Algebră și geometrie

Notițe de seminar

Adrian Manea
Curs: A. Niță, R. Rădulescu, V. Slesar

20 ianuarie 2019

Cuprins

1 Recapitulare structuri algebrice și matrice **3**
1.1 Structuri algebrice . . . 3
1.2 Metoda Gauss-Jordan . . . 6
1.2.1 Inversarea matricelor cu metoda Gauss-Jordan . . . 6
1.2.2 Aplicație: Sisteme liniare . . . 7
1.3 Exerciții . . . 9

2 Spații vectoriale **11**
2.1 Definiții . . . 11
2.2 Bază și dimensiune . . . 17
2.3 Matricea unei aplicații liniare . . . 18
2.4 Matricea de trecere (schimbare de bază) . . . 20
2.5 Exerciții . . . 21
2.6 Exerciții suplimentare. Teorema lui Grassmann . . . 24
2.7 Teorema lui Grassmann . . . 25
2.8 Exerciții Grassmann . . . 26

3 Vectori și valori proprii. Diagonalizare **27**
3.1 Vectori și valori proprii . . . 27
3.2 Matrice de trecere. Diagonalizare . . . 28
3.3 Exerciții . . . 29

4 Modele de parțial **31**
4.1 Model 1 . . . 31
4.2 Model 2 . . . 32
4.3 Model 3 . . . 33

5 Spații euclidiene. Ortonormare **37**
5.1 Exerciții . . . 39

6 Forma canonică Jordan. Conice și cuadrice **41**
6.1 Forma canonică Jordan . . . 41

6.1.1 Exemple rezolvate . . . 42
6.1.2 Exerciții propuse . . . 44
6.2 Conice . . . 45
6.3 Cuadrice . . . 48
6.4 Exerciții propuse . . . 50

7 Ecuații și sisteme diferențiale **51**
7.1 Ecuații cu variabile separabile/separate . . . 51
7.2 Ecuații liniare . . . 52
7.3 Ecuația Bernoulli . . . 53
7.4 Ecuația Riccati . . . 55
7.5 Ecuația Clairaut . . . 55
7.6 Ecuații exacte. Factor integrant . . . 56
7.7 Ecuația Lagrange . . . 58
7.8 Sisteme diferențiale cu coeficienți constanți . . . 59
7.9 Exponențiale matriceale și sisteme folosind forma Jordan . . . 62

8 Recapitulare examen **65**
8.1 Model 1 . . . 65
8.2 Model 2 . . . 66
8.3 Model 3 . . . 68

Index **70**

SEMINAR 1

RECAPITULARE STRUCTURI ALGEBRICE ȘI MATRICE

1.1 Structuri algebrice

Amintim cîteva noțiuni esențiale în ce privește structurile algebrice. Începem cu noțiuni preliminare, anume *relații binare*.

Definiţie 1.1: Fie A o mulțime nevidă. O submulțime a produsului cartezian $A \times A$ se numește *relație binară pe A*.

Dacă $R \subseteq A \times A$ este o asemenea relație, în locul notației $a, b \in R$, pentru două elemente aflate în relație, vom folosi aRb și vom citi „a este în relația R cu b".

De exemplu, relația de rudenie este o relație binară, definită pe mulțimea oamenilor, relația de ordine este o relație binară definită pe mulțimea numerelor naturale, de pildă, relația de paralelism este o relație binară definită pe mulțimea curbelor din plan și altele.

Relațiile binare pot avea una sau mai multe din următoarele proprietăți:

Vom păstra notațiile și contextul de mai sus. Relația R se numește:

- *reflexivă*, dacă orice element este în relația R cu sine, i.e. $aRa, \forall a \in A$;
- *simetrică*, dacă oricînd aRb implică bRa, pentru niște $a, b \in A$;
- *antisimetrică*, dacă din aRb și bRa, pentru niște $a, b \in A$, rezultă că a și b coincid.
- *tranzitivă*, dacă din aRb și bRc putem deduce aRc, pentru orice $a, b, c \in A$ care satisfac ipoteza.

În funcție de proprietățile respectate, relațiile se pot clasifica. De exemplu, cel mai des se întîlnește relația de *ordine*, care este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă, precum și relația de *echivalență*, care este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

Exemple clasice: relația „$\leq$“ este o relație de ordine pe mulțimea $\mathbb{R}$. Egalitatea este o relație de echivalență, definită pe aproape orice mulțime de obiecte matematice de același tip (mulțimi de numere, de matrice, de funcții ș.a.m.d.).

Dacă relațiile binare nu returnează un al treilea element, deci nu dau o dependență funcțională, ele avînd doar o valoare de adevăr (i.e. putem spune doar dacă aRb este adevărat, nu și „cît face“ aRb), *operațiile* sau *legile de compoziție* au această proprietate. Mai precis:

Definiție 1.2: Fie A o mulțime nevidă. Se numește *lege de compoziție* sau *operație (binară)* orice funcție de tipul $f : A \times A \longrightarrow A$.

Exemplele tipice sînt operațiile algebrice, pe mulțimi de numere. Însă înainte de a le folosi, mai avem nevoie de terminologie.

Păstrînd notațiile și contextul de mai sus, o lege de compoziție f se numește:

- *internă*, dacă $\forall a, b \in A, f(a, b) \in A$ (automat verificată, dacă în definiție impunem condiția ca f să fie *funcție* și nu doar o asociere abstractă);
- *asociativă*, dacă $\forall a, b, c \in A, f(a, f(b, c)) = f(f(a, b), c)$;
- *comutativă*, dacă $\forall a, b \in A$, are loc $f(a, b) = f(b, a)$;
- *cu element neutru*, dacă există un element distins (unic) $e \in A$, astfel încît $f(a, e) = f(e, a) = a, \forall a \in A$;
- *cu elemente inversabile (simetrizabile)* dacă pentru un $a \in A$ există $a^{-1} \in A$ astfel încît $f(a, a^{-1}) = f(a^{-1}, a) = e$, elementul neutru.

Cum spuneam, exemplele tipice sînt operațiile algebrice elementare. Cum ar fi adunarea, definită pe mulțimea numerelor reale, care are toate proprietățile de mai sus. Înmulțirea, definită pe mulțimea numerelor naturale, nu admite decît un singur element inversabil, anume 1.

Compunerea funcțiilor reale, pe de altă parte, nu este comutativă, dar are elemente inversabile (chiar dacă nu toate), anume funcțiile bijective.

Există suficiente exemple de operații care nu au una sau mai multe din proprietățile de mai sus, după cum vă puteți convinge.

Deoarece, ca în cazul relațiilor binare, există o legătură strînsă între operație și mulțimea pe care a fost definită, se definesc *structurile algebrice* ca fiind exact perechi alcătuite din mulțimi și operații definite pe ele, satisfăcînd anumite proprietăți, conform definițiilor de mai jos.

Definiţie 1.3: Fie A o mulțime nevidă și $\circ$ o operație definită pe A.

Perechea $(A, \circ)$ se numește:

- *monoid*, dacă operația este internă, asociativă și admite element neutru;
- *grup*, dacă este monoid și orice element este inversabil.

Dacă, în plus, operația este și comutativă, se adaugă adjectivul „comutativ" pentru structura corespunzătoare (i.e. monoid comutativ, grup comutativ). În onoarea matematicianului norvegian N. H. Abel, grupurile comutative se mai numesc *abeliene*.

Există situații în care ar fi de folos să putem lucra cu mai multe operații pe o mulțime. Gîndiți-vă, de exemplu, la cazul numerelor reale, pe care le putem și aduna, și înmulți, ba chiar putem opera în expresii care să conțină ambele legi, simultan. Pentru aceasta, se pot defini structuri algebrice mai bogate, adăugînd condiții suplimentare de compatibilitate pentru operațiile folosite.

Definiţie 1.4: Fie A o mulțime nevidă și $\circ, *$ două operații, ambele definite pe A.

Tripletul $(A, \circ, *)$ se numește:

- *inel*, dacă perechea $(A, \circ)$ este grup comutativ, perechea $(A, *)$ este monoid, iar operația $*$ este *distributivă* față de $\circ$, adică au loc:

$$a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c) \text{ și } (b \circ c) * a = (b * a) \circ (c * a), \forall a, b, c \in A.$$

- *corp*, dacă este inel și, în plus, perechea $(A, *)$ este chiar grup.

Ca mai sus, dacă și operația $*$ este comutativă, se adaugă atributul „comutativ" numelui structurii (i.e. inel comutativ, corp comutativ).

Exemplele tipice sînt la îndemînă: $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ este corp comutativ, $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ este inel necomutativ, $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$ este inel comutativ și altele.

Făcînd verificările, veți recunoaște în proprietatea de distributivitate procedura obișnuită de *desfacere a parantezelor* într-o expresie algebrică.

Date două structuri algebrice, eventual cu mulțimi subiacente și operații diferite, există o modalitate de a le relaționa, prin intermediul *morfismelor*:

Definiţie 1.5: Fie $(G, \circ)$ și $(H, *)$ două structuri algebrice (monoizi, grupuri).

O funcție $f : G \longrightarrow H$ se numește *morfism* dacă respectă operațiile, i.e.:

$$f(g_1 \circ g_2) = f(g_1) * f(g_2), \forall g_1, g_2 \in G.$$

În plus, cerem ca morfismul să fie și *unitar*, adică $f(e_G) = e_H$ (elementele neutre corespund).

Dacă vrem să definim morfismele pentru inele, cerem în plus ca funcțiile să respecte și cea de-a doua operație, iar ambele elemente neutre să corespundă.

Dacă morfismul este chiar o funcție bijectivă, atunci el se numește *izomorfism*, iar structurile, *izomorfe*.

O ultimă noțiune utilă:

Definiţie 1.6: Dată o structură algebrică $(G, \circ)$ și o submulțime a sa, H, spunem că H este *substructură* pentru G (în particular, submonoid, subgrup) dacă $(H, \circ)$ are aceeași structură ca G, i.e. de monoid sau grup.

În cazul structurilor cu două operații, definiția se păstrează, cerînd ca H să aibă aceeași structură cu G, împreună cu *ambele* operații.

1.2 Metoda Gauss-Jordan

Această metodă ne permite să aducem orice matrice la o formă foarte simplă, anume forma matricei identitate, operînd numai cu transformări elementare asupra liniilor sau coloanelor acesteia.

Într-o formă mai relaxată, numită de obicei *eliminarea gaussiană*, este suficient să aducem matricea în formă *superior triunghiulară*, adică astfel încît elementele de sub diagonala principală să fie toate nule.

Metoda Gauss-Jordan are 2 principale aplicații (pe lîngă simplificarea matricei, care ar putea să fie utilă în numeroase contexte). Prima aplicație este în aflarea inversei unei matrice, iar cea de-a doua, în rezolvarea sistemelor liniare.

1.2.1 Inversarea matricelor cu metoda Gauss-Jordan

Procedura se bazează pe următorul algoritm:

- Dată matricea A, pătrată și nesingulară (inversabilă), se alcătuiește matricea $B = (A \mid I_n)$, unde n este dimensiunea matricei. Matricea B va fi o matrice cu n linii și $2n$ coloane, în care trasăm, pentru conveniență, linia verticală care separă cele două componente;

- În partea stîngă a matricei B (corespunzătoare matricei A), operăm cu *transformări elementare* ale liniilor și coloanelor, pînă cînd această parte devine I_n, transformările reflectîndu-se și în partea dreaptă a matricei B;

- Atunci cînd în partea stîngă A a devenit I_n, partea dreaptă a devenit A^{-1}.

Iată un exemplu, notînd și transformările:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \to (1/2)L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & | & 1/2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \to -5L_1+L_3]{L_2 \to 2L_1+L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & | & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3/2 & -13/2 & | & -5/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \to (1/4)L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & | & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7/4 & | & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & -3/2 & -13/2 & | & -5/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \to (3/2)L_2+L_3]{L_1 \to (-1/2)L_2+L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/8 & | & 3/8 & -1/8 & 0 \\ 0 & 1 & 7/4 & | & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -31/8 & | & -17/8 & 3/8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \to (-31/8)L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/8 & | & 3/8 & -1/8 & 0 \\ 0 & 1 & 7/4 & | & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 17/31 & -3/31 & -8/31 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_2 \to (-7/4)L_3+L_2]{L_1 \to (-5/8)L_3+L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1/31 & -2/31 & 5/31 \\ 0 & 1 & 0 & | & -22/31 & 13/31 & 14/31 \\ 0 & 0 & 1 & | & 17/31 & -3/31 & -8/31 \end{pmatrix}$$

Rezultă că $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/31 & -2/31 & 5/31 \\ -22/31 & 13/31 & 14/31 \\ 17/31 & -3/31 & -8/31 \end{pmatrix}$.

1.2.2 Aplicație: Sisteme liniare

Vom proceda similar, însă vom opera pe matricea $M = (A|B)$, unde A este matricea asociată sistemului liniar, iar B este matricea termenilor liberi (rezultatelor). Cînd, după procedeul Gauss-Jordan, am obținut $M = (I_n|C)$, atunci C va fi matricea-coloană a soluțiilor.

Iată un exemplu: Considerăm sistemul de mai jos.

$$\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 & = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 & = m \\ x_1 + x_2 + mx_3 & = m^2, \end{cases}$$

cu $m \in \mathbb{R}$. Îi vom discuta compatibilitatea în funcție de m și, în caz favorabil, îl vom rezolva. Totul va rezulta din metoda Gauss-Jordan.

Considerăm matricea M de mai sus:

$$
\begin{aligned}
(A|B) &= \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & m & 1 & | & m \\ 1 & 1 & m & | & m^2 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & | & m \\ m & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & m & | & m^2 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_1]{L_2 \to L_2 - mL_1} \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & | & m \\ 0 & 1-m^2 & 1-m & | & 1-m^2 \\ 0 & 1-m & m-1 & | & m^2-m. \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

În acest punct, avem o discuție:

(a) Dacă $m = 1$, atunci sistemul se reduce la prima ecuație, deci este compatibil dublu nedeterminat. Rezultă soluția

$$\{(1-\alpha-\beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

(b) Dacă $m \neq 1$, atunci putem continua transformările și ajungem, în fine, la:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+m & | & m+m^2 \\ 0 & 1 & -1 & | & -m \\ 0 & 0 & 2 & | & (m+1)^2 \end{pmatrix}$$

Aici discutăm din nou:

(b1) Dacă $m = -2$, sistemul este incompatibil, deoarece ultima ecuație devine $0 = 1$.

(b2) Dacă $m \neq -2$, putem continua transformările și ajungem, în cele din urmă, la:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -\frac{m+1}{m_2} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{m+2} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{(m+1)^2}{m+2}. \end{pmatrix}$$

În acest ultim caz, sistemul este compatibil determinat, soluția fiind dată de ultima coloană:

$$\begin{cases} x_1 &= -\frac{m+1}{2} \\ x_2 &= \frac{1}{m+2} \\ x_3 &= \frac{(m+1)^2}{m+2}. \end{cases}$$

Concluzia generală este:

(a) Dacă $m \in \mathbb{R} - \{-2, 1\}$, sistemul are soluție unică;

(b) Dacă $m = -2$, sistemul este incompatibil;

(c) Dacă $m = -1$, sistemul este compatibil nedeterminat.

1.3 Exerciții

1. Rezolvați următoarele sisteme, atît cu metoda matriceală clasică, cît și cu metoda lui Gauss:

(a) $\begin{cases} x + 3y - z & = 1 \\ 3x + y + 2z & = 4 \\ 5x - 2y + z & = 2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 3x - y + 2z + 3t & = 4 \\ x + 3y - z + t & = -1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x - y + 3z & = 1 \\ 3x + 2y - z & = 4. \\ x + 3y - 4z & = 3 \end{cases}$

2. Calculați inversele matricelor, atît cu metoda folosind matricea adjunctă, cît și folosind metoda lui Gauss:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

(b) $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

SEMINAR 2

SPAȚII VECTORIALE

2.1 Definiții

Noțiunea de spațiu vectorial este una foarte importantă în algebră, dar totodată ea face legătura și cu geometria, oferind cadrul structural în care se poate studia geometria analitică.

În cele ce urmează, dacă nu se specifică altfel, V o mulțime nevidă (pe care o vom înzestra cu structura de spațiu vectorial), iar K va fi corpul de bază (al scalarilor), în practică luat cel mai adesea $K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$.

Definiţie 2.1: O aplicație $\varphi : V \times V \longrightarrow V$, definită prin $(x, y) \mapsto \varphi(x, y) \in V$ se numește *lege de compoziție internă* sau *operație algebrică* pe V.

O aplicație $f : K \times V \longrightarrow V$, definită prin $(\alpha, x) \mapsto f(\alpha, x) \in V$ se numește *lege de compoziție externă* pe V.

Cu acestea, avem definiția fundamentală:

Definiţie 2.2: O mulțime nevidă V, înzestrată cu două legi de compoziție, una internă $+ : V \times V \longrightarrow V$ și alta externă $\cdot : K \times V \longrightarrow V$ se numește *spațiu vectorial peste* K sau K-spațiu vectorial, notat pe scurt ${}_K V$ dacă sînt îndeplinite axiomele:

(1) $(V, +)$ este grup abelian, adică:

  (a) $(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in V$;

  (b) $\exists 0_V \in V$ a.î $x + 0_V = 0_V + x = x, \forall x \in V$;

  (c) $\forall x \in V, \exists (-x) \in V$ a.î $x + (-x) = (-x) + x = 0_V$;

  (d) $x + y = y + x, \forall x, y \in V$

(2) Au loc:

 (a) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y, \forall \alpha \in K, \forall x, y \in V$;
 (b) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x, \forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in V$;
 (c) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x, \forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in V$;
 (d) $1_K \cdot x = x, \forall x \in V$.

În acest context, elementele corpului K se numesc *scalari*, iar elementele din V se numesc *vectori*. Legea de compoziție externă se numește *înmulțirea vectorilor cu scalari*. Dacă $K = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$, spațiul vectorial V se numește real sau, respectiv, complex.

Uneori, în loc de „spațiu vectorial" se mai poate spune „*spațiu liniar*" sau, pe scurt, dacă nu există riscul de confuzie, vom spune simplu „spațiu".

În general, pentru a nu complica notația, nu vom face distincție în scris între operațiile din corpul K, cele din V și legea externă. Însă trebuie avută atenție, conform definiției, să utilizăm operațiile corespunzătoare.

Observaţie 2.1: În situații diverse, spațiile vectoriale pot fi definite peste corpuri *necomutative* K, caz în care înmulțirea dintre un vector și un scalar să fie permisă doar în una dintre părți sau, dacă este permisă în ambele, rezultatele să nu coincidă. Pentru acele situații există noțiunea de *spațiu vectorial stîng*, respectiv *drept*, notate ${}_K V$ și V_K.

Deoarece în această lucrare vom avea nevoie doar de cazul comutativ, nu vom mai face precizarea de fiecare dată, dar vom lucra cu un corp comutativ de scalari, ceea ce face ca spațiul vectorial să fie bilateral.

Propoziţie 2.1: *Fie V un K-spațiu vectorial. Au loc următoarele proprietăți:*

(a) $(\alpha - \beta) \cdot x = \alpha \cdot x - \beta \cdot x, \forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in V$*;*

(b) $\alpha \cdot (x - y) = \alpha \cdot x - \alpha \cdot y, \forall \alpha \in K, \forall x, y \in V$*;*

(c) $0_K \cdot x = 0_V, \forall x \in V$*;*

(d) $(-\alpha) \cdot x = \alpha \cdot (-x) = -\alpha \cdot x, \forall \alpha \in K, \forall x \in V$*;*

(e) Dacă $\alpha \cdot x = 0_V$*, atunci* $\alpha = 0_K$ *sau* $x = 0_V$*.*

Demonstrația propoziției este simplă și lăsată ca exercițiu, folosind axiomele din definiție.

Primele exemple simple, dar foarte importante (prototipice, după cum vom vedea) sînt următoarele:

Exemplu 2.1: (1) K este un spațiu vectorial peste el însuși, cu operațiile de corp, legea externă confundîndu-se cu cea internă.

(2) Mulțimea $K^n = K \times K \times \cdots \times K = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in K\}$, unde K este un corp comutativ, este un spațiu vectorial peste K, numit *spațiul aritmetic*, în raport cu legile de compoziție pe componente, pentru $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in K^n$:

$$\begin{aligned} + &: K^n \times K^n \longrightarrow K^n, x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n); \\ \cdot &: K \times K^n \longrightarrow K^n, \alpha \cdot x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n). \end{aligned}$$

(3) Mulțimea matricelor $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ este un spațiu vectorial peste K, operația internă fiind adunarea obișnuită a matricelor, iar operația de înmulțire cu scalari fiind cea corespunzătoare, prin care se înmulțesc toate elementele matricei cu scalarul respectiv.

(4) Fie mulțimea $\mathbb{R}[X]_{\leq n} = \{p \in \mathbb{R}[X] \mid grad(p) \leq n\}$. Această mulțime este un spațiu vectorial real, cu operațiile de adunare a polinoamelor și înmulțire cu scalari.

(5) Mulțimea soluțiilor unui sistem liniar și omogen formează un spațiu vectorial peste corpul coeficienților acestui sistem, K. Soluțiile unui sistem cu m ecuații și n necunoscute pot fi privite ca elemente din K^n, care se adună și înmulțesc cu scalari respectînd operațiile din spațiul aritmetic de mai sus. Datorită transformărilor elementare care produc matrice echivalente, rezultatul va fi alcătuit tot din soluții ale sistemului.

Ca în toate cazurile cînd introducem o nouă structură, este de folos să studiem *substructuri* ale acesteia. Așadar, fie V un K-spațiu vectorial și $W \subseteq V$ o submulțime nevidă.

Definiție 2.3: W se numește *subspațiu vectorial* al lui V dacă operațiile algebrice pe V induc pe W o structură de spațiu vectorial peste K.

Vom nota $W \leq_K V$.

Observație 2.2: Condiția ca $0_V \in W$ este una necesară pentru structura de subspațiu, datorită structurii subiacente de subgrup aditiv.

Așa cum în cazul subgrupurilor, verificarea substructurii se face printr-un rezultat ajutător mai degrabă decît prin definiție, și în cazul spațiilor vectoriale avem:

Propoziție 2.2: *Dacă W este o submulțime nevidă a K-spațiului vectorial V, atunci următoarele afirmații sînt echivalente:*

(1) $W \leq_K V$;

(2) $\forall x, y \in W, \forall \alpha \in K$, *avem* $x + y \in W$ *și* $\alpha \cdot x \in W$;

(3) $\forall x, y \in W, \forall \alpha, \beta \in K$, *avem* $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in W$.

Propoziția poate fi pusă sub forma:

$$W \leq_K V \Longleftrightarrow \alpha \cdot x + \beta \cdot y \in W, \forall x, y \in W, \alpha, \beta \in K.$$

Să luăm cîteva exemple corespunzătoare spațiilor introduse mai sus:

Exemplu 2.2: (1) Mulțimea $\{0_V\}$ este un subspațiu vectorial al lui V, numit *subspațiul nul.* De asemenea, $V \leq_K V$, iar aceste două exemple se numesc *subspații improprii*, celelalte fiind *proprii.*

(2) Mulțimea $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$ definită mai sus este un subspațiu vectorial al spațiului polinoamelor cu coeficienți reali.

(3) Submulțimea $W = \{(x_1, x_2) \mid 3x_1 - 5x_2 = 0\}$ este un subspațiu vectorial al spațiului aritmetic $\mathbb{R}^2$. Ea poate fi asimilată cu spațiul soluțiilor unui sistem liniar și omogen cu o ecuație și două necunoscute.

(4) În spațiul aritmetic $\mathbb{R}^3$, dreptele și planele care conțin originea sînt subspații vectoriale.

În continuare, vom vedea cum putem obține subspații noi din unele deja existente, prin diverse operații permise.

Definiție 2.4: Fie V un K-spațiu vectorial și V_1, V_2 două subspații ale sale. Mulțimea:

$$V_1 + V_2 = \{x \in V \mid x = x_1 + x_2, x_1 \in V_1, x_2 \in V_2\}$$

se numește *suma subspațiilor* V_1 și V_2.

Propoziție 2.3: *Fie V un K-spațiu vectorial și V_1, V_2 două subspații ale sale. Atunci:*

(a) $V_1 \cap V_2 \leq_K V$;

(b) $V_1 + V_2 \leq_K V$.

Trebuie remarcat că, în general, reuniunea a două subspații *nu* este un subspațiu vectorial.

Pentru a pregăti o nouă operații pe baza sumei, avem nevoie de următoarea:

Propoziție 2.4: *Fie V_1, V_2 două subspații vectoriale ale K-spațiului V. Orice vector din V se scrie în mod unic ca suma dintre un vector din V_1 și unul din V_2 dacă și numai dacă $V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$.*

Pe baza acesteia, introducem:

Definiție 2.5: Fie $V_1, V_2 \leq_K V$, cu $V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$. Suma $V_1 + V_2$ se numește *suma directă* și se notează $V_1 \oplus V_2$. În acest caz, subspațiile V_1 și V_2 se numesc *suplementare*

Un exemplu care ne arată utilizarea spațiilor vectoriale pornind de la o problemă „normală“ este următorul. Orice funcție $f : (-a, a) \longrightarrow \mathbb{R}$ este suma dintre o funcție pară și una impară:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) + f(-x)\right] + \frac{1}{2}\left[f(x) - f(-x)\right], \forall x \in (-a, a).$$

Mai mult, singura funcție care este simultan pară și impară este funcția nulă. Rezultă de aici că subspațiul funcțiilor pare și subspațiul funcțiilor impare sînt suplementare. În prealabil, ar trebui notat că mulțimea $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$ de funcții reale formează un spațiu vectorial real, operațiile fiind cele punctuale:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x), \forall f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}), \forall \alpha, x \in \mathbb{R}.$$

Definiţie 2.6: Fie V un K-spațiu vectorial și $S = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq V$ o submulțime nevidă a lui V: Un vector de forma:

$$v = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n \cdot x_n, \alpha_i \in K, x_i \in S, \forall i$$

se numește *combinație liniară* finită de elemente din S. Se notează, folosind terminologia engleză, $Sp(S)$[1]sau, în unele cazuri, $\langle S \rangle_K$.

[2]

Din definiție, se vede imediat că are loc:

Propoziţie 2.5: *Cu notațiile și contextul de mai sus, $Span(S)$ este subspațiu vectorial al lui V. El se mai numește* subspațiul generat de S *sau* acoperirea liniară *a lui S.*

Se pot demonstra și observa cu ușurință următoarele:

Observaţie 2.3: (1) $S = \emptyset \Longrightarrow Span(S) = \{0_V\}$;

(2) $V_1 + V_2 = Span(V_1 \cup V_2)$;

(3) $Span(S)$ este intersecția tuturor subspațiilor lui V ce conțin pe S;

(4) Diferite submulțimi de vectori din V pot avea aceeași acoperire liniară.

Ne pregătim pentru introducerea unei noțiuni fundamentale pentru spații vectoriale, anume aceea de *bază*. Dar mai întîi, avem nevoie de alte preliminarii.

Definiţie 2.7: Păstrînd notațiile și contextul de mai sus, sistemul de vectori S se numește *liniar independent* sau *liber* dacă din egalitatea $\sum_i \alpha_i x_i = 0_V$, cu $\alpha_i \in K$ rezultă cu necesitate că toți $\alpha_i = 0$.

Sistemul se numește *liniar dependent* sau *legat* dacă există α_i, nu toți nuli, astfel încît $\sum_i \alpha_i x_i = 0_V$.

Cu acestea, avem:

Propoziţie 2.6: *Fie K-spațiul vectorial V și submulțimea $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq V$.*

(a) Dacă $0_V \in S$, atunci S este liniar dependent;

(b) Dacă S este liniar independent, atunci $x_i \neq 0_V, \forall i$;

(c) Dacă S este liniar dependent, atunci pentru orice $S' \subseteq V, S \subseteq S'$, rezultă că S' este liniar dependent;

(d) Dacă S este liniar independent, atunci pentru orice $S'' \subseteq S$, rezultă că S'' este liniar independent.

[2]de la englezescul *span*, adică acoperire, întindere

Demonstrație. (a) Fie $x_n = 0_V \in S$. Deoarece are loc egalitatea:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 1 \cdot x_n = 0_V,$$

care nu are toți coeficienții nuli, rezultă că S este liniar dependent.

(b) Dacă $x_i = 0_V \in S$, atunci, conform punctului anterior, S este liniar dependent, care este o contradicție.

(c) Deoarece S este liniar dependent, rezultă că există o combinație liniară nulă, care nu are toți coeficienții nuli. Atunci putem mări oricît această combinație liniară, adăugînd scalari nuli pentru toți ceilalți vectori și rezultă că, oricum am mări pe S, obținem un sistem liniar dependent.

(d) Dacă S'' ar fi liniar dependent, atunci și S ar trebui să fie liniar dependent, din subpunctul anterior, contradicție. □

Păstrînd notațiile și contextul, avem:

Definiție 2.8: Mulțimea S se numește *sistem de generatori* pentru V dacă orice vector $x \in V$ se exprimă ca o combinație liniară de vectori din S. În acest caz, spațiul vectorial V se numește *finit generat*, deoarece S conține un număr finit de elemente.

De exemplu, folosind și intuiția geometrică, avem că mulțimea $S = \{(1,0), (0,1)\}$ este un sistem de generatori pentru planul $\mathbb{R}^2$.

Operațiile permise asupra unui sistem de generatori, care să-l facă să rămînă sistem de generatori sînt prezentate în rezultatul următor.

Propoziție 2.7: *Fie K-spațiul vectorial V și $S = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq V$ un sistem de generatori. Următoarele operații transformă sistemul S într-un nou sistem S', care rămîne sistem de generatori pentru V:*

(a) schimbarea ordinii vectorilor din S;

(b) înmulțirea unui vector din S cu un scalar nenul;

(c) adăugarea la un vector din S a unui alt vector din S, înmulțit, eventual, cu un scalar nenul.

Demonstrația este evidentă și se bazează pe „stabilitatea“ spațiilor vectoriale la combinații liniare.

Teoremă 2.1 (Teorema schimbului)**:** *Fie V un K-spațiu vectorial, $S = \{u_1, u_2, \dots, u_s\}$ un sistem liniar independent din V și $S' = \{v_1, \dots, v_m\}$ un sistem de generatori pentru V. Atunci $s \leq m$ și, după o eventuală reindexare a vectorilor din S', sistemul:*

$$S'' = \{u_1, u_2, \dots, u_s, v_{s+1}, \dots, v_m\}$$

este tot un sistem de generatori pentru V.

Demonstrația se poate face simplu prin inducție după s.

Din această teoremă rezultă că, într-un spațiu vectorial finit generat, orice sistem de vectori liniar independenți are mai puține elemente decît orice sistem de generatori. În plus, în orice sistem de generatori, se pot înlocui vectorii cu alții, liniar independenți, fără ca proprietatea de a fi sistem de generatori a sistemului să fie afectată.

2.2 Bază și dimensiune

Ajungem, în sfîrșit, la elementul fundamental din studiul spațiilor vectoriale, anume noțiunea de *bază*, care ne va permite să extragem toate informațiile relevante în studiul spațiilor vectoriale.

Definiţie 2.9: Fie V un K-spațiu vectorial. Un sistem de vectori $\mathcal{B} \subseteq V$ se numește *bază* în V dacă $\mathcal{B}$ este simultan un sistem liniar independent și sistem de generatori pentru V.

De exemplu, în spațiul aritmetic K^n, mulțimea $B = \{e_1, \dots, e_n\}$, unde e_i este un șir de n zerouri, cu elementul 1 pe poziția i este o bază, denumită *baza canonică*.

În spațiul real al polinoamelor cu coeficienți reali și de grad cel mult n, notat $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$, mulțimea $B = \{1, X, X^2, \dots, X^n\}$ este o bază.

În spațiul vectorial al matricelor de tip (m, n) cu elemente din K, o bază este dată de matricele $E_{ij} = (e_{ij})$, care au 1 la intersecția linei i cu coloana j și zero în rest.

Definiţie 2.10: Un spațiu vectorial V se numește *finit dimensional* dacă admite o bază finită. În caz contrar, el se numește *infinit dimensional*.

Un rezultat foarte important este următorul:

Propoziţie 2.8: *Orice două baze dintr-un K-spațiu vectorial finit dimensional au același număr de elemente.*

Demonstrația rezultă imediat din teorema schimbului, aplicată pentru două din bazele spațiului.

Datorită acestui rezultat, avem:

Definiţie 2.11: Numărul comun de elemente ale tuturor bazelor unui spațiu vectorial V se numește *dimensiune* a spațiului, notată $dim_K V$.

Din exemplele de mai sus, rezultă că $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[X]_{\leq n} = n + 1$ și $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_{m,n}(K) = m \cdot n$.

De asemenea, din proprietățile și noțiunile de pînă acum, avem imediat:

Propoziţie 2.9: *Fie V un K-spațiu vectorial finit dimensional și $B = \{x_1, \dots, x_n\}$ o submulțime a sa. Atunci B este o bază în V dacă și numai dacă orice vector din V are o exprimare unică sub forma unei combinații liniare de vectori din B.*

Demonstraţie. Dacă B este bază, atunci B este sistem de generatori pentru V. Rezultă că orice vector din V poate fi scris ca o combinație liniară de elemente din B. Unicitatea reprezentării se obține astfel: fie $x = \sum_i \alpha_i x_i = \sum \beta_i x_i$ două scrieri diferite pentru x. Atunci $\sum(\alpha_i - \beta_i) \cdot x_i = 0$ și, deoarece B este și sistem liniar independent, avem $\alpha_i = \beta_i$, pentru orice i.

Reciproc, din ipoteză, avem că B este sistem de generatori pentru V. Pentru a arăta independența liniară, considerăm o combinație liniară nulă. Dar și vectorul nul poate fi scris ca o combinație liniară a vectorilor din B, cu scalari nuli. Din unicitatea reprezentării vectorului 0_V, rezultă că toți scalarii din prima combinație sînt egali cu cei dintr-a doua, adică nuli. □

Definiţie 2.12: Fie V un K-spațiu vectorial și B o bază a sa. Fie $x \in V$, scris în baza B sub forma $x = \sum_i \alpha_i x_i$. Scalarii (unici) $\alpha_i \in K$ se numesc *coordonatele* vectorului x în baza B. Funcția bijectivă $f : V \longrightarrow K^n$, care asociază unui vector coordonatele sale într-o bază se numește *sistem de coordonate.*

Următorul rezultat ne poate ajuta să găsim o bază într-un spațiu vectorial finit dimensional.

Propoziţie 2.10: *Fie V un K-spațiu vectorial de dimensiune n. Atunci:*

(a) Orice sistem liniar independent are cel mult n vectori;

(b) Orice sistem liniar independent care are exact n vectori este bază;

(c) Orice sistem de generatori are cel puțin n vectori;

(d) Orice sistem de generatori care are exact n vectori este bază.

De asemenea, avem și:

Teoremă 2.2: *Fie V un K-spațiu vectorial de dimensiune n și $S = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, cu $k \leq n$ o submulțime a sa, liniar independentă. Atunci există vectorii $\{x_{k+1}, \dots, x_{k+p}\}$ astfel încît mulțimea $\{x_1, \dots, x_{k+p}\}$ să formeze o bază, cu $k + p = n$.*

Din aceste ultime două rezultate, obținem:

Observaţie 2.4: (a) Din orice sistem liniar independent se poate extrage o bază.

(b) Orice sistem de generatori poate fi completat la o bază.

Date două subspații ale unui spațiu vectorial, ele contribuie la dimensiunea spațiului așa cum arată următorul rezultat.

Teoremă 2.3 (H. Grassmann)**:** *Dacă V_1 și V_2 sînt două subspații vectoriale ale K-spațiului vectorial finit dimensional V, atunci:*

$$\dim_K V_1 + \dim_K V_2 = \dim_K(V_1 + V_2) + \dim_K(V_1 \cap V_2).$$

2.3 Matricea unei aplicații liniare

Strînsa legătură între aplicații liniare și matrice, care justifică și importanța studiului aprofundat al exemplului dat de spațiul vectorial $M_n(\mathbb{R})$ constă în faptul că oricărei aplicații liniare i se poate asocia o matrice, într-o bază a spațiului vectorial. Aceasta se definește și se calculează foarte simplu:

Definiţie 2.13: Fie V, W două K-spații vectoriale și fie $B_1 = \{e_i\}_{i\in I}$ o bază a lui V, iar $B_2 = \{f_j\}_{j\in J}$ o bază a lui W.

Fie $f : V \longrightarrow W$ o aplicație liniară. Atunci, pentru orice vector $v \in V, f(v) \in W$, deci se poate scrie în baza B_2. În particular, pentru $v \in B_1$, obținem:

$$f(e_i) = \sum_j \alpha_{ij} f_j.$$

Matricea $A = (\alpha_{ij})_{i,j}$ se numește *matricea aplicației f în baza B_2*.

De exemplu: fie $V = \mathbb{R}^3$ și $W = \mathbb{R}^2$. Luăm bazele canonice:

$$\begin{aligned} B_1 &= \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \\ B_2 &= \{(1,0),(0,1)\}. \end{aligned}$$

Definim o aplicație liniară:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + x_2, 2x_2 + 3x_3).$$

Pentru a calcula matricea lui f în baza B_2, avem:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1,0,0) = (1,0) = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 \\ f(e_2) &= f(0,1,0) = (1,2) = 1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 \\ f(e_3) &= f(0,0,1) = (0,3) = 0 \cdot e_1 + 3 \cdot e_2. \end{aligned}$$

Matricea se obține acum din scalarii care sînt coeficienți în expresia de mai sus:

$$A = M_{B_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Observaţie 2.5: În unele cazuri, se lucrează cu A^t, deci coeficienții sînt puși *pe coloane* în matricea aplicației liniare. Urmăriți convenția de la curs, pe care o vom folosi.

Cu această legătură, multe din proprietățile morfismelor de spații vectoriale pot fi transferate studiului matriceal. În particular, calculul valorii aplicației liniare într-un vector oarecare coincide cu înmulțirea matricei aplicației liniare cu vectorul linie (sau coloană) respectiv. Avem și:

Exercițiu: Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$ o matrice nenulă, dar cu $\det(A) = 0$. Să se arate că există o matrice $B \in M_n(\mathbb{R})$, nenulă, dar cu $AB = 0_n$.

Soluție: Reformulăm problema în context de spații vectoriale. Așadar, lucrăm în spațiul vectorial $\mathbb{R}^{n^2}$, iar matricea A este gîndită ca matrice a unei aplicații liniare $f : \mathbb{R}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{R}^{n^2}$.

Proprietate importantă: Deoarece $\det(A) = 0$, deci A nu este inversabilă, rezultă că morfismul f nu este injectiv. Demonstrăm prin reducere la absurd. Fie $x \in \mathbb{R}^{n^2}$. Atunci a calcula $f(x)$ este echivalent cu a înmulți matricea A cu vectorul coloană x. Presupunem că avem $f(x) = f(y)$, pentru doi vectori $x, y \in \mathbb{R}^{n^2}$. Matriceal, avem $AX = AY$. Dar, deoarece A nu este inversabilă, nu o putem reduce pentru a concluziona că $X = Y$. Așadar, f nu este injectivă.

Dar, dacă f nu este injectivă, înseamnă că Ker(f) nu conține doar vectorul nul. În particular, rezultă că există un vector nenul $b \in$ Ker(f), cu $f(b) = 0_{R^{n^2}}$. Trecînd la matrice, vectorul b corespunde unei matrice nenule B, astfel încît $f(B) = AB = 0_n$.

Am demonstrat, astfel, parțial exercițiul. Pentru a finaliza demonstrația, arătați și:

Exercițiu: Orice morfism injectiv este inversabil la dreapta. Adică, dacă $f : A \longrightarrow B$ este un morfism injectiv (de grupuri, spații vectoriale, sau chiar funcție), există $g : B \longrightarrow A$, astfel încît $f \circ g = \text{Id}$, morfismul identitate.

Deduceți, în exercițiul anterior, că putem găsi chiar $B \in M_n(\mathbb{R})$ cu proprietatea din enunț. (Indicație: considerați g o posibilă inversă la dreapta a lui f, fie B matricea lui g în baza canonică și deduceți că $(f \circ g)(v) = ABV$.)

2.4 Matricea de trecere (schimbare de bază)

Date mai multe baze ale unui spațiu vectorial, sîntem interesați de schimbarea de coordonate ale vectorilor. Fie, pentru aceasta, un K-spațiu vectorial V de dimensiune n și $B_1 = \{u_1, \dots, u_n\}, B_2 = \{v_1, \dots, v_n\}$ baze în V.

Orice vector din B_2 se poate exprima unic în funcție de vectorii bazei B_1, deci $v_i = \sum_j c_{ji} u_j$. Acest sistem definește o matrice pătratică de ordin n, $M = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$, transpusa coeficienților.

Fie $\overline{B}_1$ și $\overline{B}_2$ matricele-coloană cu elemente din cele două baze. Atunci, folosind ecuația de mai sus, relația de legătură dintre vectorii celor două baze poate fi scrisă matriceal:

$$\overline{B}_2 = M^T \cdot \overline{B}_1.$$

Definiţie 2.14: Matricea M, astfel determinată, se numește *matricea de trecere* de la baza B_1 la baza B_2.

Pentru schimbarea coordonatelor, avem:

Teoremă 2.4 (Schimbarea coordonatelor)**:** *Dacă M este matricea de trecere de la baza B_1 la baza B_2, iar X_1, respectiv X_2 sînt vectorii coloană ai coordonatelor unui vector $x \in V$ în bazele B_1, respectiv B_2, atunci:*

$$X_2 = M^{-1} \cdot X_1.$$

În particular, rezultă că matricea de trecere M este inversabilă.

Definiție 2.15: Fie $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Se numește *rangul* lui T, notat rang(T), dimensiunea subspațiului Im(T).

Se numește *defectul* lui T, notat def(T), dimensiunea subspațiului Ker(T).

Teoremă 2.5 (Teorema rang-defect)**:** *Fie V și W două spații vectoriale peste același corp comutativ K, cu* $\dim_K V = n$ *și fie* $T \in \mathcal{L}(V, W)$. *Atunci:*

$$\operatorname{rang}(T) + \operatorname{def}(T) = n.$$

2.5 Exerciții

1. Fie $a \in \mathbb{R}$ fixat. Să se stabilească dacă legile de compoziție:

$$\oplus : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \oplus y = x + y - a$$
$$\otimes : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \alpha \otimes x = \alpha x + (1 - \alpha)a$$

determină o structură de spațiu vectorial real pe mulțimea $\mathbb{R}$.

2. Să se arate că mulțimea $(0, \infty)$ este un spațiu vectorial real în raport cu legile de compoziție:

$$\oplus : (0, \infty) \times (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty) x \oplus y = xy$$
$$\odot : \mathbb{R} \times (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty), \alpha \odot x = x^{\alpha}.$$

3. Să se arate că mulțimea

$$S = \{(\alpha - 2\beta; \alpha + 3\beta; \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

este un subspațiu vectorial al spațiului vectorial real $\mathbb{R}^3$. Determinați o bază în S, precum și $\dim_{\mathbb{R}} S$.

4. Se consideră mulțimea:

$$L = \left\{ A \in M_{2,3}(\mathbb{R}) \mid A = \begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & u & z \end{pmatrix}, x, y, z, u \in \mathbb{R}, x = y + z \right\}$$

(a) Să se arate că L este un subspațiu vectorial al lui $M_{2,3}(\mathbb{R})$;

(b) Determinați o bază în L, precum și $\dim_{\mathbb{R}} L$.

5. Se consideră sistemul omogen:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 & = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = 0 \end{cases}$$

Să se rezolve sistemul. Să se arate că mulțimea soluțiilor sistemului este un subspațiu vectorial al lui $\mathbb{R}^4$. Determinați o bază în subspațiul soluțiilor.

6. Să se arate că sistemul de vectori $\{v_1, \ldots, v_4\}$ din $\mathbb{R}^3$ este liniar dependent, unde:

$$v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (0, 1, 1), v_4 = (1, 1, 1).$$

7. Să se stabilească dacă vectorul $v = (4, -2, 0, 3)$ din spațiul vectorial real $\mathbb{R}^4$ este o combinație liniară a vectorilor $v_1 = (3, 9, -4, -2)$, $v_2 = (2, 3, 0, -1)$, $v_3 = (2, -1, 2, 1)$.

8. În $\mathbb{R}[X]_{\leq 2}$, spațiul polinoamelor reale de grad cel mult 2, să se găsească coordonatele polinomului $p(x) = 3x^2 - x + 4$ în raport cu baza B formată din $p_1(x) = x^2 - 1$, $p_2(x) = 2x + 1$, $p_3(x) = x^2 + 3$.

9. În spațiul vectorial real $\mathbb{R}^3$ se consideră baza canonică:

$$B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

și o altă bază:

$$B' = \{(1, 2, 1), (1, -1, 0), (3, 1, -2)\}.$$

Să se determine matricea de trecere de la baza B la baza B', precum și coordonatele vectorului $v = (2, 3, -5)$ în baza B'.

10. Fie V, W două spații vectoriale și $f : V \longrightarrow W$ o aplicație liniară.A Arătați că $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in V \mid f(x) = 0_W\}$ este un subspațiu al lui V, iar $\mathrm{Im}(f) = \{y \in W \mid \exists x \in V \text{ a.î } f(x) = y\}$ este subspațiu al lui W.

11. Fie V și W două K-spații vectoriale. Dați exemplu de astfel de spații și de o aplicație $f : V \longrightarrow W$ care să fie morfism între grupurile aditive $(V, +)$ și $(W, +)$, dar să nu fie K-liniară.

12. În spațiul vectorial real $\mathbb{R}^3$ se consideră vectorii:

$$v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (2, 3, 1), v_3 = (\alpha + 3, \alpha + 1, \alpha + 2), \alpha \in \mathbb{R}.$$

Să se determine α, știind că vectorii sînt liniar dependenți.

13. Fie $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4, f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 - x_3, x_1 + x_3, 2x_1 + x_2)$.

(a) Arătați că f este morfism de spații vectoriale;

(b) Determinați Ker(f);

(c) Determinați matricea aplicației liniare în baza canonică.

(d) Verificați teorema rang-defect.

14. Fie $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 - x_2 - x_3, x_1 + 3x_2 + x_4)$.

(a) Arătați că f este morfism de spații vectoriale.

(b) Determinați matricea aplicației f în baza canonică.

(c) Determinați Ker(f) și Im(f).

(d) Verificați teorema rang-defect.

15. Dați exemplu de un K-spațiu vectorial V și o submulțimea $W \subseteq V$ care să fie subgrup al lui $(V, +)$, dar să nu fie subspațiu vectorial al lui V.

16. Fie V un K-spațiu vectorial și $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ o mulțime de vectori din V. Fie $f : V \longrightarrow W$ o aplicație liniară. Notăm cu $f(S)$ imaginea mulțimii S prin morfismul f, deci $f(S) = \{f(v_i)\}$. Arătați că:

(a) Dacă S este liniar dependentă în V, atunci $f(S)$ este liniar dependentă în W;

(b) Dacă S este liniar independentă în V și f este injectivă, atunci $f(S)$ este liniar independentă în W;

(c) Dacă S este sistem de generatori în V și f este surjectiv, atunci $f(S)$ este sistem de generatori în W;

(d) Dacă S este bază în V și f este bijectiv, atunci $f(S)$ este bază în W. Deduceți de aici că orice două spații vectoriale izomorfe au aceeași dimensiune.

2.6 Exerciții suplimentare. Teorema lui Grassmann

1. Determinați o bază și dimensiunea următoarelor spații vectoriale:

(a) $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + y = 0\}$;

(b) $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$;

(c) $V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + y = z, \quad x + 2z = y\}$;

(d) $V_4 = \{p \in \mathbb{R}_2[X] \mid p(0) = 0\}$;

(e) $V_5 = \{p \in \mathbb{R}_2[X] \mid p'(0) = 0\}$;

(f) $V_6 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(A) = 0\}$;

(g) $V_7 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A = A^t\}$;

(h) $V_8 = \mathrm{Sp}\{v_1 = (-1, 1, 2), v_2 = (3, 0, 0)\}$;

(i) $V_9 = \mathrm{Sp}\{v = (-1, 1, 1)\}$;

(j) $V_{10} = \mathrm{Sp}\{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (2, 2, 2)\}$;

(k) $V_{11} = \mathrm{Sp}\{X + 1, X^2 + 1\}$;

(l) $V_{12} = \mathrm{Sp}\{X^2 + x, X + 1, 3X - 2\}$.

2. Pentru aplicațiile liniare următoare, determinați:

(i) matricea în baza canonică;

(ii) nucleul și imaginea, cu baze și dimensiuni;

(iii) precizați dacă aplicațiile sînt injective sau surjective.

(a) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x + y + z, x - y - z, 3z)$;

(b) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x + y, x + y, x + y)$;

(c) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x + y, 2x + 2y, z)$;

(d) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x - y, y - x, 3z - x)$;

(e) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (x - y - z, x + y + z)$;

(f) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (x + y + z, 3z)$:

(g) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (x, y)$;

(h) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x, y, x + y)$;

(i) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y) = (3x, y, x + y)$;

(j) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_2[X], f(x, y) = 3x + 4yX + xX^2$;

(k) $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^2, f(a + bX + cX^2) = (a + c, b)$;

(l) $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow M_2(\mathbb{R}), f(a + bX + cX^2) = \begin{pmatrix} a & b + c \\ b & a - c \end{pmatrix}$;

(m) $f : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_2[X], f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + c) + (b + d)X + (c - d)X^2$.

2.7 Teorema lui Grassmann

Fie V_1, V_2 două subspații ale unui K-spațiu vectorial V.

Definiţie 2.16: Se definește *suma subspațiilor* V_1 *și* V_2 prin:

$$V_1 + V_2 = \{v \in V \mid \exists v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, v = v_1 + v_2\}.$$

Dacă $V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$, suma se numește *directă* și se notează $V_1 \oplus V_2$.

Dacă $V_1 \oplus V_2 \simeq V$, atunci V_1 se numește *complementul* lui V_2 în V, iar V_2 se numește *complementul* lui V_1 în V.

O proprietate importantă a sumei directe este:

Teoremă 2.6: *Dacă* $V = V_1 \oplus V_2$, *atunci pentru orice vector* $v \in V$, *există componentele* unice $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ *astfel încît* $v = v_1 + v_2$.

Cu alte cuvinte, în cazul unei sume directe, orice vector din sumă se proiectează unic *pe cele două componente.*

Teoremă 2.7 (H. Grassmann)**:** *Fie* $V_1, V_2 \leq_K V$ *ca mai sus. Atunci are loc:*

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).$$

În particular:

$$\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2.$$

Rezultă că, dacă B_1 este o bază în V_1, iar B_2 este o bază în V_2, atunci:

- $B_1 \cup B_2$ este o bază în $V_1 + V_2$;
- $B_1 \cap B_2$ este o bază în $V_1 \cap V_2$.

Observaţie 2.6: Deoarece $V_1 + V_2 \leq_K V$ (demonstrați!), rezultă că:

$$\dim(V_1 + V_2) \leq \dim V.$$

2.8 Exerciții Grassmann

3. În continuarea exercițiului 1 de mai sus:

(a) Determinați, cu bază și dimensiune subspațiile:

- $V_1 + V_2$, $V_1 \cap V_2$;
- $V_2 + V_3$, $V_2 \cap V_3$;
- $V_4 + V_5$, $V_4 \cap V_5$;
- $V_8 + V_2$, $V_8 \cap V_2$;
- $V_9 + V_{10}$, $V_9 \cap V_{10}$;
- $V_{11} + V_5$, $V_{11} \cap V_5$;
- $V_{12} + \mathbb{R}_2[X]$, $V_{12} + \mathbb{R}_2[X]$.

(b) Decideți care dintre sumele de mai sus sînt directe.

4. În continuarea exercițiului 2 de mai sus, dacă notăm, în general, aplicația liniară $f : V \longrightarrow W$:

(a) Găsiți un subspațiu V' al lui V astfel încît $\mathrm{Ker} f \oplus V'$ să fie izomorf cu V;

(b) Găsiți un subspațiu W' al lui W astfel încît $\mathrm{Im} f \oplus W'$ să fie izomorf cu W.

Cu alte cuvinte, găsiți complementul lui $\mathrm{Ker} f$ în V și complementul lui $\mathrm{Im} f$ în W.

SEMINAR 3

VECTORI ȘI VALORI PROPRII. DIAGONALIZARE

3.1 Vectori și valori proprii

Fie V un K-spațiu vectorial și $f : V \longrightarrow V$ o aplicație liniară.

Definiţie 3.1: Un vector $v \in V$ se numește *vector propriu* (eng. *eigenvector*) pentru aplicația f dacă există un scalar $\lambda \in K$ astfel încît $f(v) = \lambda v$.

În acest caz, λ se numește *valoarea proprie* (eng. *eigenvalue*) asociată vectorului propriu v.

Rezultă că vectorii proprii sînt aceia pentru care aplicația liniară are o acțiune simplă, de „rescalare“, adică doar de înmulțire cu un scalar, care se numește valoarea proprie asociată.

Pașii pentru calculul vectorilor și valorilor proprii sînt:

(1) Presupunem $\dim V = n$. Scriem matricea aplicației f în baza canonică a lui V și obținem $A = M_f^B \in M_n(K)$;

(2) Scriem *polinomul caracteristic* al matricei, anume:

$$P(x) = \det(A - x \cdot I_n).$$

(3) Rădăcinile polinomului caracteristic sînt valorile proprii ale endomorfismului f. Mulțimea valorilor proprii se mai numește *spectrul* endomorfismului și se notează $\sigma(f)$.

(4) Pentru a găsi vectorii proprii asociați fiecărei valori proprii λ_i, se rezolvă ecuația $f(v_i) = \lambda_i v_i$ și se determină $v_i \in V$.

Alte elemente de terminologie:

Definiţie 3.2: Fie λ o valoare proprie a unui endomorfism f, iar v, vectorul propriu asociat.

Notăm $V(\lambda) = V_\lambda = \mathrm{Sp}(v)$ subspațiul lui V generat de v, numit *subspațiul invariant* (propriu) asociat lui v.

Dimensiunea acestui subspațiu se numește *multiplicitatea geometrică* a valorii proprii, notată $m_g(\lambda) = g(\lambda) = \dim V(\lambda)$.

Se numește *multiplicitatea algebrică* a valorii proprii λ, notată $m_a(\lambda) = a(\lambda)$, multiplicitatea rădăcinii $x = \lambda$ în polinomul caracteristic. Adică $a(\lambda) = n \iff P_A(x) \vdots (x - \lambda)^n$.

O proprietate importantă este:

Teoremă 3.1 (Cayley-Hamilton)**:** $P_A(A) = 0$*, unde* A *este polinomul caracteristic al matricei* A*.*

3.2 Matrice de trecere. Diagonalizare

Putem avea două sau mai multe baze ale aceluiași spațiu vectorial, iar între ele există o legătură strînsă, matriceală.

Fie $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ și $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ două baza ale aceluiași spațiu vectorial V. Se numește *matricea de trecere* de la baza B la baza C, notată M_B^C sau ${}^BM^C$, matricea coeficienților din scrierea vectorilor c_i în funcție de vectorii b_i. Mai precis, deoarece B este bază, avem:

$$\forall i, j, \quad c_i = \sum_j \alpha_{ij} b_j,$$

iar matricea de trecere este matricea (α_{ij}).

Definiţie 3.3: O matrice $A \in M_n(K)$ se numește *diagonalizabilă* dacă ea este asemenea cu o matrice diagonală D, care are elemente nenule doar pe diagonala principală.

Altfel spus, există $T \in M_n(K)$ inversabilă, cu $T^{-1}AT = D$.

Observaţie 3.1: Dacă matricea A este diagonalizabilă, atunci D din definiția de mai sus conține pe diagonală doar valorile proprii ale lui A.

Condițiile necesare și suficiente pentru diagonalizare sînt:

Teoremă 3.2: *Următoarele afirmații sînt echivalente:*

(a) Matricea A *este diagonalizabilă;*

(b) Există o bază a spațiului vectorial V *formată doar din vectorii proprii ai lui* A*;*

(c) $a(\lambda_i) = g(\lambda_i), \forall \lambda_i \in \sigma(A)$.

Evident, discuția are sens atît pentru cazul în care pornim cu o aplicație liniară, caz în care îi luăm matricea în baza canonică și lucrăm cu ea, cît și dacă pornim direct cu o matrice.

Pașii pentru diagonalizare sînt:

(1) Fixăm o bază B a lui V (e.g. baza canonică) și scriem $A = M_f^B$;

(2) Determinăm valorile proprii λ_i ale lui A și multiplicitățile lor geometrice;

(3) Pentru fiecare valoare proprie, determinăm vectorii proprii, subspațiile invariante, cîte o bază B_i în fiecare dintre acestea și multiplicitățile geometrice;

(4) Dacă există o valoare proprie λ_j cu $a(\lambda_j) \neq g(\lambda_j)$, algoritmul se oprește și matricea nu se poate diagonaliza;

(5) Dacă $a(\lambda_i) = g(\lambda_i), \forall i$, matricea se poate diagonaliza, iar $B' = \cup_i B_i$ este o bază a lui V, formată numai din vectori proprii;

(6) Se determină matricea de trecere de la baza B la baza B', notată T, care este inversabilă, iar forma diagonală este:
$$A \sim T^{-1}AT = \operatorname{diag}(\lambda_i).$$

Observaţie 3.2: Unul dintre avantajele diagonalizării matricelor este ușurința calculelor ulterioare. În particular, dacă $A = \operatorname{diag}(\lambda_i)$, atunci $A^k = \operatorname{diag}(\lambda_i^k), \forall k$.

3.3 Exerciții

1. Să se determine vectorii și valorile proprii pentru matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Fie aplicația liniară $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (-y, x, z)$.
Să se calculeze vectorii și valorile proprii ale lui f.

3. Aceeași cerința pentru:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x - z, 8x + y - 2z, z).$$

4. Fie aplicația liniară $f : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$, definită prin:

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + b + d & 2b + 4c + 5d \\ 2c + d & 8d \end{pmatrix}.$$

Să se arate că f nu este diagonalizabilă.

5. Să se diagonalizeze endomorfismul:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y).$$

6. Să se diagonalizeze matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

7. Determinați vectorii și valorile proprii pentru aplicația:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(a, b, c) = (a - b + c, b, b - c).$$

SEMINAR 4

MODELE DE PARȚIAL

4.1 Model 1

1. Fie spațiile vectoriale:

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + y = 0\}$$
$$V_2 = \mathrm{Sp}\{(1, -1, 1), (2, -1, 1)\}.$$

(a) Să se determine, cu bază și dimensiune, V_1, V_2;

Răspuns: $\dim V_1 = \dim V_2 = 2$. Baza în V_2 poate fi luată ca fiind cei doi vectori dați, iar în V_1 avem, de exemplu, $\{(1, -3, 0), (0, 0, 1)\}$.

(b) Să se determine, cu bază și dimensiune, $V_1 \cap V_2$, respectiv $V_1 + V_2$. Decideți dacă suma $V_1 + V_2$ este directă;

Răspuns: $\dim(V_1 + V_2) = 3 \implies \dim(V_1 \cap V_2) = 1$, deci suma *nu* este directă.

(c) Să se determine un subspațiu W al lui $\mathbb{R}^3$ astfel încît $V_1 \oplus W \simeq \mathbb{R}^3$.

Răspuns: $\dim W = 1$ și se alege astfel încît $W \cap V_1 = \{(0, 0, 0)\}$.

2. Fie aplicația liniară:

$$f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(a + bX + cX^2) = (a + c, 2b, c - b).$$

(a) Să se determine matricea lui f în baza canonică;

(b) Să se determine $\mathrm{Ker}f$ și $\mathrm{Im}f$, cu bază și dimensiune;

Răspuns: $\dim \mathrm{Ker}f = 0 \Longrightarrow \dim \mathrm{Im}f = 3$.

(c) Decideți dacă aplicația f este injectivă sau surjectivă.

Răspuns: Aplicația este și injectivă, și surjectivă.

3. Fie aplicația liniară:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(a, b, c) = (a, 2b, c - b).$$

Fie A matricea aplicației în baza canonică.

(a) Să se aducă matricea A la forma diagonală.

(b) Să se calculeze A^{21}.

(*) Fie $A \in M_5(\mathbb{R})$ astfel încît:

$$A^2 - 3 \cdot A + 2\mathrm{I}_5 = 0_5.$$

Aflați vectorii și valorile proprii ale lui A.
Răspuns: $\sigma(A) = \{1, 2\}$.

4.2 Model 2

1. Fie spațiile vectoriale:

$$V_1 = \{p \in \mathbb{R}_2[X] \mid p(0) = 0\}$$
$$V_2 = \mathrm{Sp}\{1 + X, X + X^2\}.$$

(a) Să se determine V_1 și V_2, cu bază și dimensiune.

Răspuns: $\dim V_1 = 2, \dim V_2 = 2$.

(b) Să se determine $V_1 + V_2$, cu bază și dimensiune.

Răspuns: $\dim V_1 + V_2 = 3$.

(c) Găsiți $W \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_2[X]$ astfel încît $W \oplus V_1 \simeq \mathbb{R}_2[X]$.

Răspuns: $\dim W = 1$, deci $W = \mathrm{Sp}\{f \in \mathbb{R}_2[X]\}$, astfel încît $W \cap V_1 = \{0\}$.

2. Fie aplicația liniară:

$$f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow M_2(\mathbb{R}), \quad f(a + bX + cX^2) = \begin{pmatrix} a & 2b \\ c - a & c - 2b \end{pmatrix}.$$

(a) Determinați matricea aplicației în baza canonică.

(b) Determinați $\mathrm{Ker} f$ și $\mathrm{Im} f$, cu baze și dimensiuni.

Răspuns: $\mathrm{Ker} f = \{0\} \Longrightarrow \dim \mathrm{Im} f = 3$.

(c) Determinați un subspațiu $V \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_2[X]$ astfel încît $V \oplus \mathrm{Ker} f \simeq \mathbb{R}_2[X]$.

(d) Decideți dacă aplicația f este injectivă sau surjectivă.

Răspuns: Aplicația este injectivă, dar nu este surjectivă.

3. Să se diagonalizeze matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

4.3 Model 3

Acesta este parțialul din 2017, Prof. A. Niță

Numărul 1

1. Fie aplicația liniară $f : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ definită prin:

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a - b - c) + (8a - d)X^2.$$

(a) Determinați matricea aplicației în bazele canonice.

(b) Determinați $\mathrm{Ker} f$ și $\mathrm{Im} f$, cu baze și dimensiuni.

Răspuns: $\dim \mathrm{Ker} f = 2 \Longrightarrow \dim \mathrm{Im} f = 2$.

(c) Găsiți un subspațiu $V \leq_{\mathbb{R}} M_2(\mathbb{R})$ astfel încît $V \oplus \mathrm{Ker} f \simeq M_2(\mathbb{R})$.

Răspuns: $\dim V = 2$, deci V este generat de o matrice care nu se găsește în nucleu.

2. Fie $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ o aplicație liniară, cu proprietatea că $f^2 - 3f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, unde $f^2 = f \circ f$, iar $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ este aplicația identitate.

Verificați dacă f este izomorfism.

Răspuns: Fie $A = M_f^{BC}$. Atunci $M_{f\circ f}^{BC} = A^2$, deci relația se rescrie:

$$A^2 - 3A = \mathrm{I}_3 \iff A(A - 3\mathrm{I}_3) = \mathrm{I}_3.$$

Cum A și $A - 3\mathrm{I}_3$ comută, rezultă $A^{-1} = A - 3\mathrm{I}_3$.

3. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Să se aducă matricea la forma canonică (diagonală).

4. Fie $A \in M_5(\mathbb{R})$ o matrice nediagonală, cu proprietatea că:

$$A^2 + 3A + 2I_5 = 0_5.$$

Calculați $\sigma(A)$.

Răspuns: $\sigma(A) = \{-1, -2\}$.

5. Fie spațiile:

$$V_1 = \mathrm{Sp}\{(2,1,3),(1,1,1)\}$$
$$V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y + 2z = 0\}.$$

Determinați $V_1, V_2, V_1 + V_2, V_1 \cap V_2$, cu baze și dimensiuni.

Răspuns: $\dim V_1 = 2, \dim V_2 = 2, \dim(V_1 + V_2) = 3, \dim V_1 \cap V_2 = 1$.

(*) [Teorie] Arătați că două spații vectoriale sînt izomorfe dacă și numai dacă au aceeași dimensiune.

Numărul 2

1. Fie aplicația liniară $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ definită prin:

$$f(a + bX + cX^2) = \begin{pmatrix} a - 8b & a - c \\ 0 & c - b \end{pmatrix}.$$

(a) Determinați $\mathrm{Ker} f, \mathrm{Im} f$ cu baze și dimensiuni, precum și matricea aplicației în bazele canonice.

(b) Găsiți un subspațiu $V \leq_{\mathbb{R}} M_2(\mathbb{R})$ astfel încît $V \oplus \mathrm{Im} f \simeq M_2(\mathbb{R})$.

2. Fie $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ o aplicație liniară, cu proprietatea că $f^2 - 4f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, unde $f^2 = f \circ f$, iar $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ este aplicația identică.

Este f izomorfism?

3. Să se aducă la forma diagonală matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Fie $A \in M_5(\mathbb{R})$ o matrice nediagonală, cu proprietatea:

$$A^2 + 5A + 6I_5 = 0_5.$$

Calculați $\sigma(A)$.

5. Fie spațiile:

$$V_1 = \mathrm{Sp}\{(1,2,1),(2,1,1)\}$$
$$V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 2y + z = 0\}.$$

Determinați $V_1, V_2, V_1 + V_2, V_1 \cap V_2$, cu baze și dimensiuni.

(*) [Teorie] Enunțați teorema de dimensiune a spațiului factor (cît).

SEMINAR 5

SPAȚII EUCLIDIENE. ORTONORMARE

Ne îndreptăm spre aplicațiile în geometria *clasică*, adică euclidiană, în care este esențial să putem calcula *lungimi (distanțe)* și *unghiuri.*

În liceu, puteam face aceasta folosind produsul scalar al doi vectori descompuși în reperul cartezian. Astfel, fie vectorii:

$$\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}, \quad \vec{w} = c\vec{i} + d\vec{j}, a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Avem:

- *produsul scalar:* $\vec{v} \cdot \vec{w} = ac + bd \in \mathbb{R}$;
- *lungimea vectorului* $v = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$;
- *cosinusul unghiului între doi vectori:* $\cos(\widehat{\vec{v}, \vec{w}}) = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{vw}$;
- vectorii sînt *perpendiculari* dacă $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.

Acestea sînt noțiunile pe care le extindem acum în cazul spațiilor vectoriale arbitrare. Vom prezenta pentru cazul spațiului real $V = \mathbb{R}^n$, celelalte rezolvîndu-se similar, prin intermediul izomorfismelor canonice.

Fie, deci, $v = (v_1, \dots, v_n)$, $w = (w_1, \dots, w_n)$ doi vectori din $\mathbb{R}^n$. Se definesc:

- **produsul scalar:**
$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i \in \mathbb{R};$$
- **norma vectorului:**
$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} \in \mathbb{R};$$

- **cosinusul unghiului între doi vectori:**

$$\cos(v, w) = \frac{\langle v, w}{\|v\| \cdot \|w\|} \in [-1, 1].$$

Avem și cazul particular de interes:

Definiţie 5.1: Doi vectori v și w din $\mathbb{R}^n$ se numesc *perpendiculari* (*ortogonali*), notat $v \perp w$, dacă $\langle v, w \rangle = 0$.

Cu acestea, avem:

Definiţie 5.2: Spațiul vectorial $\mathbb{R}^n$ se numește *euclidian*, deoarece este înzestrat cu produsul scalar de mai sus.

Aplicațiile care ne vor interesa sînt: calculul complementului ortogonal al unui subspațiu și ortonormarea unei baze.

Începem cu primul subiect.

Definiţie 5.3: Fie V un subspațiu al unui spațiu euclidian ($\mathbb{R}^n$, în majoritatea aplicațiilor). Se definește:

$$V^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \perp v, \forall v \in V\}$$

subspațiu care se numește *complementul ortogonal* al lui V.

O proprietate esențială, care ne va permite să găsim complementul ortogonal, este următoarea:

Teoremă 5.1: *Fie V un subspațiu al lui $\mathbb{R}^n$. Dacă $V^\perp$ este complementul său ortogonal, atunci:*

$$V \oplus V^\perp \simeq \mathbb{R}^n.$$

Rezultă, folosind teorema lui Grassmann și definiția sumei directe, că:

- $\dim V^\perp = \dim \mathbb{R}^n - \dim V$;
- $V^\perp \cap V = \{0\}$.

De asemenea, amintim că în $\mathbb{R}^2$, de exemplu, baza canonică formată din $\{(1, 0), (0, 1)\}$, pe care o putem înțelege și $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, are o proprietate specială. Mai precis, vectorii $\vec{i}$ și $\vec{j}$ sînt *versori*, adică $\vec{i} \perp \vec{j}$ și $i = j = 1$.

În orice spațiu euclidian, putem obține o bază similară, numită *bază ortonormată*, în două etape, folosind **procedeul Gram-Schmidt**.

Fie, așadar, $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ o bază arbitrară în $\mathbb{R}^n$. Vrem să obținem din ea o bază *ortonormată* $C = \{c_1, \dots, c_n\}$, adică să fie formată din versori:

- $c_i \perp c_j, \forall i \neq j$;

- $||c_i|| = 1, \forall i$.

Procedeul construiește pas cu pas c_i, pornind de la b_i.

(1) Alegem $c_1 = b_1$;

(2) Definim $c_2 = b_2 + \alpha c_1$, cu α un scalar pe care vrem să-l determinăm. Punem condiția $c_2 \perp c_1$ și rezultă:

$$0 = \langle c_2, c_1 \rangle = \langle b_2 + \alpha c_1, c_1 \rangle = \langle b_2, c_1 \rangle + \alpha \langle c_1, c_1 \rangle.$$

Așadar:

$$\alpha = -\frac{\langle b_2, c_1 \rangle}{\langle c_1, c_1 \rangle}.$$

(3) Continuăm mai departe să definim $c_3 = b_3 + \alpha c_2 + \beta c_1$ și determinăm α, β din condițiile $c_3 \perp c_2$ și $c_3 \perp c_1$.

(4) Procedeul continuă după regula generală:

$$c_i = b_i + \sum_{j=i-1}^{1} \alpha_j c_j,$$

iar condițiile pe care le vom putea folosi la fiecare pas, pentru determinarea constantelor α_j sînt $c_i \perp c_j, \forall j < i$, deoarece c_j au fost determinate la pașii anteriori.

Rezultă, cu aceasta, o bază *ortogonală* $C = \{c_1, \dots, c_n\}$. Această bază se *normează*, obținînd vectori de normă 1 foarte simplu. Definim:

$$c_i' = \frac{1}{||c_i||} \cdot c_i$$

și observăm că acum avem $||c_i'|| = 1$.

Așadar, baza $C' = \{c_1', \dots, c_n'\}$ este o *bază ortonormată*, adică formată doar din versori, iar procedeul se încheie.

5.1 Exerciții

1. Să se ortonormeze bazele:

(a) $B_1 = \{(1, 0, 1), (-1, 2, 0), (0, 1, -1)\}$ a lui $\mathbb{R}^3$;

(b) $B_2 = \{X + 1, X^2 + 1, 3\}$ a lui $\mathbb{R}_2[X]$;

(c) $B_3 = \{(1, -1, 0, 0), (0, 1, 1, -1), (1, 0, -1, 1), (2, 1, 0, 1)\}$ a lui $\mathbb{R}^4$.

2. Să se completeze mulțimea $\{(1,-1,2),(1,2,3)\}$ pînă la o bază a lui $\mathbb{R}^3$ și să se ortonormeze baza rezultată.

3. Să se completeze mulțimea $\{3, 2X+1\}$ pînă la o bază a lui $\mathbb{R}_2[X]$ și să se ortonormeze baza rezultată.

4. Găsiți complementele ortogonale pentru:

(a) $V_1 = \mathrm{Sp}\{(-1,1,2),(0,1,1)\}$ în $\mathbb{R}^3$;

(b) $V_2 = \mathrm{Sp}\{(1,1,1)\}$ în $\mathbb{R}^3$;

(c) $V_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + y = 0\}$ în $\mathbb{R}^3$;

(d) $V_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\}$ în $\mathbb{R}^3$;

(e) $V_5 = \{p \in \mathbb{R}_2[X] \mid p'(0) = 0\}$ în $\mathbb{R}_2[X]$;

(f) $V_6 = \{p \in \mathbb{R}_2[X] \mid p(0) = 0\}$ în $\mathbb{R}_2[X]$;

(g) $V_7 = \mathrm{Sp}\{X\}$ în $\mathbb{R}_2[X]$;

(h) $V_8 = \mathrm{Sp}\{2, 5X^2\}$ în $\mathbb{R}_2[X]$;

(i) $V_9 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x + y = 0, y + z - t = 0\}$ în $\mathbb{R}^4$.

SEMINAR 6

FORMA CANONICĂ JORDAN. CONICE ȘI CUADRICE

6.1 Forma canonică Jordan

După cum am văzut, nu orice matrice poate fi adusă la forma diagonală. Însă vom vedea că, pentru spații vectoriale reale, orice matrice poate fi adusă la *forma canonică Jordan*, care este „aproape diagonală“, într-un anume sens.

Prezentarea de mai jos urmează materialul [Brînzănescu and Ştănăşilă, 1998], pp. 90–108.

Algoritmul va proceda similar cu cazul diagonalizării, în prima parte.

Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$ o matrice căreia vrem să-i găsim forma canonică Jordan.

- Se calculează polinomul caracteristic al matricei, $P_A(X)$, de unde se obțin valorile proprii, $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$;
- Pentru fiecare valoare proprie, se determină vectorii proprii și subspațiile invariante corespunzătoare;
- Pentru fiecare valoare proprie λ_i, definim matricea $M = A - \lambda_i I_n$. Observăm că $\mathrm{Ker} M = V(\lambda_i)$.

  Pentru această matrice, se calculează *șirul ascendent de nuclee*:

  $$V(\lambda_i) = \mathrm{Ker} M \subset \mathrm{Ker} M^2 \subset \cdots \subset \mathrm{Ker} M^s,$$

  ultimul spațiu notîndu-se fie $K(M)$, fie V^{λ_i} și numindu-se *nucleu stabil* al lui M.

  Prin definiție, $\dim V^{\lambda_i} = m_a(\lambda_i)$.
- Alegem vectori liniar independenți astfel:

– $u_1, \dots, u_{p_1} \in \mathrm{Ker} M^s - \mathrm{Ker} M^{s-1}$, astfel încît $\mathrm{Ker} M^{s-1} \oplus \mathrm{Sp}\{u_i\} \simeq \mathrm{Ker} M^s$. Altfel spus, completăm baza lui $\mathrm{Ker} M^{s-1}$ la o bază a lui $\mathrm{Ker} M^s$;

– Calculăm $M u_j^t \in \mathrm{Ker} M^{s-1} - \mathrm{Ker} M^{s-2}$ și completăm rezultatele la o bază a lui $\mathrm{Ker} M^{s-1}$.

– Continuăm acești pași și în final se obține o listă de forma:

$$\begin{cases} u_1, \dots, u_{p_1} \\ M u_1, \dots, M u_{p_1}, u_{p_1+1}, \dots, u_{p_2} \\ \dots \\ M^{s-1} u_1, \dots, M^{s-1} u p_1, \dots, u_{p_s} \end{cases}$$

ultima linie reprezentînd o bază pentru $V(\lambda_i)$, pe care o notăm cu B_1.

- Refacem pașii anteriori pentru fiecare valoare proprie și va rezulta $B = B_1 \cup \dots\ cup B_p$ o bază a lui $\mathbb{R}^n$;

- Fie T matricea de trecere de la baza canonică la această bază. Atunci forma canonică Jordan se scrie $J = T^{-1} A T$.

Observaţie 6.1: Dacă, în loc de matrice, se pornește cu un endomorfism f, se consideră mai întîi matricea asociată în baza canonică, A, apoi putem continua ca mai sus.

De asemenea, în locul matricei M, putem gîndi că definim un nou endomorfism $g = f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$.

6.1.1 Exemple rezolvate

Prezentăm în continuare cîteva exerciții rezolvate, în care insistăm pe elementele de noutate. Am omis calculele intermediare, pe care le puteți verifica ușor.

1. Fie matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & -4 & -3 \\ 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Calculăm forma canonică Jordan a acestei matrice.

Polinomul caracteristic este:

$$P_A(X) = \det(A - X I_3) = -(X+1)(X-2)^2,$$

deci avem două valori proprii $\lambda_1 = -1$, $m_a(-1) = 1$ și $\lambda_2 = 2$, $m_a(2) = 2$.

Fie $\lambda_1 = -1$. Definim $M = A - \lambda_1 I_3$. Atunci $\mathrm{Ker} M = V(\lambda_1) = \mathrm{Sp}\{(0, 1, -1)\}$. Deoarece $\dim V(\lambda_1) = 1 = m_g(\lambda_1) = m_a(\lambda_1)$, rezultă că șirul nucleelor are un singur termen, deci lista va conține doar $u_1 = (0, 1, -1)$.

Fie acum $\lambda_2 = 2$. Definim $M = A - \lambda_2 I_3$.

Calculăm $\text{Ker}M = V(\lambda_2) = \text{Sp}\{(1, 0, -1)\}$. Cum $m_a(\lambda_2) = 2$, rezultă că șirul nucleelor va conține un pas și va fi de forma $V(\lambda_2) \subset V^{\lambda_2}$. Într-adevăr, calculăm:

$$V^{\lambda_2} = \text{Ker}M^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}.$$

Alegem $u_2 \in V^{\lambda_2} - V(\lambda_2)$ astfel încît $V(\lambda_2) \oplus \text{Sp}\{u_2\} = V^{\lambda_2}$. Altfel spus, completăm baza lui $V(\lambda_2)$ la o bază a lui V^{λ_2}.

De exemplu, putem lua $u_2 = (-2, 1, 0)$. Mai departe, calculăm $Mu_2^t = (1, 0, -1)$.

Din lista $\{u_1, u_2, Mu_2^t\}$ obținem o bază a lui $\mathbb{R}^3$, iar matricea de trecere de la baza canonică va fi:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Iar forma canonică Jordan este:

$$J = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Spunem că această matrice este alcătuită din *2 blocuri Jordan*, unul de mărime 2, asociat valorii proprii 2, iar unul de mărime 1, asociat valorii proprii -1. Observați forma „aproape diagonală" a matricei: într-adevăr, blocul Jordan asociat valorii proprii 2 conține un element nenul sub diagonală.

2. Fie matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aducem această matrice la forma canonică Jordan.

Calculînd polinomul caracteristic, găsim:

$$P_A(X) = (X - 1)^4 \Longrightarrow \sigma(A) = \{1\}, m_a(1) = 4.$$

Rezultă că $V^\lambda \simeq \mathbb{R}^4$.

Calculăm spațiul vectorilor proprii și obținem:

$$V(\lambda) = \{(\alpha, \beta, -\beta, \alpha - 2\beta) \in \mathbb{R}^4\}.$$

Definim $M = A - \lambda I_4$ și avem $\text{Ker}M = V(\lambda)$.

Cum $m_g(\lambda) = 2$, rezultă că șirul nucleelor va avea 3 termeni:

$$V(\lambda) = \text{Ker}M \subset \text{Ker}M^2 \subset V^\lambda \simeq \mathbb{R}^4.$$

Calculînd M^2 și apoi KerM^2, obținem:

$$\mathrm{Ker}M^2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\},$$

deci un spațiu de dimensiune 3.

Alegem $u_1 \in V^\lambda - \mathrm{Ker}M^2$ astfel încît $\mathrm{Ker}M^2 \oplus \mathrm{Sp}\{u_1\} = V^\lambda$. Fie, de exemplu, $u_1 = (1, 0, 0, 0)$.

Calculăm $Mu_1^t = (0, -1, -1, 0)$ și $M^2u_1^t = (-2, -2, 2, 2)$.

Acum alegem $u_2 \in V(\lambda)$ astfel încît $\{M^2u_1^t, u_2\}$ să fie o bază a lui $V(\lambda)$. Fie, de exemplu, $u_2 = (1, 0, 0, 1)$.

Lista conține: u_1, Mu_1^t, M^2u_1, u_2, vectori independenți, suficienți pentru o bază a lui $\mathbb{R}^4$. Scriem matricea de trecere de la baza canonică:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

iar forma Jordan se obține a fi:

$$J = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observăm că această matrice este alcătuită dintr-un bloc de mărime 3 și unul de mărime 1, ambele corespunzătoare valorii proprii $\lambda = 1$.

6.1.2 Exerciții propuse

Aduceți la forma canonică Jordan endomorfismul:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (3x + y - z, 2y, x + y + z)$$

și matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

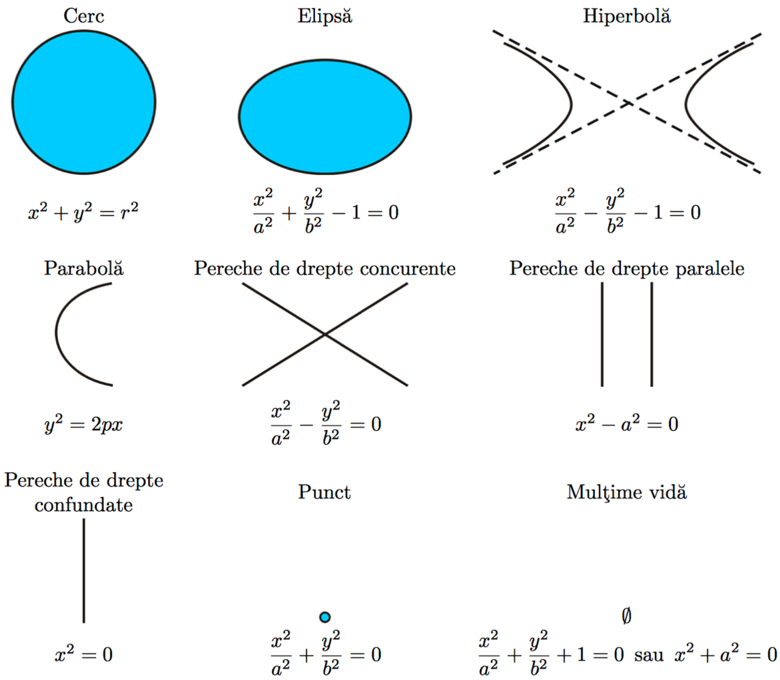


Figura 6.1: Conice și ecuațiile lor

6.2 Conice

Conicele sînt curbe plane, date de ecuații pătratice. Ele sînt reprezentate în figura 6.1, împreună cu ecuațiile canonice.

Scopul pe care ni-l propunem în această secțiune este să aducem o ecuație a unei conice la forma canonică și să o reprezentăm grafic.

Vom prezenta algoritmul direct pe un exemplu. Metoda aplicată se numește *metoda rototranslației*, deoarece va folosi o operație de rotație și una de translație a conicei.

Fie, de exemplu, conica:

$$g(x, y) = 3x^2 - 4xy - 2x + 4y - 3 = 0.$$

Mai întîi, se scrie *forma pătratică asociată*, adică alegem din conică termenii de grad total 2:

$$q(x, y) = 3x^2 - 4xy.$$

Apoi, scriem *matricea asociată lui q*, care este:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Această matrice se obține punînd coeficienții termenilor pătratici, în ordine lexicografică. Dacă $C(t)$ notează coeficientul termenului t, atunci matricea este, în forma generică:

$$A = \begin{pmatrix} C(x^2) & C(xy) \\ C(yx) & C(y^2) \end{pmatrix},$$

cu convenția că $C(xy) = C(yx)$, deci în matrice vom avea jumătate din coeficientul din forma pătratică.

Pentru această matrice, scriem ecuația caracteristică:

$$P_A(X) = \det(A - XI_2) = X^2 - 3X - 4 = (X + 1)(X - 4).$$

Rezultă că valorile proprii sînt $\sigma(A) = \{-1, 4\}$.

În acest punct, putem face o observație de anticipație. Se numește *invariantul* δ al conicei produsul valorilor proprii. Avem cazurile:

- $\delta = \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0 \implies$ conica este elipsă;
- $\delta = \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0 \implies$ conica este hiperbolă;
- $\delta = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0 \implies$ conica este parabolă.

În cazul nostru, vom obține o hiperbolă.

Mai departe, se calculează vectorii proprii și obținem:

$$V(\lambda_1) = \mathrm{Sp}\{(1, 2)\}, \quad V(\lambda_2) = \mathrm{Sp}\{(2, -1)\}.$$

Vectorii din bazele subspațiilor proprii trebuie *ortonormați* (de exemplu, folosind procedura Gram-Schmidt). Observăm că ei sînt deja ortogonali, deci mai trebuie doar să-i normăm:

$$\|(1, 2)\| = \|(2, -1)\| = \sqrt{5},$$

deci obținem *versorii proprii:*

$$e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \quad e_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$$

Acești versori vor alcătui coloanele *matricei de rotație*:

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

În general, o matrice de rotație de unghi θ (în sens trigonometric) are forma:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

și $\det R_\theta = 1$.

În cazul nostru, $\det R = -1$, deci putem schimba între ele coloanele și obținem o matrice de rotație (echivalent, putem schimba orientarea unuia dintre versori, de exemplu, $e_1 \longrightarrow -e_1$).

Apoi aplicăm rotația, adică, dacă (x, y) sînt vechile coordonate, coordonatele din sistemul rotit (x', y') se obțin din ecuația:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Cu alte cuvinte, avem sistemul:

$$\begin{cases} x & = \frac{-1}{\sqrt{5}} x_+ \frac{2}{\sqrt{5}} y_1 \\ y & = \frac{-2}{\sqrt{5}} x_1 + \frac{-1}{\sqrt{5}} y_1 \end{cases}.$$

Aceste coordonate se înlocuiesc în ecuația inițială a conicei și obținem *conica rotită*:

$$-x_1^2 + 4y_1^2 - \frac{6}{\sqrt{5}} x_1 - \frac{8}{\sqrt{5}} y_1 - 3 = 0.$$

Prelucrăm algebric, completînd pătratele, și obținem:

$$-\left(x_1 + \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(y_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 2.$$

Facem acum *translația*:

$$\begin{cases} X & = x_1 + \frac{3}{\sqrt{5}} \\ Y & = y_1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

și obținem:

$$-X^2 + 4Y^2 = 2 \iff -\left(\frac{X}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{Y}{1/2}\right)^2 = 1,$$

deci ecuația unei hiperbole.

Pentru reprezentarea grafică, trebuie să ținem cont de operațiile efectuate:

- rotația de unghi θ, cu proprietatea că $\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, deci $\theta \simeq \dfrac{2\pi}{3}$;
- translația centrului cu $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$ pe axa OX și $-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ pe axa OY.

Mai putem determina și *centrul conicei*, din sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x} & = 0 \\ \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} & = 0 \end{cases}$$

Soluția sistemului este centrul conicei, de coordonate $C(1, 1)$.

Reprezentarea grafică (folosind GeoGebra) este redată în figura 6.2.

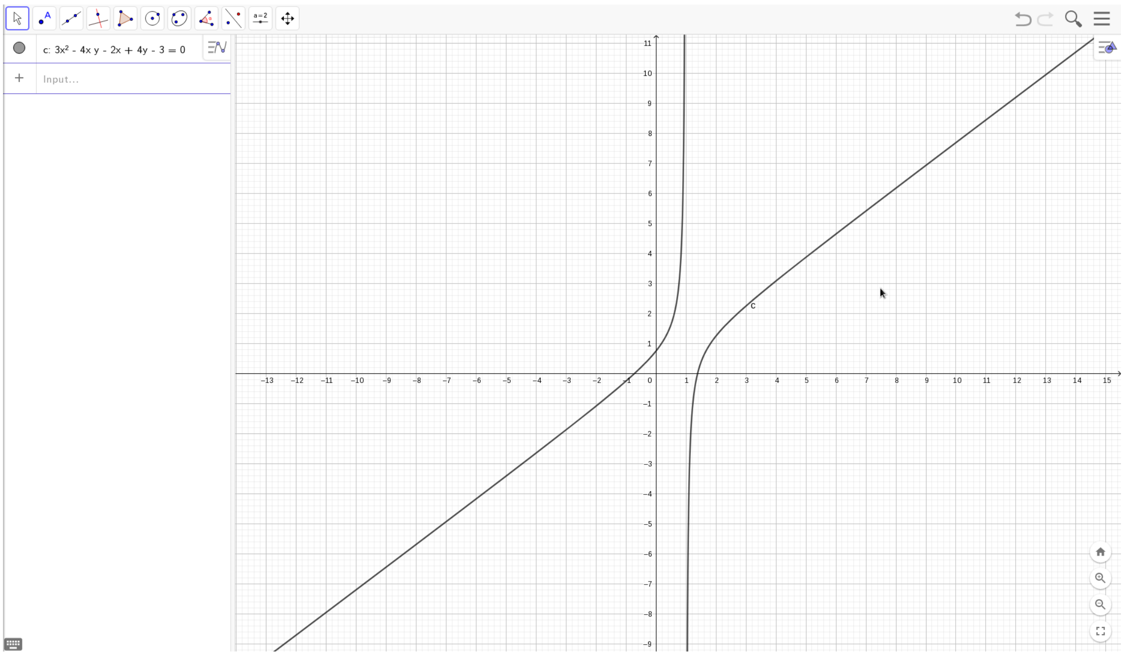


Figura 6.2: Hiperbola $3x^2 - 4xy - 2x + 4y - 3 = 0$

6.3 Cuadrice

Cuadricele sînt suprafețe care pot fi obținute prin rotirea unei conice în jurul unei axe. Astfel, din elipsă, de exemplu, obținem elipsoizi, din parabolă, paraboloizi, iar din hiperbolă, hiperboloizi.

Formele, împreună cu ecuațiile canonice, pot fi consultate, de exemplu, aici.

Procedura de a aduce o cuadrică la forma canonică funcționează ca în cazul conicelor.

Mai jos un exemplu rezolvat.

$$x^2 + 3y^2 + 4yz - 6x + 8y + 8 = 0.$$

Considerăm forma pătratică asociată:

$$g = x^2 + 3y^2 + 4yz,$$

care are matricea simetrică.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ecuația caracteristică rezultă: $(1 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 4) = 0$, deci $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 4$.

Găsim subspațiile invariante:

$$V(\lambda_1) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$
$$= \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

Similar:

$$V(\lambda_2) = \{(0, y, -2y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$
$$V(\lambda_3) = \{(0, 2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}.$$

Alegem vectori proprii ortonormați particularizînd elemente din subspațiile invariante. De exemplu:

$$e_1 = (1, 0, 0), \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 1, -2), \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 2, 1).$$

Matricea R cu acești vectori pe coloane are proprietatea $\det R = 1$, deci este o matrice de rotație. O aplicăm și găsim schimbarea de coordonate:

$$\begin{cases} x & = x' \\ y & = \frac{1}{\sqrt{5}}(y' + 2z') \\ z & = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2y' + z') \end{cases}$$

Ecuația cuadricei devine:

$$x'^2 - y'^2 + 4z'^2 - 6x' + \frac{8}{\sqrt{5}}y' + \frac{16}{\sqrt{5}}z' + 8 = 0.$$

Formăm pătrate și obținem:

$$(x' - 3)^2 - \left(y' - \frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(z' + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1 = 0.$$

Efectuăm translația corespunzătoare noilor coordonate și obținem:

$$X^2 - Y^2 + 4Z^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow X^2 - Y^2 + \frac{Z^2}{\frac{1}{4}} - 1 = 0,$$

adică un hiperboloid cu o pînză.

6.4 Exerciții propuse

1. Aduceți următoarele conice la forma canonică și reprezentați-le:

(a) $4xy - 3y^2 + 4x - 14y - 7 = 0$ (hiperbolă);

(b) $9x^2 - 6xy + y^2 + 20x = 0$ (parabolă);

(c) $x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x + 6y - 4 = 0$ (elipsă);

(d) $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$ (elipsă);

(e) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$ (parabolă)

2. Aceeași cerință pentru cuadrica:

$$x^2 - y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx - 5x - 1 = 0$$

(hiperboloid cu o pînză).

SEMINAR 7

ECUAȚII ȘI SISTEME DIFERENȚIALE

Dacă nu se precizează altfel, vom presupune că lucrăm cu funcții de forma $y = y(x)$, deci y' va însemna $\frac{dy}{dx}$.

7.1 Ecuații cu variabile separabile/separate

Acesta este cel mai simplu exemplu de ecuații diferențiale și se rezolvă direct prin integrare, după o reordonare corespunzătoare.

Exemplu 1: $(1 + x^2)yy' + x(1 + y^2) = 0$, știind că $y(1) = 2$.

Soluție: Separăm variabilele și diferențialele și obținem succesiv:

$$\begin{aligned}(1 + x^2)y \cdot \frac{dy}{dx} + x(1 + y^2) = 0 &\iff \\ (1 + x^2)ydy = -x(1 + y^2)dx &\iff \\ \frac{y}{1 + y^2}dy = -\frac{x}{1 + x^2}dx &\iff \\ \frac{1}{2}\ln(y^2 + 1) = -\frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + c&.\end{aligned}$$

Pentru uniformitate, putem pune $\frac{1}{2}\ln c$ în locul constantei.

Rezultă $1 + y^2 = \frac{c}{1+x^2}$, cu $c > 0$, pentru existența logaritmului.

Înlocuim în condiția inițială $y(1) = 2$ și obținem $c = 10$. În fine:

$$y(x) = \sqrt{\frac{9 - x^2}{1 + x^2}}, \quad x \in (-3, 3),$$

punând și condițiile de existență.

În unele cazuri, este util să facem schimbări de variabilă. De exemplu:
Exemplu 2: $y' = \sin^2(x - y)$.
Soluție: Notăm $x - y = z$ și avem că $y' = 1 - z'$, de unde, în ecuație, obținem succesiv:

$$\begin{aligned} z' &= 1 - \sin^2 z = \cos^2 z \Longrightarrow \\ \frac{dz}{dx} &= \cos^2 z \Longrightarrow \\ \frac{dz}{\cos^2 z} &= dx \Longrightarrow \\ \tan z &= x + c \Longrightarrow \\ \tan(x - y) &= x + c, \end{aligned}$$

care poate fi prelucrată pentru a obține $y(x)$ sau lăsată în forma implicită.

7.2 Ecuații liniare

Forma generală a acestor ecuații este:

$$y' = P(x) \cdot y + Q(x).$$

Distingem două cazuri:

- Dacă $Q = 0$, atunci ecuația se numește *omogenă*;
- Dacă $Q \neq 0$, ecuația este *neomogenă*.

Metoda generală de rezolvare este să folosim formula:

$$y(x) = c \cdot \exp\Big(- \int_{x_0}^{x} P(t)dt \Big),$$

pentru a obține o *soluție particulară pentru ecuația omogenă*. Apoi, din teorie, știm că putem folosi *metoda variației constantelor (Lagrange)* pentru a obține soluția ecuației neomogene. Pentru aceasta, în locul constantei c vom considera o funcție $c(x)$ și înlocuim în ecuația inițială.

Pe scurt, pentru ecuația liniară:

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

avem:

- Soluția particulară pentru varianta omogenă $y_p = c \cdot \exp\Big(- \int P(x)dx \Big)$;

- Soluția generală (din Lagrange):

$$y_g = \exp\left(- \int P(x)dx \right) \cdot \left(C + \int Q(x) \cdot \exp\left(\int P(x)dx \right) dx \right)$$

Soluția generală a problemei este suma între soluția particulară și cea generală.
Exemplu 1: $y' + y \sin x = -\sin x \cos x$.
Soluție: Putem înlocui direct în formulă și obținem $y = C \cdot e^{\cos x} - \cos x - 1$.

Exemplu 2: $y' + xy = xe^{-\frac{x^2}{2}}$.
Soluție: Asociem ecuația omogenă $y' + xy = 0$, pe care o rescriem:

$$\frac{dy}{dx} + xy = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{y} = -xdx \Longrightarrow y_p = ce^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Acum, folosind metoda lui Lagrange, căutăm o soluție de forma $y(x) = c(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$.
Înlocuim în ecuația inițială și găsim $y' + xy = c'(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$, dar, comparînd cu ecuația dată, găsim $c'(x) = x$, de unde $c(x) = \frac{x^2}{2}$.
Așadar, avem $y_g = \frac{x^2}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}$, iar soluția finală este suma celor două:

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + c \right) e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Exemplu 3: $2xyy' + 2y^2 - x^4 = 0$.
Soluție: Putem face o substituție $y^2 = z$, cu care ecuația devine $z' + \frac{2}{x}z = x^3$. Avem, în acest caz, $P(x) = \frac{2}{x}$, iar $Q(x) = x^3$. Cum $\int P(x)dx = 2\ln x$, iar $\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = \frac{x^6}{6}$, obținem soluția generală:

$$y(x) = \frac{1}{x}\sqrt{c + \frac{x^6}{6}}, x > 0.$$

7.3 Ecuația Bernoulli

Forma generală a ecuației Bernoulli este:

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}.$$

Remarcăm că:

- Dacă $\alpha = 0$, obținem o ecuație omogenă;

- Dacă $\alpha \neq 0$, obținem o ecuație neomogenă, ca în secțiunea anterioară.

Pașii de rezolvare sînt:

- Se împarte cu y^α și obținem:
$$y^{-\alpha}y' + P(x)y^{1-\alpha} = Q(x);$$

- Facem substituția $y^{1-\alpha} = z$ și ajungem la ecuația:
$$(1-\alpha)y^{1-\alpha} \cdot y' = z',$$
de unde $\frac{z'}{1-\alpha} + P(x)z = Q(x)$, care este o ecuație neomogenă, rezolvabilă ca în secțiunea anterioară.

Exemplu 1: $y' - \frac{y}{3x} = \frac{1}{3}y^4 \ln x, x > 0$.
Soluție: Avem $\alpha = 4$, deci împărțim la y^4 și obținem:
$$y^{-4}y' - \frac{1}{3x}y^{-3} = \frac{1}{3}\ln x.$$

Cu substituția $z = y^{-3}$, ajungem la:
$$z' = -3y^4y' \Longrightarrow z' + \frac{1}{x}z = -\ln x.$$

Avem $P(x) = \frac{1}{x}$ și $Q(x) = -\ln x$, deci putem aplica formula pentru soluția generală a ecuației neomogene:
$$z = e^{-\ln x}\left(c - \int \ln x e^{\ln x} dx\right) = \frac{1}{x}\left(c - \int x \ln x\right).$$

În fine:
$$y^{-3} = \frac{c}{x} + \frac{x}{4} - \frac{x}{2}\ln x, x > 0.$$

Exemplu 2: $y' + \frac{2}{3x}y = \frac{1}{3}y^2$.
Soluție: Avem $\alpha = 2$, deci împărțim la y^2 și ajungem la:
$$\frac{y'}{y^2} + \frac{2}{3x} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{3}.$$

Cu substituția $z = \frac{1}{y}$, avem $z' + \frac{2}{3x}z = \frac{1}{3}$, care este liniară și neomogenă.

Lucrăm cu ecuația omogenă $z' + \frac{2}{3x} = 0$, de unde $\frac{z'}{z} = \frac{2}{3x}$, care este cu variabile separabile și găsim $z = cx^{\frac{2}{3}}$, *pentru ecuația omogenă*.

Aplicăm acum metoda variației constantelor și luăm $z = c(x)x^{\frac{2}{3}}$. După înlocuire în ecuația inițială, avem $c(x) = -x^{\frac{1}{3}}$.

Soluția finală este acum suma $z = -x + cx^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{y}$.

7.4 Ecuația Riccati

Forma generală este:

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x).$$

Observăm că:

- Dacă $Q = 0$, avem o ecuație liniară și neomogenă;
- Dacă $R = 0$, este o ecuație Bernoulli, cu $\alpha = 2$.

În general, ecuația Riccati se rezolvă știind o soluție particulară y_p. Apoi, folosind formula $y = y_p + z$ și înlocuind, se ajunge la o ecuație Bernoulli:

$$z' + \big(p(x) + 2q(x)y_p\big)z + q(x)z^2 = 0.$$

Pentru a găsi soluții particulare, următoarea teoremă ne ajută într-un anumit caz:

Teoremă 7.1: *Dacă avem ecuația Riccati de forma:*

$$y' = Ay^2 + \frac{B}{x}y + \frac{C}{x^2},$$

unde $(B+1)^2 - 4AC \geq 0$*, atunci o soluție particulară este* $y_p = \frac{c}{x}$.

Exemplu 1: $y' = -\frac{1}{3}y^2 - \frac{2}{3x^2}, x > 0$.

Soluție: Aplicînd teorema, putem lua $y_p = \frac{1}{x}$ ca soluție particulară. Apoi căutăm o soluție generală de forma $y = \frac{1}{x} + z$, dar, pentru conveniență, putem lua $z \longrightarrow \frac{1}{z}$. Înlocuim în ecuație și obținem succesiv:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2} &= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{xz} + \frac{1}{z^2}\right) - \frac{2}{3x} \Longrightarrow \\ z' - \frac{2}{3x}z &= \frac{1}{3} \Longrightarrow \\ z &= Cx^{\frac{2}{3}} + x, \end{aligned}$$

de unde $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{Cx^{\frac{2}{3}} + x}$, cu $x > 0$.

7.5 Ecuația Clairaut

Forma generală a ecuației este:

$$y = xy' + \varphi(y').$$

Pentru rezolvare, se notează $y' = p$ și, înlocuind, avem:

$$y = xp + \varphi(p).$$

Derivăm după x și găsim:

$$p = p + x \cdot \frac{dp}{dx} + \varphi'(p) \cdot \frac{dp}{dx},$$

de unde $\left(x + \varphi'(p)\right) \frac{dp}{dx} = 0$.

Mai departe:

- Dacă $\frac{dp}{dx} = 0$, atunci $p = C$ și avem $y = C \cdot x + \varphi(c)$, ca soluție generală;
- Dacă $x + \varphi'(p) = 0$, obținem *soluția singulară*, care se prezintă parametric, adică în funcție de p, astfel:

$$\begin{cases} x & = -\varphi'(p) \\ y & = -p\varphi'(p) + \varphi(p) \end{cases}$$

Exemplu: $y = xy' - y'^2$.

Soluție: Notăm $y' = p$, deci $y = xp - p^2$.

Obținem, înlocuind în ecuație:

$$pdx + xdp - 2pdp = pdx \Longrightarrow (x - 2p)dp = 0.$$

Distingem cazurile:

- Dacă $dp = 0$, atunci $p = C$ și $y = Cx - C_2$, o soluție particulară;
- Soluția singulară se reprezintă parametric, corespunzător cazului $x - 2p = 0$, prin:

$$\begin{cases} x & = 2p \\ y & = p^2 \end{cases}$$

Revenind la y, găsim $y = \frac{x^2}{4}$.

Observaţie 7.1: Geometric, soluția generală este *înfășurătoarea* soluției particulare, adică o curbă care aproximează, din aproape în aproape, dreapta soluției particulare.

7.6 Ecuații exacte. Factor integrant

Forma generală este:

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0.$$

Dacă are loc $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, atunci ecuația se numește *exactă*, iar soluția ei generală se prezintă prin:

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt,$$

pentru orice (x, y) din domeniul de definiție, iar (x_0, y_0) un punct arbitrar fixat, în jurul căruia determinăm soluția.

Observaţie 7.2: Pentru simplitate, vom mai folosi notațiile $P_y = \frac{\partial P}{\partial y}$ și similar pentru Q_x. Deci condiția de exactitate se mai scrie, pe scurt, $P_y = Q_x$.

Exemplu: $(3x^2 - y) + (3y^2 - x)y' = 0$.

Soluție: Remarcăm că avem $P(x, y) = 3x^2 - x$ și $Q(x, y) = 3y^2 - x$, deci $P_y = Q_x = -1$, ecuația fiind exactă. Obținem direct, din formula pentru soluția generală:

$$F(x,y) = x^3 + y^3 - xy + x_0y_0 - x_0^3 - y_0^3.$$

Cum (x_0, y_0) sînt fixate, putem prezenta soluția în *forma implicită* $y = \varphi$, unde $\varphi = x^3+y^3-xy = c$, constanta fiind expresia de (x_0, y_0) de mai sus.

Dacă ecuația nu este exactă, se caută *un factor integrant*, adică o funcție $\mu(x, y)$ cu care se înmulțește ecuația pentru a deveni exactă.

Există două cazuri particulare în care factorul integrant se găsește simplu:

- Dacă expresia $\frac{P_y - Q_x}{Q}$ depinde doar de x, se poate lua $\mu = \mu(x)$;
- Dacă expresia $\frac{Q_x - P_y}{P}$ depinde doar de y, se poate lua $\mu = \mu(y)$.

În celelalte cazuri, factorul integrant, de obicei, se dă în enunțul problemei, deoarece este dificil de găsit, dar o teoremă de existență ne arată că el poate fi mereu găsit.

Observaţie 7.3: Pentru a reține mai ușor condițiile simple de căutare a factorului integrant, pornim cu ecuația în forma generală, înmulțim cu μ, ceea ce ne schimbă și P și Q, apoi scriem condiția de exactitate. Pentru primul caz, de exemplu, obținem:

$$\frac{\mu_x}{\mu} = \frac{P_y - Q_x}{Q},$$

deci dacă membrul drept depinde doar de x, putem lua $\mu = \mu(x)$ și similar în al doilea caz.

Odată găsit factorul integrant, să presupunem $\mu = \mu(x)$, integrăm condiția de exactitate și găsim:

$$\ln \mu(x) = \int \varphi(x) + c,$$

unde $\varphi(x) = \frac{P_y - Q_x}{Q}$ și deci $\mu(x) = \exp\left(\int \varphi(x) dx \right)$.

Exemplu: $(1 - x^2 y) + x^2(y - x)y' = 0$.

Soluție: Observăm că ecuația nu este exactă, dar verificînd condițiile pentru factorul integrant, putem lua $\mu(x) = \frac{1}{x^2}$. Înmulțim ecuația cu μ și găsim:

$$\left(\frac{1}{x^2} - y \right) + (y - x)y' = 0,$$

care este exactă. Atunci putem scrie direct soluția generală:

$$F(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{1}{x} - xy + C,$$

soluția implicită fiind $\frac{y^2}{2} - \frac{1}{x} - xy = \text{const.}$.

Exercițiu: Rezolvați ecuația $y^2(2x - 3y) + (7 - 3xy^2)y' = 0$, căutînd (după verificare) un factor integrant $\mu(y)$.

7.7 Ecuația Lagrange

Forma generală a ecuației Lagrange este:

$$A(y') \cdot y + B(y') \cdot x + C(y') = 0.$$

Dacă avem $A(y') \neq 0$, putem împărți și obținem:

$$y = f(y') + g(y'), \quad f(y') = \frac{-B(y')}{A(y')}, g(y') = -\frac{C(y')}{A(y')}.$$

Dacă $f(y') = y'$, obținem o ecuație de tip Clairaut.

Altfel, fie $y' = p$, deci $dy = pdx$. Înlocuim în ecuația inițială și găsim:

$$y = xf(p) + g(p) \Longrightarrow dy = f(p)dx + xf'(p)dp + g'(p)dp.$$

Egalăm cele două expresii pentru dy și ajungem la:

$$pdx = f(p)dx + xf'(p)dp + g'(p)dp.$$

În fine:

$$\big(f(p) - p\big)dx + \big(xf'(p) + g'(p)\big)dp = 0.$$

În acest caz, dacă $f(p)$ este o constantă, obținem o ecuație cu variabile separabile. Altfel, putem împărți la $(f(p) - p)dp$ și ajungem la:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{f'(p)}{f(p) - p}x + \frac{g'(p)}{f(p) - p} = 0.$$

Aceasta este o ecuație liniară și neomogenă în $x(p)$ și o rezolvăm corespunzător. Dacă $f(p) = p$, obținem o soluție particulară.

Exemplu: $y = x - \frac{4}{9}y'^2 + \frac{8}{27}y'^3$.
Soluție: Facem notația $y' = p$, deci $dy = pdx$. Obținem:

$$y = x - \frac{4}{9}p^2 + \frac{8}{27}p^3 \Longrightarrow dy = dx - \frac{8}{9}pdp + \frac{8}{9}p^2dp.$$

Rezultă $pdx = dx - \frac{8}{9}pdp + \frac{8}{9}p^2dp$, deci:

$$(p - 1)(dx - \frac{8}{9}pdp) = 0.$$

Distingem cazurile:

Dacă $dx = \frac{8}{9}pdp$, atunci $x = \frac{4}{9}p^2 + c$ și, înlocuind în ecuația inițială, găsim $y = \frac{8}{27}p^3 + c$. Soluția poate fi prezentată parametric:

$$\begin{cases} x &= \frac{4}{9}p^2 + c \\ y &= \frac{8}{27}p^3 + c \end{cases}$$

Dacă $p = 1$, avem o soluție particulară $y = x + c$, iar constanta se obține a fi $c = -\frac{4}{27}$, din ecuația inițială.

7.8 Sisteme diferențiale cu coeficienți constanți

Ca în cazul sistemelor de ecuații liniare, putem scrie un sistem în formă matriceală $X' = A \cdot X$, unde A este matricea coeficienților.

Distingem mai multe cazuri, în funcție de proprietățile matricei A.

Dacă A se diagonalizează, fie $\{\lambda_i\}$ valorile proprii ale sale, iar $\{u_i\}$ vectorii proprii asociați. Atunci funcțiile:

$$\{x_i(t) = e^{\lambda_i t} \cdot u_i\}_i$$

dau o bază în spațiul vectorial al soluțiilor. Soluția generală poate fi scrisă, atunci, ca o combinație liniară a acestora:

$$x(t) = \sum_i c_i x_i(t).$$

Se obișnuiește ca soluția să fie prezentată sub formă matriceală, alcătuind **matricea fundamentală** a sistemului: $X(t) = {}^t(e^{\lambda_i t} u_i)$.

Exemplu:

$$\begin{cases} x' &= x - y \\ y' &= -4x + y. \end{cases}$$

Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

Obținem $\lambda_1 = 1$ și $\lambda_2 = 3$. Cum acestea au multiplicitatea algebrică egală cu 1, rezultă că matricea se diagonalizează. Se obțin subspații proprii de dimensiune 1, bazele fiind, de exemplu:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Atunci soluția generală se scrie:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Atunci matricea fundamentală se scrie:

$$X(t) = \begin{pmatrix} C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} \\ 2C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Dacă A **nu se diagonalizează**, fie $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ valorile proprii, de multiplicități algebrice $n_1, \dots, n_k$. Atunci se caută soluții de forma:

$$x_j(t) = \sum_{i=1}^{k} P_{ij}(t) e^{\lambda_i t}, \quad \text{grad} P_{ij} \le n_i - 1.$$

Înlocuim în ecuația inițială și găsim P_{ij}. Această metodă poartă numele de **metoda coeficienților nedeterminați**.

Exemplu:

$$\begin{cases} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

Soluție: Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, care are valoarea proprie $\lambda = 1$, de multiplicitate algebrică 2. Se poate verifica faptul că matricea nu este diagonalizabilă și atunci căutăm soluții de forma:

$$\begin{cases} x_1(t) &= (A_1 + B_1 t)e^t \\ x_2(t) &= (A_2 + B_2 t)e^t \end{cases}$$

Înlocuim în sistem și obținem un sistem liniar cu necunoscutele A_1, A_2, B_1, B_2, care va fi dublu nedeterminat. Așadar, soluția se prezintă cu 2 parametri în forma:

$$(A_1, A_2, B_1, B_2) \in \{(\alpha, \alpha + \beta, \beta, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Rezultă că matricea fundamentală este:

$$X(t) = \begin{pmatrix} (\alpha + \beta t)e^t \\ (\alpha + \beta + \beta t)e^t \end{pmatrix}$$

Dacă matricea A nu se diagonalizează, iar $\lambda_i \in \mathbb{C}$, lucrăm cu numere complexe.
Exemplu:

$$\begin{cases} x_1' &= 2x_1 + x_2 \\ x_2' &= -8x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

știind că soluția conține la $t = 0$ punctul $M_0(1, 0)$.

Soluție: Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$.

Valorile sale proprii sînt $\lambda_{1,2} = \pm 2i$. Atunci subspațiul invariant va fi:

$$V_{\lambda_1} = \mathrm{Sp}\{(1, -2 + 2i)\}.$$

Obținem o soluție generală în forma:

$$x_1(t) = e^{2it} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 + 2i \end{pmatrix} = (\cos 2t + i \sin 2t) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 + 2i \end{pmatrix}.$$

Din proprietățile algebrice ale numerelor complexe, avem că $x_t(t) = \overline{x_1(t)}$ și atunci soluția generală va fi $x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$.

Folosind condițiile inițiale, avem că $x_1(0) = 1$ și $x_2(0) = 0$, deci $c_1 = c_2 = 1$.

7.9 Exponențiale matriceale și sisteme folosind forma Jordan

Exemplu: Fie matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Să se calculeze e^{At}, pentru $t \in \mathbb{R}$;

(b) Să se determine soluția generală a sistemului $X' = AX$, apoi soluția particulară care verifică condiția $x(0) = 1, y(0) = 2, z(0) = 0$.

Soluție:

(a) Matricea A are valorile proprii $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$. Vectorii proprii (baze în subspațiile invariante) sînt:

$$v_1 = (1, 1, 1), \quad v_2 = (1, 0, 1).$$

Forma canonică Jordan a matricei se obține a fi:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

folosind matricea de trecere

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deci $A = TJT^{-1}$.

Știm din teorie că $e^{At} = T \cdot e^{Jt} \cdot T^{-1}$.

Folosim acum dezvoltarea în serie Taylor a funcției exponențiale:

$$e^x = \sum_{n \geq 0} \frac{x}{n!},$$

adevărată și pentru matrice. În plus, dacă matricea este diagonală, exponențiala sa va conține exponențiala pe diagonală, adică, dacă $M = \mathrm{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, atunci $e^M = \mathrm{diag}(e^{x_1}, \dots, e^{x_n})$.

Pentru a folosi această proprietate, ne legăm de descompunerea în blocuri Jordan a lui A. Fie J_1 blocul Jordan de dimensiune 2, corespunzător valorii proprii $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ și J_2 blocul Jordan de dimensiune 1 corespunzător valorii proprii $\lambda_3 = 2$. Avem descompunerea pe blocuri și pentru exponențială:

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{J_1 t} & 0 \\ 0 & e^{J_2 t} \end{pmatrix}$$

Cum $e^{J_2 t} = e^{2t}$, calculăm celălalt bloc:

$$\begin{aligned} e^{J_1 t} &= e^{\begin{pmatrix} t & 0 \\ t & t \end{pmatrix}} \\ &= e^{\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix}} \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{1!} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ te^t & e^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Am folosit faptul că $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$, așadar din seria Taylor va fi suficient să păstrăm primii 2 termeni. Calculăm și T^{-1}, obținînd:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

găsim, în fine:

$$e^{At} = T \cdot e^{Jt} \cdot T^{-1} = \begin{pmatrix} e^t(t+2) - e^{2t} & e^t - e^{2t} & -e^t(t+2) + 2e^{2t} \\ te^t & e^t & -te^t \\ e^t(t+1) - e^{2t} & e^t - e^{2t} & -e^t(t+1) + 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

(b) Conform teoriei, soluția generală a sistemului este:

$$X(t) = e^{At} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix},$$

constantele C_i determinîndu-se din condițiile inițiale. În acest caz:

$$X(t) = e^{At} X(0) = e^{At} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplu 2: Să se determine soluția sistemului diferențial liniar neomogen:

$$\begin{cases} x' &= 2x - y \\ y' &= -x + 2z + e^t z \\ z' &= -y + 2, \end{cases}$$

știind că satisface condițiile inițiale $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Soluție: Fie matricele:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Atunci sistemul se scrie matriceal $X' = AX + B(t)$. Valorile proprii ale matricei A sînt $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ și $\lambda_3 = 2$. Avem vectorul propriu $(1, 1, 1)$ bază în $V_{\lambda_{1,2}}$ și vectorul $(2, 0, 1)$ bază în V_{λ_3}.

Aducem matricea A la forma canonică Jordan, folosind matricea de trecere:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Forma canonică Jordan se obține a fi:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Putem descompune matricea Jordan în două blocuri, unul de dimensiune 2 și unul de dimensiune 1, ceea ce ne ajută să calculăm:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 2e^{2t} - (t+1)e^t & -te^t & 2e^t(t+1) - 2e^{2t} \\ -te^t & (1-t)e^t & 2te^t \\ 2e^{2t} - (t+1)e^t & -te^t & 2e^t(t+1) - 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

Conform teoriei, obținem soluția problemei Cauchy (ținînd cont de valorile inițiale) sub forma:

$$X(t) = e^{At}X(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}B(s)ds.$$

Integrala se calculează integrînd fiecare din elementele matricei și obținem, în final:

$$X(t) = e^t \begin{pmatrix} -t - \frac{t^2}{2} \\ 1 - \frac{t^2}{2} \\ -t - \frac{t^2}{2} \end{pmatrix}$$

SEMINAR 8

RECAPITULARE EXAMEN

8.1 Model 1

1. Fie spațiul vectorial:

$$V = \{p \in \mathbb{R}_2[X] \mid p'(1) = 0\}.$$

(a) Găsiți complementul său ortogonal $V^{\perp}$.

(b) Găsiți o bază ortonormată în $V \oplus V^{\perp}$.

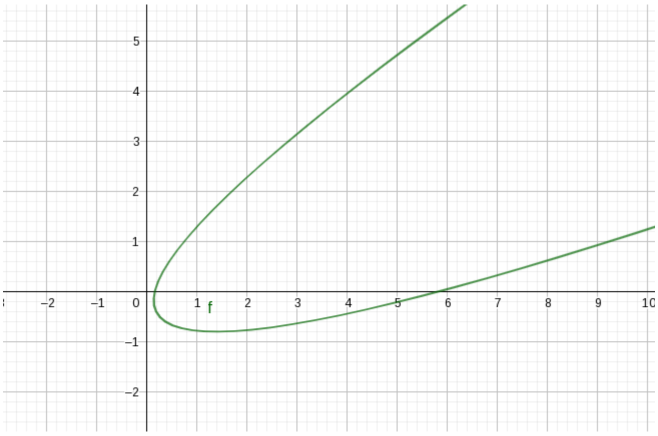
Indicații: (a) $V = \{aX^2 + bX + c \mid 2a + b = 0\}$, deci $\dim V = 2 \Longrightarrow \dim V^{\perp} = 1$.

(b) Se ia reuniunea bazelor din V și $V^{\perp}$, care este o bază a sumei directe. Se aplică Gram-Schmidt pentru aceasta.

2. Aduceți la forma canonică și desenați conica:

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x + 2y + 1 = 0.$$

Răspuns: Conica este o parabolă:



3. Rezolvați ecuațiile diferențiale:

(a) $(x + y - 2)dx + (x + y)dy = 0;$ (ecuație exactă)

(b) $xy' = y + x^2y^2, x > 0.$ (ecuație Riccati)

4. Rezolvați sistemul diferențial:

$$\begin{cases} x' &= y + z \\ y' &= x + z \\ z' &= x + y \end{cases}$$

cu condițiile inițiale $x(0) = -1, y(0) = 0, z(0) = 0$.

Indicație: Se aduce matricea sistemului la forma canonică Jordan: (matricea este chiar diagonalizabilă):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

apoi se calculează e^{At} folosind această formă simplificată.

8.2 Model 2

Fie spațiul vectorial:

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - 2z + t = 0\}.$$

(a) Găsiți complementul ortogonal, $V^{\perp}$;

(b) Găsiți o bază ortonormată în V.

Indicație: $\dim V = 3$, deci $\dim V^{\perp} = 1$. Avem:

$$V = \{(-\alpha + 2\beta - \gamma, \alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^4\} = \mathrm{Sp}\{(-1,1,0,0),(2,0,1,0),(-1,0,0,1)\}$$

și se alege $V = \mathrm{Sp}\{(a,b,c,d)\}$ astfel încît

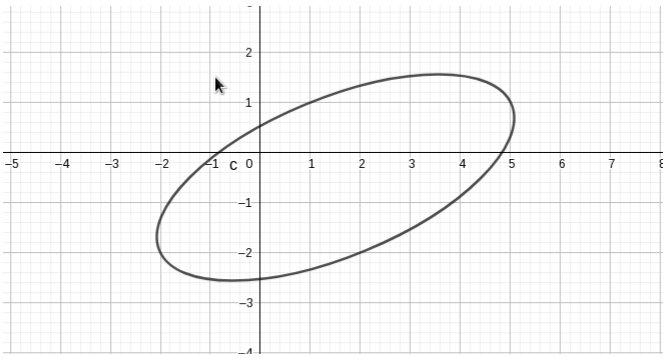
$$\langle (a,b,c,d), v\rangle = 0,$$

unde v este, pe rînd, fiecare vector din baza lui V.

2. Aduceți la forma canonică și reprezentați conica:

$$x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x + 6y - 4 = 0.$$

Răspuns: Conica este o elipsă:



3. Rezolvați ecuațiile diferențiale:

(a) $y' + y\sin x = -\sin x\cos x$; (ecuație liniară și neomogenă)

(b) $(3x^2 - y) + (3y^2 - x)y' = 0$. (ecuație exactă)

4. Rezolvați sistemul diferențial:

$$\begin{cases} x' &= x - y \\ y' &= -4x + y \end{cases},$$

cu condițiile inițiale $x(0) = 1$, $y(0) = -1$.

Indicație: Se poate folosi forma Jordan pentru matricea sistemului sau se pot aplica metodele din §7.8, deoarece matricea este diagonalizabilă și este 2×2.

8.3 Model 3

1. Fie spațiul vectorial:

$$V = \{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid M = M^t\}.$$

(a) Găsiți complementul ortogonal al lui V;

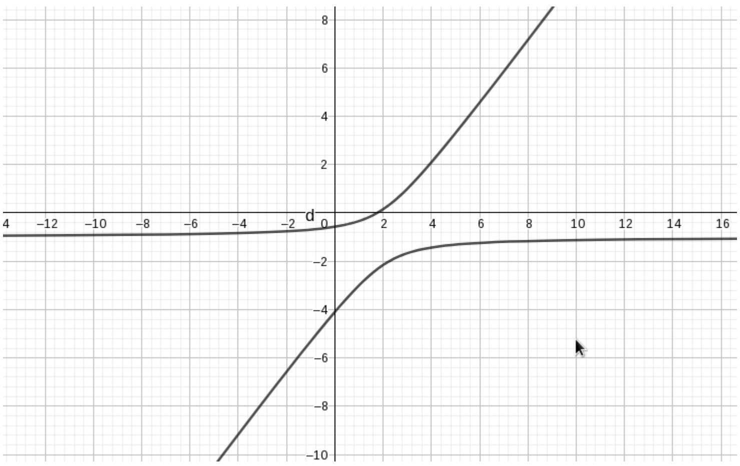
(b) Găsiți o bază ortonormată în V.

Indicații: Matricele din V au elementele egale pe diagonala secundară, deci $\dim V = 3$. Rezultă $\dim V^\perp = 1$, adică $V^\perp = \mathrm{Sp}\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\}$, care să fie perpendiculară pe cele 3 matrice din baza lui V.

2. Aduceți la forma canonică și reprezentați conica:

$$4xy - 3y^2 + 4x - 14y - 7 = 0.$$

Răspuns: Conica este o hiperbolă:



3. Rezolvați ecuațiile diferențiale:

(a) $(1 - x^2y) + x^2(y - x)y' = 0;$ (factor integrant $\mu = \mu(x)$)

(b) $y = xy' - y'^2.$ (ecuație Lagrange)

4. Fie matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Să se calculeze e^{At}, pentru $t \in \mathbb{R}$;

(b) Să se determine soluția generală a sistemului $X' = AX$, apoi soluția particulară care verifică condiția $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, $z(0) = 0$.

Indicație: Vezi §7.9 (completați detaliile lipsă din rezolvare).

INDEX

A

algoritm
    Gram-Schmidt, 38

M

metoda Gauss-Jordan, 6
    inversare, 6
    sisteme liniare, 7

O

operație, 4
    asociativă, 4
    comutativă, 4
    cu element neutru, 4
    cu elemente inversabile, 4
    distributivă, 5
    internă, 4

P

polinom
    caracteristic, 27
produs
    scalar, 37

R

relație
    antisimetrică, 3
    binară, 3
    echivalență, 4
    ordine, 4
    reflexivă, 3
    simetrică, 3
    tranzitivă, 3

S

spațiu vectorial, 11
    bază, 17
    baza canonică, 17
    combinație liniară, 15
    coordonatele unui vector, 18
    dimensiune, 17
    euclidian, 38
    exemple, 12
    matricea aplicației, 19
    matricea de trecere, 20
    sistem de generatori, 16
    subspațiu, 13
    suma directă dde subspații, 14
    suma subspațiilor, 14
    vectori liniar independenți, 15
structuri algebrice
    corp, 5
    grup, 5
    inel, 5
    monoid, 5

morfism, 5
substructuri, 6
subspațiu
complement ortogonal, 38
sumă, 25
directă, 25

T

teorema
Cayley-Hamilton, 28
Grassmann, 18
rang-defect, 21
schimbului, 16

V

valoare
proprie, 27
valoare proprie
multiplicitate algebrică, 28
multiplicitate geometrică, 28
spectru, 27
vector
cosinus, 37
norma, 37
propriu, 27
vector propriu
subspațiu invariant, 28

BIBLIOGRAFIE

[Brînzănescu and Ştănăşilă, 1998] Brînzănescu, V. and Ştănăşilă, O. (1998). *Matematici speciale.* ALL.

[Bălan, 2004] Bălan, V. (2004). *Algebră liniară, geometrie analitică.* online.

[Purcaru, 2010] Purcaru, M. (2010). *Algebră liniară, geometrie analitică şi ecuaţii diferenţiale.* online.