INTEGRALE CURBILINII

Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de prima speță:

1. $\int_\gamma (x^2+y^2)\ln z\, ds$, unde parametrizarea curbei este $\gamma(t):\begin{cases} x(t)=e^t\cos t \\ y(t)=e^t\sin t \\ z(t)=e^t \end{cases}$, $t\in[0,1]$.

2. $\int_\gamma ye^{-x}\, ds$, unde parametrizarea curbei este $\gamma(t):\begin{cases} x(t)=\ln(1+t^2) \\ y(t)=2\operatorname{arctg} t - t \end{cases}$, $t\in[0,1]$.

3. $\int_\gamma xyz\, ds$, unde parametrizarea curbei este $\gamma(t):\begin{cases} x(t)=t \\ y(t)=\frac{2}{3}\sqrt{2t^3} \\ z(t)=\frac{1}{2}t^2 \end{cases}$, $t\in[0,1]$.

4. $\int_\gamma x^2y\, ds$, unde curba γ este formată din segmentele AB și BC, cu $A(-1,1)$, $B(2,1)$, $C(2,5)$.

5. $\int_\gamma x^2\, ds$, unde γ: $x^2+y^2=2$, $x\geq 0$, $y\geq 0$.

6. $\int_\gamma (x^2+y^2)ds$, unde γ: arcul de cerc $x^2+y^2=1$ de la $A(0,-1)$ la $B(1,0)$.

7. $\int_\gamma (x+y)ds$, unde parametrizarea curbei este $\gamma(t):\begin{cases} x(t)=e^t+1 \\ y(t)=e^t-1 \end{cases}$, $t\in[0,\ln 2]$.

8. $\int_\gamma (2x-y)ds$, unde parametrizarea curbei este $\gamma(t):\begin{cases} x(t)=\sin t \\ y(t)=\cos t \end{cases}$, $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

9. $\int_\gamma xyz\, ds$, unde γ: segmentul AB, cu $A(1,-1,2)$ și $B(3,2,5)$.

10. $\int_\gamma xy\, ds$, unde γ: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$, $y\geq 0$.

11. $\int_\gamma (x^2+y^2)ds$, unde parametrizarea curbei este $\gamma(t):\begin{cases} x(t)=4t-1 \\ y(t)=3t+1 \end{cases}$, $t\in[-1,1]$.

12. $\int_\gamma y^2\, ds$, unde γ: $x^2+y^2=4$, $x\leq 0$, $y\geq 0$.

Să se calculeze lungimea următoarelor drumuri:

13. $\gamma(t):\begin{cases} x(t)=e^t \\ y(t)=e^{\frac{3}{2}t} \end{cases}$, $t\in[0,1]$

14. γ: $y=\ln\sin x$, $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$

15. γ : segmentul AB, cu $A(1,2)$ și $B(3,5)$.

16. Să se calculeze masa și coordonatele centrului de greutate pentru un fir material omogen ($\rho = 1$), știind că urma firului material este curba γ formată din arcul de cerc $x^2 + y^2 = 2$ între punctele $A(0,2)$ și $B(2,0)$ și segmentele AO și OB, cu $O(0,0)$ (parcurgere în sens trigonometric).

Să se calculeze $\int_{\gamma} \omega$ (integrale curbilinii de speța a II-a):

17. $\omega = (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$,

unde parametrizarea curbei este $\gamma(t):\begin{cases} x(t) = \sqrt{t} \\ y(t) = \sqrt{t+1} \end{cases}$, $t \in [1,4]$.

18. $\omega = \dfrac{1}{1+y^2}dx + \dfrac{y}{1+x^2}dy$, unde parametrizarea curbei este $\gamma(t):\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t \end{cases}$, $t \in [0,1]$.

19. $\omega = \sqrt{x}\,dx + xy^2dy$, unde $\gamma:\ y = x^2$, $x \in [0,1]$.

20. $\omega = (1-y)dx + (x-1)dy$, unde $\gamma:\ x^2 + y^2 - 2x = 3$.

21. $\omega = (4x - 6y)dx + (6x + 9y)dy$, unde $\gamma:\ \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$, $x \le 0$.

Indicații și răspunsuri

1. $\gamma'(t):\begin{cases} x'(t)=e^t\left(\cos t-\sin t\right) \\ y'(t)=e^t\left(\cos t+\sin t\right) \\ z'(t)=e^t \end{cases}$, iar $\left\|\gamma'(t)\right\|=\sqrt{3}\,e^t$. Integrala devine:

$I=\int_\gamma\left(x^2+y^2\right)\ln z\,ds=\int_0^1\sqrt{3}\,te^{3t}dt$. Folosind integrarea prin părți se obține: $I=\dfrac{2\sqrt{3}\,e^3+\sqrt{3}}{9}$.

2. $\gamma'(t):\begin{cases} x'(t)=\dfrac{2t}{1+t^2} \\ y'(t)=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$, iar $\left\|\gamma'(t)\right\|=1$. Integrala devine $I=\int_\gamma ye^{-x}\,ds=\int_0^1(2\operatorname{arctg} t-t)\cdot e^{-\ln(1+t^2)}dt$

Folosind formula generală $x^r=e^{r\ln x}$ se scrie $e^{-\ln(1+t^2)}=\dfrac{1}{1+t^2}$ și se obține $I=\dfrac{\pi^2}{16}-\dfrac{1}{2}\ln 2$.

3. $\gamma'(t):\begin{cases} x'(t)=1 \\ y'(t)=\sqrt{2t} \\ z'(t)=t \end{cases}$, iar $\left\|\gamma'(t)\right\|=t+1$. Integrala devine: $I=\int_\gamma xyz\,ds=\int_0^1\dfrac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{t^9}\left(1+t\right)dt$. În final se obține $I=\dfrac{16\sqrt{2}}{143}$.

4. Considerăm mai întâi segmentul AB, cu $\gamma_1(t):\begin{cases} x(t)=3t-1 \\ y(t)=1 \end{cases}$, $t\in\left[0,1\right]$ și $\left\|\gamma_1'(t)\right\|=3$. Vom avea $I_1=\int_{\gamma_1}x^2y\,ds=\int_0^1 3\left(3t-1\right)^2dt=3$. Pentru segmentul BC avem

$\gamma_2(t):\begin{cases} x(t)=2 \\ y(t)=4t+1 \end{cases}$, $t\in\left[0,1\right]$ și $\left\|\gamma_2'(t)\right\|=4$. Vom avea: $I_2=\int_{\gamma_2}x^2y\,ds=\int_0^1 4\left(4t+1\right)dt=48$. În final obținem: $I=\int_\gamma x^2y\,ds=I_1+I_2=51$.

5. Parametrizăm curba: $\gamma(t)=\begin{cases} x(t)=\sqrt{2}\cos t \\ y(t)=\sqrt{2}\sin t \end{cases}$, $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ (suntem în primul cadran), cu

$\left\|\gamma'(t)\right\|=\sqrt{2}$. Integrala devine: $I=\int_\gamma x^2\,ds=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sqrt{2}\left(\cos t\right)^2dt$. Se folosește formula

$\left(\cos t\right)^2=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$ și se obține $I=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$.

6. Se parametrizează curba folosind coordonate polare. Cum arcul de cerc $x^2+y^2=1$ de la $A\left(0,-1\right)$ la $B\left(1,0\right)$ se află în cadranul 4, iar $r=1$ avem: $\gamma(t)=\begin{cases} x(t)=\cos t \\ y(t)=\sin t \end{cases}$, $t\in\left[\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right]$, cu

$\left\|\gamma'(t)\right\|=1$. Integrala devine: $I=\int_\gamma\left(x^2+y^2\right)ds=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}dt=\dfrac{\pi}{2}$.

7. $\gamma'(t):\begin{cases} x'(t)=e^t \\ y'(t)=e^t \end{cases}$, iar $\|\gamma'(t)\|=e^t\sqrt{2}$. Integrala devine: $I=\int_\gamma (x+y)\,ds=\int_0^{\ln 2} 2\sqrt{2}\,e^{2t}dt=3\sqrt{2}$.

8. $\gamma'(t):\begin{cases} x'(t)=\cos t \\ y'(t)=-\sin t \end{cases}$, iar $\|\gamma'(t)\|=1$. Integrala devine

$I=\int_\gamma (2x-y)\,ds=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\sin t-\cos t)\,dt=1$.

9. Parametrizăm curba:

$\gamma(t):\begin{cases} x(t)=2t+1 \\ y(t)=3t-1 \\ z(t)=3t+2 \end{cases}$, $t\in[0,1]$. Obținem $\gamma'(t):\begin{cases} x'(t)=2 \\ y'(t)=3 \\ z'(t)=3 \end{cases}$ și $\|\gamma'(t)\|=\sqrt{22}$. Integrala devine:

$I=\int_\gamma xyz\,ds=\int_0^1 \sqrt{22}\,(2t+1)(3t-1)(3t+2)\,dt=7\sqrt{22}$.

10. Parametrizăm curba (arc de elipsă): $\gamma(t)=\begin{cases} x(t)=2\cos t \\ y(t)=3\sin t \end{cases}$ $,t\in[0,\pi]$. $\gamma'(t)=\begin{cases} x'(t)=-2\sin t \\ y'(t)=3\cos t \end{cases}$,

iar $\|\gamma'(t)\|=\sqrt{4+5(\cos t)^2}$. Integrala devine: $I=\int_\gamma xyds=\int_0^\pi 8\sin t\cos t\sqrt{4+5(\cos t)^2}\,dt$. Se face o schimbare de variabilă: $\varphi=4+5(\cos t)^2$, $\varphi'=-10\cos t\sin t$. În final se obține $I=0$.

11. $\gamma'(t):\begin{cases} x'(t)=4 \\ y'(t)=3 \end{cases}$, iar $\|\gamma'(t)\|=4$. Integrala devine:

$I=\int_\gamma (x^2+y^2)\,ds=\int_{-1}^1 4(25t^2-2t+2)\,dt=\frac{248}{3}$.

12. Parametrizăm curba (arc de cerc): $\gamma(t)=\begin{cases} x(t)=2\cos t \\ y(t)=2\sin t \end{cases}$ $,t\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ (suntem în al doilea cadran), cu $\|\gamma'(t)\|=2$. Integrala devine: $I=\int_\gamma y^2\,ds=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 8(\sin t)^2\,dt$. Se folosește formula $(\sin t)^2=\frac{1-\cos 2x}{2}$ și se obține $I=2\pi$.

13. $\gamma'(t):\begin{cases} x'(t)=e^t \\ y'(t)=\frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}t} \end{cases}$, iar $\|\gamma'(t)\|=\frac{1}{2}e^t\sqrt{4+9e^t}$. Lungimea drumului este :

$L=\int_\gamma ds=\int_0^1 \frac{1}{2}e^t\sqrt{4+9e^t}\,dt=\frac{1}{18}\left[(4+9e^t)^{\frac{3}{2}}-13^{\frac{3}{2}}\right]$.

14. Parametrizăm curba: $\gamma(t)=\begin{cases} x(t)=t \\ y(t)=\ln\sin t \end{cases}$ $,t\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$. $\gamma'(t):\begin{cases} x'(t)=1 \\ y'(t)=\frac{\cos t}{\sin t} \end{cases}$, $\|\gamma'(t)\|=\frac{1}{\sin t}$.

Lungimea drumului este $L=\int_{\gamma} ds=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin t}dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{(\sin t)^2}dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{1-(\cos t)^2}dt$. Se face schimbare de variabilă $\varphi=\cos t$ și se obține $L=\frac{1}{2}\left[\ln 3+\ln\left|\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2}\right|\right]$.

15. Parametrizăm curba: $\gamma(t)=\begin{cases} x(t)=1+2t \\ y(t)=2+3t \end{cases}, t\in[0,1]$; $\gamma'(t):\begin{cases} x'(t)=2 \\ y'(t)=3 \end{cases}$, $\|\gamma'(t)\|=\sqrt{13}$.

Lungimea drumului este $L=\int_{\gamma} ds=\int_0^1 \sqrt{13}\,dt=\sqrt{13}$.

16. Parametrizăm curba pe porțiuni:

Segmentul AO: $\gamma_1(t)=\begin{cases} x(t)=2t \\ y(t)=0 \end{cases}, t\in[0,1]$, $\|\gamma_1'(t)\|=2$.

Segmentul OB: $\gamma_2(t)=\begin{cases} x(t)=0 \\ y(t)=2t \end{cases}, t\in[0,1]$, $\|\gamma_2'(t)\|=2$.

Arcul de cerc: $\gamma_3(t)=\begin{cases} x(t)=\sqrt{2}\cos t \\ y(t)=\sqrt{2}\sin t \end{cases}, t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\|\gamma_3'(t)\|=\sqrt{2}$.

Masa firului: $m=\int_{\gamma}\rho ds=\int_{\gamma_1}\rho ds+\int_{\gamma_2}\rho ds+\int_{\gamma_3}\rho ds=\int_0^1 2dt+\int_0^1 2dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}dt=\frac{8+\sqrt{2}\pi}{2}$

Coordonatele centrului de greutate:

$$x_G=\frac{1}{m}\int_{\gamma}x\rho ds=\frac{1}{m}\left(\int_{\gamma_1}x\rho ds+\int_{\gamma_2}x\rho ds+\int_{\gamma_3}x\rho ds\right)$$

$$\Rightarrow x_G=\frac{2}{8+\sqrt{2}\pi}\left(\int_0^1 4tdt+\int_0^1 0dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos tdt\right)=\frac{8}{8+\sqrt{2}\pi}$$

$$y_G=\frac{1}{m}\int_{\gamma}y\rho ds=\frac{1}{m}\left(\int_{\gamma_1}y\rho ds+\int_{\gamma_2}y\rho ds+\int_{\gamma_3}y\rho ds\right)$$

$$\Rightarrow y_G=\frac{2}{8+\sqrt{2}\pi}\left(\int_0^1 0dt+\int_0^1 4tdt+\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin tdt\right)=\frac{8}{8+\sqrt{2}\pi}$$

17. $\gamma'(t):\begin{cases} x'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}} \\ y'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t+1}} \end{cases}$, integrala este: $I=\int_{\gamma}\omega=\int_1^4\frac{1}{2}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{t}}+\frac{1}{\sqrt{t+1}}\right)dt=\frac{17}{3}+\sqrt{5}-\sqrt{2}$.

18. $\gamma'(t):\begin{cases} x'(t)=2t \\ y'(t)=1 \end{cases}$, integrala este: $I=\int_{\gamma}\omega=\int_0^1\left(\frac{2t}{1+t^2}+\frac{t}{1+t^4}\right)dt=\ln 2+\frac{\pi}{8}$.

19. Parametrizăm curba: $\gamma(t)=\begin{cases}x(t)=t\\y(t)=t^2\end{cases},t\in[0,1]$; $\gamma'(t):\begin{cases}x'(t)=1\\y'(t)=2t\end{cases}$. Integrala este:

$I=\int_\gamma \omega=\int_0^1\left(\sqrt{t}+2t^4\right)dt=\dfrac{16}{15}$.

20. Curba γ este un cerc cu centrul în $(1,0)$ și de rază 2, de ecuație $(x-1)^2+y^2=4$. Se parametrizează: $\gamma(t)=\begin{cases}x(t)=1+2\cos t\\y(t)=2\sin t\end{cases},t\in[0,2\pi]$; $\gamma'(t):\begin{cases}x'(t)=-2\sin t\\y'(t)=2\cos t\end{cases}$. Integrala devine:

$I=\int_\gamma \omega=\int_0^{2\pi}(4-2\sin t)\,dt=8\pi$.

21. Parametrizăm curba (arc de elipsă): $\gamma(t)=\begin{cases}x(t)=3\cos t\\y(t)=2\sin t\end{cases},t\in\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right],\gamma'(t):\begin{cases}x'(t)=-3\sin t\\y'(t)=2\cos t\end{cases}$

Integrala este: $I=\int_\gamma \omega=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}36dt=36\pi$.