FORMULE INTEGRALE

1-5: Să se calculeze următoarele integrale curbilinii folosind formula Green-Riemann:

1. $\int_C \left(3y-e^{\sin x}\right)dx+\left(7x+\sqrt{y^4+1}\right)dy$, unde C este curba de ecuație $x^2+y^2=9$.

2. $\int_C xydx+x^2dy$, unde C este dreptunghiul cu vârfurile $(0,0)$, $(3,0)$, $(3,1)$, $(0,1)$.

3. $\int_C xydx+x^2y^3dy$, unde C este triunghiul cu vârfurile $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,2)$.

4. $\int_C \left(y+e^{\sqrt{x}}\right)dx+\left(2x+\cos y^2\right)dy$, unde C este frontiera domeniului delimitat de intersecția parabolelor $y=x^2$ și $x=y^2$.

5. Considerăm forța $F(x,y)=xy^2\vec{i}+2x^2y\vec{j}$ care acționează asupra unei particule materiale. Folosiți formula Green-Riemann pentru a determina lucrul mecanic a forței F necesar deplasării particulei de la origine la punctul $(2,2)$, apoi la punctul $(2,4)$ și înapoi la origine.

6-9: Calculați cu ajutorul formulei Stokes următoarele integrale curbilinii (cu reprezentare grafică):

6. $\int_\gamma ydx+zdy+xdz$, unde γ este curba de intersecție a suprafețelor de ecuație $z=x^2+y^2$ și $x+y+z=0$.

7. $\int_\gamma x^2y^3dx+dy+zdz$, unde γ este curba de ecuație $x^2+y^2=1$, din planul $z=0$ iar suprafața S care are frontiera γ este $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, și are normala orientată în interior.

8. Calculați $\int_\gamma (z-y)dx+(x-z)dy+(y-x)dz$, unde γ este conturul ΔABC, $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ și $C(0,0,c)$, cu $a,b,c>0$, parcurs în sensul $A\to B\to C$.

9. Calculați $\int_\gamma (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$, unde γ este curba de intersecție a suprafețelor de ecuație $x^2+y^2=1$ și $x+\frac{z}{2}=1$ (orientarea la alegere).

10. Calculați fluxul câmpului $\vec{V}=x^3\vec{i}+x^2y\vec{j}+x^2z\vec{k}$ prin fețele cilindrului $x^2+y^2=R^2$, $0\le z\le a$ ($R>0, a>0$), folosind formula Gauss-Ostrogradski (cilindrul este considerat împreună cu bazele aflate în planele $z=0$, respectiv $z=a$)

11. Calculați fluxul câmpului $\vec{V}=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\vec{k}$ prin fața exterioară a sferei $x^2+y^2+z^2=4$.

12. Se consideră câmpurile vectoriale definite prin: $\vec{U}=\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}$, $\vec{V}=\frac{\vec{a}\times\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}$ și $\vec{W}=\|\vec{r}\|\cdot r$, unde $\vec{a}$ este un vector constant iar $\vec{r}$ este vectorul de poziție al unui punct oarecare din $\mathbb{R}^3$. Se cere:

a) Calculați $\operatorname{div}\vec{U}$, $\operatorname{div}\vec{V}$ și $\operatorname{div}\vec{W}$;

b) Calculați fluxul câmpurilor $\vec{U}$, $\vec{V}$ și $\vec{W}$ printr-o sferă centrată în origine (normala se alege la exterior).

Indicații și răspunsuri

1. Avem $P(x,y)=3y-e^{\sin x}$ și $Q(x,y)=7x+\sqrt{y^4+1}$. Atunci:

$\int\limits_{C=\partial K} Pdx+Qdy=\iint\limits_K\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(7x+\sqrt{y^4+1}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(3y-e^{\sin x}\right)\right]dxdy=\iint\limits_K 4dxdy$. Domeniul K va fi un disc: $K=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| x^2+y^2\le 9\right\}$. Se trece la coordonate polare: $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, $J=r$ și $r\in[0,3], t\in[0,2\pi)$. Integrala devine: $\int\limits_{C=\partial K} Pdx+Qdy=\int_0^3\left(\int_0^{2\pi}4r\,dr\right)dt=36\pi$.

2. Avem $P(x,y)=xy$ și $Q(x,y)=x^2$. Atunci:

$\int\limits_{C=\partial K} Pdx+Qdy=\iint\limits_K\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\right)-\frac{\partial}{\partial y}(xy)\right]dxdy=\iint\limits_K xdxdy$. Domeniul K este de tip dreptunghi $K=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| x\in[0,3], y\in[0,1]\right\}$ și integrala devine: $\int\limits_{C=\partial K} Pdx+Qdy=\int_0^1\left(\int_0^3 x\,dx\right)dy=\frac{9}{2}$.

3. Avem $P(x,y)=xy$ și $Q(x,y)=x^2y^3$. Atunci:

$\int\limits_{C=\partial K} Pdx+Qdy=\iint\limits_K\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2y^3\right)-\frac{\partial}{\partial y}(xy)\right]dxdy=\iint\limits_K x\left(2y^3-1\right)dxdy$. Domeniul K este de tip intergrafic: $K=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| x\in[0,1], 0\le y\le 2x\right\}$. Integrala devine:

$\int\limits_{C=\partial K} Pdx+Qdy=\int_0^1\left(\int_0^{2x}x\left(2y^3-1\right)dy\right)dx=\int_0^1\left(8x^5-2x^2\right)dx=\frac{2}{3}$.

4. Avem $P(x,y)=y+e^{\sqrt{x}}$ și $Q(x,y)=2x+\cos y^2$. Atunci:

$\int\limits_{C=\partial K} Pdx+Qdy=\iint\limits_K\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(2x+\cos y^2\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(y+e^{\sqrt{x}}\right)\right]dxdy=\iint\limits_K dxdy$. Domeniul K este de tip intergrafic și este delimitat de curbele $y=x^2$ și $y=\sqrt{x}$, $K=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| x\in[0,1], x^2\le y\le\sqrt{x}\right\}$.

Integrala devine: $\int\limits_{C=\partial K} Pdx+Qdy=\int_0^1\left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}}dy\right)dx=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx=\frac{1}{3}$.

5. $F(x,y)=xy^2\vec{i}+2x^2y\vec{j}$, cu $P(x,y)=xy^2$ și $Q(x,y)=2x^2y$. Atunci:

$\int\limits_{C=\partial K} Pdx+Qdy=\iint\limits_K\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(2x^2y\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(xy^2\right)\right]dxdy=\iint\limits_K 2xy\,dxdy$. Ecuația dreptei care trece prin punctele $(0,0)$ și $(2,2)$ este $y=x$, iar ecuația dreptei care trece prin punctele $(0,0)$ și $(2,4)$ este $y=2x$. Domeniul K este de tip intergrafic: $K=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| x\in[0,2], x\le y\le 2x\right\}$. Integrala devine:

$\int\limits_{C=\partial K} Pdx+Qdy=\int_0^2\left(\int_x^{2x}2xy\,dy\right)dx=\int_0^2 3x^3dx=12$.

6. $z=-x-y$ este un plan ce trece prin origine și nu intersectează axele de coordonate în alt punct (se verifică acest lucru prin calcul). Suprafața S este situată în planul $z=-x-y$ și frontiera ei este curba γ (intersecția cu paraboloidul $z=x^2+y^2$). Orientarea normalei la S este în direcția de creștere a lui z iar orientarea lui γ este în sens trigonometric. Conform formulei Stokes avem $\int\limits_\gamma \vec{V}d\vec{r}=\iint\limits_S \operatorname{rot}\vec{V}\cdot\vec{n}\,d\sigma$, unde câmpul vectorial asociat în mod canonic formei diferențiale este $\vec{V} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ iar $\operatorname{rot}\vec{V} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$. Suprafața S se parametrizează cartezian, $\vec{r}(x,y) = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + (-x-y)\cdot\vec{k}$, $\vec{N} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ iar produsul scalar este $\operatorname{rot}\vec{V}\cdot\vec{N} = -3$, deci $\iint_S \operatorname{rot}\vec{V}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint_D -3dxdy$. Pentru a obține $D = pr_{xOy}S$ se ”elimină” z din ecuațiile inițiale și avem $x^2 + y^2 = -x - y$, adică $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ (cerc cu centrul în $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ și rază $\frac{1}{\sqrt{2}}$), deci $D = pr_{xOy}S = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 \le \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}$. Se trece la coordonate polare cu $x = -\frac{1}{2} + r\cos t$, $y = -\frac{1}{2} + r\sin t$, jacobianul $J = r$, cu $r\in\left[0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ și $t\in[0,2\pi]$ și se obține: $\iint_D -3dxdy = -3\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{1/\sqrt{2}} r\,dr\right)dt = -3\sqrt{2}\pi$.

7. Conform formulei Stokes avem $\int_\gamma \vec{V}dr = \iint_S \operatorname{rot}\vec{V}\cdot\vec{n}\,d\sigma$, unde câmpul vectorial asociat în mod canonic formei diferențiale este $\vec{V} = x^2y^3\vec{i} + \vec{j} + z\vec{k}$ iar $\operatorname{rot}\vec{V} = 0\vec{i} + 0\vec{j} - 3x^2y^2\vec{k}$. Suprafața S se parametrizează cartezian: $\vec{r}(x,y) = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + \left(\sqrt{1-x^2-y^2}\right)\cdot\vec{k}$,

$\vec{N}_{\text{int}} = -\vec{N}_{ext} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\vec{j} - \vec{k}$ iar produsul scalar este $\operatorname{rot}\vec{V}\cdot\vec{N}_{\text{int}} = 3x^2y^2$, deci $\iint_S \operatorname{rot}\vec{V}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint_D 3x^2y^2dxdy$, unde $D = pr_{xOy}S = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2\le 1\right\}$. Se trece la coordonate polare cu $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, jacobianul $J = r$, cu $r\in[0,1]$ și $t\in[0,2\pi]$ și se obține: $\iint_D -3dxdy = 3\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 r^5\cos^2 t\cdot\sin^2 t\,dr\right)dt = (...) = \frac{\pi}{8}$.

8. Conform formulei Stokes avem $\int_\gamma \vec{V}dr = \iint_S \operatorname{rot}\vec{V}\cdot\vec{n}\,d\sigma$, unde câmpul vectorial asociat în mod canonic formei diferențiale este $\vec{V} = (z-y)\vec{i} + (x-z)\vec{j} + (y-x)\vec{k}$ iar $\operatorname{rot}\vec{V} = 2\left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right)$. Suprafața S (a triunghiului ABC) se parametrizează cartezian: $\vec{r}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} + c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\vec{k}$,

$\vec{N} = (-p,-q,1) = \frac{c}{a}\vec{i} + \frac{c}{b}\vec{j} + \vec{k}$ iar produsul scalar este $\operatorname{rot}\vec{V}\cdot\vec{N} = 2\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1\right)$, deci $\iint_S \operatorname{rot}\vec{V}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint_D 2\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1\right)dxdy$, unde $D = pr_{xOy}S = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0\le x\le a, 0\le y\le -\frac{b}{a}x+b\right\}$ (proiecția pe xOy este triunghiul ”plin” OAB). Se obține:

$$\iint_D 2\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1\right)dxdy = 2\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1\right)\int_0^a\left(\int_0^{-\frac{b}{a}x+b} dy\right)dx = (...) = (bc+ca+ba).$$

9. $x+\frac{z}{2}=1$ este un plan ce nu trece prin origine și intersectează Ox în $x=1$ și Oz în $z=2$. Suprafața S este situată în planul $x+\frac{z}{2}=1$ și frontiera ei este curba γ (intersecția cu cilindrul $x^2+y^2=1$). Alegem orientarea normalei la S în direcția de creștere a lui z iar orientarea lui γ în sens trigonometric. Conform formulei Stokes avem $\int_\gamma \vec{V}dr=\iint_S \operatorname{rot}\vec{V}\cdot\vec{n}\,d\sigma$, unde câmpul vectorial asociat în mod canonic formei diferențiale este $\vec{V}=(y-z)\vec{i}+(z-x)\vec{j}+(x-y)\vec{k}$ iar $\operatorname{rot}\vec{V}=-2\left(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\right)$. Suprafața S (situată în planul $x+\frac{z}{2}=1$) se parametrizează cartezian: $\vec{r}(x,y)=x\vec{i}+y\vec{j}+(2-2x)\vec{k}$, $\vec{N}=(-p,-q,1)=2\vec{i}+0\vec{j}+\vec{k}$ iar produsul scalar este $\operatorname{rot}\vec{V}\cdot\vec{N}=-6$, deci $\iint_S \operatorname{rot}\vec{V}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iint_D -6\,dxdy$, unde $D=pr_{xOy}S=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2\le 1\right\}$. Se trece la coordonate polare cu $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, jacobianul $J=r$, cu $r\in[0,1]$ și $t\in[0,2\pi]$ și se obține: $\iint_D -6\,dxdy=-6\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 r\,dr\right)dt=-6\pi$.

10. Condițiile teoremei G-O. sunt îndeplinite și avem: $I=\iint_{\partial K}\vec{V}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iiint_K \operatorname{div}\vec{V}\,dxdydz$.

$\operatorname{div}\vec{V}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2y\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(x^2z\right)=5x^2$, deci: $I=\iint_D\left(\int_0^a 5x^2dz\right)dxdy=5a\iint_D x^2dxdy$, unde $D=pr_{xOy}K=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2\le R^2\right\}$. Se trece la coordonate polare cu $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, jacobianul $J=r$, cu $r\in[0,R]$ și $t\in[0,2\pi]$ și se obține:

$$I=5a\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R r^2\sin^2 t\cdot r\,dr\right)dt=(\ldots)=\frac{5aR^4}{4}\pi.$$

11. Condițiile teoremei G-O. sunt îndeplinite și avem: $\iint_{\partial K}\vec{V}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iiint_K \operatorname{div}\vec{V}\,dxdydz$.

$\operatorname{div}\vec{V}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(z^2\right)=2(x+y+z)$, deci: $I=2\iiint_K(x+y+z)\,dxdydz$. Se trece la coordonate sferice cu $x=r\sin\theta\cos\varphi$, $y=r\sin\theta\sin\varphi$, $z=r\cos\theta$, jacobianul $J=r^2\sin\theta$, $r\in[0,2]$, $\theta\in[0,\pi]$ și $\varphi\in[0,2\pi]$ și se obține:

$$2\iiint_K(x+y+z)\,dxdydz=2\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^2 r(\sin\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi+\cos\theta)\cdot r^2\sin\theta\,dr\right)d\varphi d\theta=(\ldots)=0$$

12. Avem $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, cu $\|\vec{r}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ și $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$. Câmpurile vectoriale sunt:

$$\vec{U}=\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}=\frac{1}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right),$$

$$\vec{V}=\frac{\vec{a}\times\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}=\frac{1}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ x & y & z\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}\left((a_2z-a_3y)\vec{i}+(a_3x-a_1z)\vec{j}+(a_1y-a_2x)\vec{k}\right)$$

$\vec{W} = \|\vec{r}\| \cdot r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)$.

a) $\operatorname{div}\vec{U} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}\right) =$

$$= \frac{-2x^2+y^2+z^2}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^5}} + \frac{x^2-2y^2+z^2}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^5}} + \frac{x^2+y^2-2z^2}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^5}} = 0\,;$$

$$\operatorname{div}\vec{V} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_2z-a_3y}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a_3x-a_1z}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{a_1y-a_2x}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}\right)\right] =$$

$$= \frac{-3}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^5}}\left[a_2xz-a_3xy+a_3xy-a_1yz+a_1yz-a_2xz\right] = 0\,;$$

$$\operatorname{div}\vec{W} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(y\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) = 5\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 5\|\vec{r}\|.$$

b) Fluxul câmpului $\vec{U} = \frac{1}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)$ nu se poate calcula cu ajutorul formulei Gauss-Ostrogradski deoarece condițiile teoremei nu sunt îndeplinite (în punctul $(0,0,0)\in K$, componentele câmpului vectorial nu sunt de clasă C^1). Fluxul se va calcula folosind integrala de suprafață (pentru sfera de rază R, centrată în origine): $\iint_S \vec{U}\cdot\vec{n}\,d\sigma$. Se parametrizează sfera folosind coordonate sferice: $x = R\sin\theta\cos\varphi$, $y = R\sin\theta\sin\varphi$, $z = R\cos\theta$, $\theta\in[0,\pi]$ și $\varphi\in[0,2\pi]$. Parametrizarea este $\vec{r}(\theta,\varphi) = R\sin\theta\cos\varphi\vec{i} + R\sin\theta\sin\varphi\vec{j} + R\cos\theta\vec{k}$ iar câmpul vectorial $\vec{U}$ devine: $\vec{U}\left(\vec{r}(\theta,\varphi)\right) = \frac{1}{R^2}\left(\sin\theta\cos\varphi\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\vec{j} + \cos\theta\vec{k}\right)$. Vectorii tangenți sunt :

$r_\theta = \frac{\partial r}{\partial\theta} = R\cos\theta\cos\varphi\vec{i} + R\cos\theta\sin\varphi\vec{j} - R\sin\theta\vec{k}$ și $r_\varphi = \frac{\partial r}{\partial\varphi} = -R\sin\theta\sin\varphi\vec{i} + R\sin\theta\cos\varphi\vec{j} + 0\vec{k}$.

Vectorul normal este: $\overrightarrow{N}(\theta,\varphi) = r_\theta\times r_\varphi = R^2\left(\sin^2\theta\cos\varphi\vec{i} + \sin^2\theta\sin\varphi\vec{j} + \sin\theta\cos\theta\vec{k}\right)$ iar produsul scalar $\vec{U}\cdot\vec{N} = \sin\theta$. Obținem astfel: $\iint_S \vec{U}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\right)d\varphi = 4\pi$.

Fluxul câmpului $\vec{V} = \frac{1}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}\left(\left(a_2z-a_3y\right)\vec{i} + \left(a_3x-a_1z\right)\vec{j} + \left(a_1y-a_2x\right)\vec{k}\right)$ nu se poate calcula cu ajutorul formulei Gauss-Ostrogradski din aceleași considerente ca în cazul câmpului vectorial $\vec{U}$. Fluxul se va calcula folosind integrala de suprafață (pentru sfera de rază R, centrată în origine): $\iint_S \vec{V}\cdot\vec{n}\,d\sigma$. Se procedează ca mai sus (aceeași parametrizare, același vector normal $\overrightarrow{N}(\theta,\varphi) = R^2\left(\sin^2\theta\cos\varphi\vec{i} + \sin^2\theta\sin\varphi\vec{j} + \sin\theta\cos\theta\vec{k}\right)$) iar

$$\vec{V}\left(\vec{r}\left(\theta,\varphi\right)\right)=\frac{1}{R^2}\left[\left(a_2\cos\theta-a_3\sin\theta\sin\varphi\right)\vec{i}+\left(a_3\sin\theta\cos\varphi-a_1\cos\theta\right)\vec{j}+\left(a_1\sin\theta\sin\varphi-a_2\sin\theta\cos\varphi\right)\vec{k}\right]$$

și se obține produsul scalar $\vec{V}\cdot\vec{N}=0$ Obținem astfel: $\iint\limits_S \vec{V}\cdot\vec{n}\,d\sigma=0$.

Fluxul câmpului $\vec{W}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)$ se poate calcula cu ajutorul formulei Gauss-Ostrogradski (sunt îndeplinite condițiile teoremei), deci $\iint\limits_S \vec{W}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iiint\limits_K \mathrm{div}\vec{W}\,dxdydz$. De la punctul a) avem $\mathrm{div}\vec{\mathrm{W}}=5\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, deci pentru calcularea integralei triple folosim trecerea la coordonate sferice: $x=r\sin\theta\cos\varphi$, $y=r\sin\theta\sin\varphi$, $z=r\cos\theta$, jacobianul $J=r^2\sin\theta$ și domeniul parametrilor: $r\in\left[0,R\right]$, $\theta\in\left[0,\pi\right]$ și $\varphi\in\left[0,2\pi\right]$. Obținem :

$$\iiint\limits_K \mathrm{div}\vec{W}\,dxdydz=\iiint\limits_K 5\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\int_0^R 5r\cdot r^2\sin\theta\,dr\right)d\theta d\varphi=5\pi R^4.$$