightarrow{N}\right\|=\sqrt{2}$, $D=pr_{xOy}S=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,(x-1)^2+y^2\le 1\right\}$ este discul cu centrul în $(1,0)$, de rază 1. Se trece la coordonate polare: $x=1+r\cos t$, $y=r\sin t$, $J=r$, $r\in[0,1]$ și $t\in[0,2\pi]$. Se obține: $aria(S)=\iint_D\sqrt{2}\,dxdy=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 r\,dr\right)dt=\sqrt{2}\pi$.

11. Avem o integrală de suprafață de speța a doua, cu $P(x,y,z)=xz$, $Q(x,y,z)=yz$ și $R(x,y,z)=x+y$. Îi asociem, în mod canonic, câmpul vectorial $\vec{V}=(P,Q,R)$, adică $\vec{V}=P\cdot\vec{i}+Q\cdot\vec{j}+R\cdot\vec{k}=xz\cdot\vec{i}+yz\cdot\vec{j}+(x+y)\cdot\vec{k}$. Parametrizăm suprafața (cilindru) folosind coordonate cilindrice: $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=z$, cu $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ și $z\in(0,h)$, deci parametrizarea este: $r(t,z)=a\cos t\cdot\vec{i}+a\sin t\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$ iar câmpul vectorial devine:

$\vec{V}=P\cdot\vec{i}+Q\cdot\vec{j}+R\cdot\vec{k}=az\cos t\cdot\vec{i}+az\sin t\cdot\vec{j}+a(\sin t+\cos t)\cdot\vec{k}$. Vectorii tangenți sunt $r_t=\dfrac{\partial r}{\partial t}=-a\sin t\cdot\vec{i}+a\sin t\cdot\vec{j}+0\cdot\vec{k}$ și $r_z=\dfrac{\partial r}{\partial z}=0\cdot\vec{i}+0\cdot\vec{j}+1\cdot\vec{k}$. Vectorul normal este:

$\overrightarrow{N}(t,z)=r_t\times r_z=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -a\sin t & a\cos t & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=a\cos t\cdot\vec{i}+a\sin t\cdot\vec{j}+0\cdot\vec{k}$. Produsul scalar este:

$\vec{V}\cdot\overrightarrow{N}=za^2\cos^2 t+za^2\sin^2 t+0=za^2$, deci:

$$\int_S P\,dy\wedge dz+Q\,dz\wedge dx+R\,dx\wedge dy=\iint_S\overrightarrow{V}\cdot\vec{n}\;d\sigma=\iint_D\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{N}\;dt\,dz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^h za^2\,dz\right)dt=(\dots)=\frac{a^2h^2}{4}\pi.$$

12. Suprafața din primul octant corespunde valorilor $x\ge 0$, $y\ge 0$ și $z\ge 0$, deci putem folosi parametrizarea carteziană $r(x,y)=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+\left(\sqrt{4-x^2-y^2}\right)\cdot\vec{k}$ iar câmpul vectorial se rescrie astfel: $\vec{V}=x\cdot\vec{i}-\sqrt{4-x^2-y^2}\cdot\vec{j}+y\cdot\vec{k}$. Deoarece s-a specificat *orientarea către interior*, avem $\overrightarrow{N}=-\left(\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}},\dfrac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}},1\right)=\left(\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}},\dfrac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}},-1\right)$. Produsul scalar este:

$\vec{V}\cdot\vec{N}=\dfrac{-x^2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$. $D=pr_{xOy}S=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,x^2+y^2\le 4,\,x\ge 0,\,y\ge 0\right\}$ este sfertul de disc cu centrul în origine, de rază 2. Se trece la coordonate polare: $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, $J=r$, $r\in[0,2]$ și $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Se obține: $\iint_S\overrightarrow{V}\cdot\vec{n}\;d\sigma=\iint_D\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{N}\;dx\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\left(\int_0^2\dfrac{-r^3}{\sqrt{4-r^2}}dr\right)dt$. Se calculează $\int_0^2\dfrac{-r^3}{\sqrt{4-r^2}}dr$ cu schimbarea de variabilă $u=4-r^2$, $du=-2r\,dr$, iar capetele integralei devin $u=4$ și $u=0$ (atenție că va fi nevoie de inversaea capetelor, deci mai apare un ”-” în fața integralei). Se obține în final:

$$\iint_S \vec{V}\cdot\vec{n}\ d\sigma = -\frac{4\pi}{3}.$$

13. Suprafața este închisă, formată din 2 suprafețe (S_1 suprafața paraboloidului și S_2 suprafața discului din planul $y=1$). Simetria paraboloidului este față de axa Oy iar orientarea normalei este în exterior (convenția pentru suprafețe închise). Pentru S_1 parametrizăm cartezian dar ATENȚIE! $y = g(x,z) = x^2 + z^2$, deci vom avea $r(x,z) = x\cdot\vec{i} + (x^2+z^2)\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k}$ iar câmpul vectorial se rescrie astfel: $\vec{V} = 0\cdot\vec{i} + (x^2+z^2)\cdot\vec{j} - z\cdot\vec{k}$. Pentru calcularea normalei $\vec{N_1}$ la S_1 direct cu formulă, aceasta trebuie ”adaptată”, în sensul folosirii derivatelor parțiale ale lui y și nu ale lui z (formula corectă în acest caz este $\vec{N_1} = -(-p,1,-q)$, cu $p = \frac{\partial g}{\partial x}$ și $q = \frac{\partial g}{\partial z}$, semnul ”-” apare datorită orientării ”în jos”, adică ”în exterior” pentru paraboloid). O altă variantă ar fi calcularea vectorilor tangenți și apoi a normalei (în acest caz NU mai este necesară schimbarea semnului, se obține direct orientarea ”în exterior”). Se obține $\overrightarrow{N_1} = 2x\cdot\vec{i} - 1\cdot\vec{j} + 2z\cdot\vec{k}$ iar produsul scalar este: $\vec{V}\cdot\vec{N_1} = -x^2 - 3z^2$. $D_1 = pr_{xOz}S_1 = \left\{(x,z)\in\mathbb{R}^2 \middle| x^2+z^2\le 1\right\}$ este discul cu centrul în origine, de rază 1. Se trece la coordonate polare: $x = r\cos t$, $z = r\sin t$, $J = r$, $r\in[0,1]$ și $t\in[0,2\pi]$. Se obține:

$$\iint_{S_1} \vec{V}\cdot\overrightarrow{n_1}\ d\sigma_1 = \iint_{D_1} \vec{V}\cdot\overrightarrow{N_1}\ dx\,dz = \int_0^{2\pi}\left(1+2\sin^2 t\right)\left(\int_0^1 -r^3dr\right)dt = (...) = -\pi .$$

Pentru S_2 folosim din nou parametrizarea carteziană, cu $x = x$, $y = g(x,z) = 1$ și $z = z$, deci $r(x,z) = x\cdot\vec{i} + 1\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k}$ iar câmpul vectorial se rescrie astfel: $\vec{V} = 0\cdot\vec{i} + 1\cdot\vec{j} - z\cdot\vec{k}$. Avem $\vec{N_2} = (-p,1,-q) = (0,1,0)$, adică $\overrightarrow{N_2} = 0\cdot\vec{i} + 1\cdot\vec{j} + 0\cdot\vec{k}$ iar produsul scalar este: $\vec{V}\cdot\vec{N_2} = 1$. $D_2 = \left\{(x,z)\in\mathbb{R}^2 \middle| x^2+z^2\le 1\right\}$ este dat în enunț. Se trece la coordonate polare: $x = r\cos t$, $z = r\sin t$, $J = r$, $r\in[0,1]$ și $t\in[0,2\pi]$. Se obține: $\iint_{S_2} \vec{V}\cdot\overrightarrow{n_2}\ d\sigma_2 = \iint_{D_2} \vec{V}\cdot\overrightarrow{N_2}\ dx\,dz = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 rdr\right)dt = \pi$. În final, fluxul lui $\vec{V}$ prin suprafața S este: $-\pi + \pi = 0$.