Matematică 1 (Analiză)

Notițe de seminar

Adrian Manea

Curs: Mircea Olteanu

15 decembrie 2018

Cuprins

SEMINAR 1

SERII DE NUMERE REALE

1.1 Generalități

O serie, înțeleasă informal ca o sumă infinită, este definită formal de două elemente:

- șirul termenilor generali;
- șirul sumelor parțiale.

Astfel, de exemplu, dacă luăm seria $\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{n!}$, avem:

- șirul termenilor generali este $x_n = \frac{2^n}{n!}$;
- șirul sumelor parțiale este $s_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{2^k}{k!}$.

Seria se numește *convergentă* dacă șirul sumelor parțiale este convergent, iar limita acestui șir se numește *suma seriei*. În caz contrar, seria se numește *divergentă*, adică șirul sumelor parțiale nu are limită sau aceasta este infinită. Cînd vorbim despre *natura seriei*, ne referim dacă aceasta este convergentă sau divergentă.

Spre deosebire de cazul șirurilor din liceu, în cazul seriilor trebuie mai multă atenție cînd discutăm convergența. Aceasta deoarece seriile au o *natură cumulativă*, adică toți termenii anteriori din șirul sumelor parțiale își aduc contribuția. Mai precis, avem o recurență de forma:

$$s_{p+1} = s_p + x_{p+1}.$$

De aceea, următoarele proprietăți sînt specifice seriilor:

(a) Dacă într-o serie schimbăm ordinea unui număr finit de termeni, obținem o serie nouă, care are aceeași natură cu cea inițială. Dacă există, suma seriei nu se schimbă.

(b) Dacă eliminăm un număr finit de termeni dintr-o serie, se obține o serie nouă, cu aceeași natură. Dacă există, suma seriei poate să se schimbe.

(c) Dacă o serie este convergentă, atunci ea are șirul sumelor parțiale mărginit.

(d) Dacă o serie este convergentă, atunci șirul termenilor săi generali tinde către zero. Reciproca este, în general, falsă (contraexemplu $\sum \frac{1}{n}$).

Această proprietate ne permite să formulăm o *condiție necesară de convergență*:

(e) Dacă șirul termenilor generali ai unei serii nu este convergent către zero, atunci seria este divergentă.

1.2 Serii cu termeni pozitivi

În cazul seriilor care au șirul termenilor generali alcătuit numai din numere pozitive, avem următoarele proprietăți, dintre care unele rezultă prin particularizarea celor de mai sus:

(a) Șirul sumelor parțiale al unei serii cu termeni pozitivi este strict crescător.

(b) O serie cu termeni pozitivi are întotdeauna sumă (finită sau nu).

(c) O serie cu termeni pozitivi este convergentă dacă și numai dacă șirul sumelor parțiale este mărginit.

(d) **Criteriul de comparație termen cu termen:** O serie care are termeni mai mari (doi cîte doi) decît o serie divergentă este divergentă. O serie care are termeni mai mici (doi cîte doi) decît o serie convergentă este convergentă.

(e) **Criteriul de comparație la limită, termen cu termen:** Fie $\sum_n x_n$ și $\sum_n y_n$ două serii cu termeni pozitivi. Presupunem că $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \le \dfrac{y_{n+1}}{y_n}$. Atunci:

- Dacă seria $\sum_n y_n$ este convergentă, atunci și seria $\sum x_n$ este convergentă;
- Dacă seria $\sum_n x_n$ este divergentă, atunci și seria $\sum_n y_n$ este divergentă.

(f) **Criteriul de comparație la limită:** Fie $\sum_n x_n$ și $\sum_n y_n$ două serii cu termeni pozitivi, astfel încît $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \ell$.

- Dacă $0 < \ell < \infty$, atunci cele două serii au aceeași natură;

- Dacă $\ell = 0$, iar seria $\sum_n y_n$ este convergentă, atunci și seria $\sum_n x_n$ este convergentă;
- Dacă $\ell = \infty$, iar seria $\sum_n y_n$ este divergentă, atunci și seria $\sum_n x_n$ este divergentă.

(g) **Criteriul radical:** Fie $\sum_n x_n$ o serie cu termeni pozitiv, astfel încît $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \ell$. Atunci:

- Dacă $\ell < 1$, seria este convergentă;
- Dacă $\ell > 1$, seria este divergentă;
- Dacă $\ell = 1$, criteriul nu decide.

(h) **Criteriul raportului:** Fie $\sum_n x_n$ o serie cu termeni pozitivi și fie $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$. Atunci:

- Dacă $\ell < 1$, seria este convergentă;
- Dacă $\ell > 1$, seria este divergentă;
- Dacă $\ell = 1$, criteriul nu decide.

(i) **Criteriul lui Raabe-Duhamel:** Fie $\sum_n x_n$ o serie cu termeni pozitivi și fie:

$$\ell = \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right).$$

Atunci:

- Dacă $\ell < 1$, seria este divergentă;
- Dacă $\ell > 1$, seria este convergentă;
- Dacă $\ell = 1$, criteriul nu decide.

(j) **Criteriul logaritmic:** Fie $\sum_n x_n$ o serie cu termeni pozitivi și presupunem că există limita:

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{x_n}}{\ln n}.$$

Atunci:

- Dacă $\ell < 1$, seria este divergentă;
- Dacă $\ell > 1$, seria este convergentă;
- Dacă $\ell = 1$, criteriul nu decide.

(k) **Criteriul integral:** Fie $f : (0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ o funcție crescătoare și șirul $a_n = \displaystyle\int_1^n f(t)dt$. Atunci seria $\sum_n f(n)$ este convergentă dacă și numai dacă șirul (a_n) este convergent.

(l) **Criteriul condensării:** Fie (x_n) un șir astfel încît $x_n \geq x_{n+1} \geq 0, \forall n$. Atunci seriile $\sum_n x_n$ și $\sum_n 2^n x_{2^n}$ au aceeași natură.

1.3 Seria geometrică și seria armonică

Două serii foarte importante pe care le putem folosi în comparații sînt următoarele.

Seria geometrică: Fie $a \in \mathbb{R}$ și $q \in \mathbb{R}$. Considerăm progresia geometrică de prim termen a și rație q, care definește seria $\sum_n aq^n$, pe care o numim *seria geometrică* de rație q.

Suma parțială de rang n se poate calcula cu formula cunoscută din liceu:

$$S_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = \begin{cases} a \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}, & q \neq 1 \\ na, & q = 1 \end{cases}$$

Pentru convergență, să remarcăm că dacă $|q| < 1$, atunci:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q},$$

deci seria este convergentă și are suma $\dfrac{a}{1-q}$.

Dacă $|q| \geq 1$, se poate verifica ușor, folosind criteriul necesar, că seria geometrică este divergentă.

Un alt exemplu important este **seria armonică generalizată (Riemann)**, definită prin $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$, pentru $\alpha\ in \mathbb{R}$. Se poate observa că:

- Dacă $\alpha \leq 0$, termenul general al seriei nu converge către zero, deci seria este divergentă, conform criteriului necesar;
- Dacă $\alpha > 0$, termenii seriei formează un șir descrescător de numere pozitive. Seria este convergentă pentru $\alpha > 1$ și divergentă pentru $\alpha \leq 1$.

În cazul particular $\alpha = 1$, seria se numește simplu *seria armonică*.

1.4 Exerciții

Studiați natura următoarelor serii cu termeni pozitivi, definite de șirul termenilor generali (x_n), cu:

(a) $x_n = \left(\dfrac{3n}{3n+1}\right)^n$ (D, necesar);

(b) $x_n = \dfrac{1}{n!}$ (C, comparație);

(c) $x_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n+1}}$ (C, comparație);

(d) $x_n = \dfrac{n!}{n^{2n}}$ (C, raport);

(e) $x_n = n!\left(\dfrac{a}{n}\right)^n$, $a \in \mathbb{R}$ (discuție, raport);

(f) $x_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ (C, raport);

(g) $x_n = \dfrac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$, $a > -1$ (discuție, Raabe);

(h) $x_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}$ (D, Raabe);

(i) $x_n = \left(1 - \dfrac{3\ln n}{2n}\right)^n$ (C, logaritmic);

(j) $x_n = \left(\dfrac{n+1}{3n+1}\right)^n$ (C, rădăcină);

(k) $x_n = \left(\dfrac{1}{\ln n}\right)^{\ln(\ln n)}$ (D, logaritmic);

(l) $x_n = \dfrac{1}{n\ln n}$ (D, integral);

(m) $x_n = \dfrac{1}{n\ln^2 n}$ (C, integral);

(n) $x_n = \dfrac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}$ (D, necesar + Cauchy);

(o) $x_n = \dfrac{1}{7^n + 3^n}$ (C, comparație);

(p) $x_n = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ (D, comparație);

(q) $x_n = \sqrt{n^4 + 2n + 1} - n^2$ (D, comparație);

(r) $x_n = n^2 e^{-\sqrt{n}}$ (C, logaritmic);

(s) $x_n = \dfrac{\ln n}{n^2}$ (C, comparație)

SEMINAR 2

SERII OARECARE. APROXIMAȚII

2.1 Convergență absolută și semiconvergență

Dacă lucrăm cu serii care pot avea și termeni negativi, studiul convergenței trebuie făcut mai atent. Astfel, avem nevoie de următoarele:

Definiție 2.1: O serie $\sum_n x_n$ se numește *alternată* dacă produsul $x_n \cdot x_{n+1} < 0$, pentru orice indice $n \in \mathbb{N}$.

Pentru asemenea serii, avem la dispoziție un singur criteriu, anume:

Teoremă 2.1 (Criteriul lui Leibniz)**:** *Fie $\sum_n (-1)^n x_n$ o serie alternată.*
Dacă șirul (x_n) este descrescător și converge către zero, atunci seria este convergentă.

Pentru serii alternate, avem următoarele noțiuni suplimentare:

Definiție 2.2: O serie $\sum_n x_n$ se numește *absolut convergentă* dacă seria modulelor $\sum_n |x_n|$ este convergentă și *semiconvergentă* dacă are seria modulelor divergentă.

Se poate constata imediat că *orice serie absolut convergentă este convergentă*, deoarece pentru orice număr natural x, avem $x \leq |x|$. În plus, dacă seria inițială este divergentă, atunci și seria modulelor va fi divergentă, din același motiv.

Pentru studiul convergenței seriilor generale, adică avînd și termeni pozitivi, și negativi, avem un criteriu important.

Teoremă 2.2 (Criteriul Abel-Dirichlet)**:** *Presupunem că seria $\sum_n x_n$ se poate scrie sub forma $\sum_n \alpha_n y_n$, cu (α_n) un șir monoton și mărginit. Dacă seria $\sum_n y_n$ este convergentă, atunci și seria inițială este convergentă.*

Alternativ*, uneori criteriul este formulat astfel: Dacă (α_n) este un șir monoton care tinde către zero, iar șirul cu termenul general $Y_n = y_1 + \cdots + y_n$ este mărginit, atunci seria inițială este convergentă.*

De exemplu, să studiem seria $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$. Fiind o serie alternată, constatăm:

- Seria modulelor este $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$, care este seria armonică, deci divergentă;
- Pentru seria inițială, putem aplica criteriul lui Leibniz. Șirul $x_n = \frac{1}{n}$ este evident descrescător către zero, deci seria este convergentă.

Concluzia este că seria este *semiconvergentă.*

2.2 Aproximarea sumelor seriilor convergente

Putem calcula numeric sumele unor serii convergente, cu aproximații oricît de bune. Următoarele două rezultate sînt fundamentale:

Teoremă 2.3 (Aproximarea sumelor seriilor cu termeni pozitivi)**:** *Fie $x_n \geq 0$ și $k \geq 0$, astfel încît să avem:*

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < k < 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dacă S este suma seriei convergente $\sum_n x_n$, iar s_n este suma primilor n termeni, atunci avem aproximația:

$$|S - s_n| < \frac{k}{1-k} x_n.$$

Teoremă 2.4 (Aproximarea sumelor seriilor alternate)**:** *Fie $\sum_n (-1)^n x_n$ o serie alternată, convergentă și fie S suma sa.*

Dacă S_n este suma primilor n termeni, atunci avem:

$$|S - s_n| \leq x_{n+1}.$$

Cu alte cuvinte, eroarea aproximației are ordinul de mărime al primului termen neglijat.

2.3 Exerciții

1. Studiați natura (AC/SC/D) următoarelor serii, definite de șirul x_n:

(a) $x_n = (-1)^n$;

(b) $x_n = \frac{1}{n+i}$;

(c) $x_n = \frac{1}{(n+i)\sqrt{n}}$;

(d) $x_n = (-1)^n \dfrac{\log_a n}{n}, a > 1.$

2. Să se aproximeze cu o eroare mai mică decît ε sumele seriilor definite de șirul x_n:

(a) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n!}, \varepsilon = 10^{-3}$ $(n = 7)$;

(b) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n^3\sqrt{n}}, \varepsilon = 10^{-2}$ $(n = 4)$.

SEMINAR 3

ȘIRURI ȘI SERII DE FUNCȚII

3.1 Convergență punctuală și convergență uniformă

Definiţie 3.1: Fie (X, d) un spațiu metric și $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ termenul general al unui șir de funcții.
Fie $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție arbitrară.
Spunem că șirul (f_n) *converge punctual* (*simplu*) la f dacă are loc:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad \forall x \in X.$$

Notăm acest lucru cu $f_n \xrightarrow{PC} f$ și numim f *limita punctuală* a șirului (f_n).

Celălalt tip de convergență care ne va interesa este definit mai jos:

Definiţie 3.2: În condițiile și cu notațiile de mai sus, spunem că șirul (f_n) este *uniform convergent* la f dacă:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon > 0 \text{ a.î. } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall n \geq N_\varepsilon, \forall x \in X.$$

Vom nota această situație cu $f_n \xrightarrow{UC} f$.

În exerciții se va folosi mai mult caracterizarea:

Propoziţie 3.1: *În condițiile și cu notațiile de mai sus, șirul (f_n) converge uniform la f dacă și numai dacă:*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Legătura între cele două tipuri de convergență este dată de:

Teoremă 3.1: *Orice șir de funcții uniform convergent pe un interval este punctual convergent pe același interval.*

Reciproca este falsă, după cum arată contraexemplul: fie $[a, b] = [0, 1]$ și definim șirul de funcții $f_n(x) = x^n$, $n \geq 1$.

Pentru orice $x \in [a, b]$, avem:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Rezultă că $f_n \xrightarrow{PC} f$, unde f este funcția definită pe cazuri de limita de mai sus. Dar se poate vedea imediat că

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 1 \neq 0,$$

deci șirul este doar punctual convergent, nu uniform convergent.

3.2 Transferul proprietăților

Unele dintre proprietățile funcțiilor sînt transferate de la termenii șirurilor la funcția-limită, iar altele nu, aceasta oferindu-ne uneori metode de calcul, iar alteori, metode de demonstrație.

Teoremă 3.2 (Transfer de continuitate)**:** *Dacă f_n sînt funcții continue, iar șirul f_n converge uniform la f, atunci funcția f este continuă.*

Rezultă de aici că avem o metodă de a demonstra că nu are loc continuitatea uniformă: dacă f_n sînt funcții continue, iar f, obținută din convergența punctuală, *nu* este continuă, rezultă că f_n *nu* tinde uniform la f.

Teoremă 3.3 (Integrare termen cu termen)**:** *Fie $f_n, f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funcții continue. Dacă f_n converge uniform la f, atunci are loc proprietatea de integrare termen cu termen, adică:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Teoremă 3.4 (Derivare termen cu termen)**:** *Presupunem că funcțiile f_n sînt derivabile, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Dacă șirul f_n converge punctual la f și dacă există funcția $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încît f_n' converge uniform la g, atunci f este derivabilă și $f' = g$.*

3.3 Serii de funcții

Pentru convergența seriilor de funcții, avem un singur criteriu de utilizat:

Teoremă 3.5 (Weierstrass)**:** *Dacă există un șir cu termeni pozitivi a_n astfel încît $|u_n(x)| \leq a_n$ pentru orice $x \in X$, iar seria $\sum a_n$ converge, atunci seria $\sum u_n$ converge uniform.*

Pentru proprietățile de transfer, avem:

Teoremă 3.6:

- Transfer de continuitate: *Dacă u_n sînt funcții continue, iar seria $\sum u_n$ converge uniform la f, atunci funcția f este continuă.*

- Integrare termen cu termen: *Dacă seria $\sum u_n$ converge uniform la f, atunci f este integrabilă și avem:*

$$\int_a^b \sum_n u_n(x)dx = \sum_n \int_a^b u_n(x)dx.$$

- Derivare termen cu termen: *Presupunem că toate funcțiile u_n sînt derivabile. Dacă seria $\sum u_n$ converge punctual la f și dacă există $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încît $\sum_n u_n'$ converge uniform la g, atunci f este derivabilă și $f' = g$.*

3.4 Polinomul Taylor și seria Taylor

Orice funcție cu anumite proprietăți poate fi aproximată cu un polinom:

Definiție 3.3: Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval deschis și $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție de clasă $\mathcal{C}^m(I)$. Pentru orice $a \in I$, definim *polinomul Taylor* de gradul $n \leq m$ asociat funcției f în punctual a prin:

$$T_{n,f,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Restul (eroarea de aproximare) este definit prin:

$$R_{n,f,a} = f(x) - T_{n,f,a}(x).$$

Acest polinom poate fi mai departe utilizat pentru a studia *seria Taylor* asociată unei funcții.

Teoremă 3.7: *Fie $a < b$ și $f \in \mathcal{C}^\infty([a,b])$ astfel încît să existe $M > 0$ cu proprietatea că $\forall n \in \mathbb{N}$ și $x \in [a,b]$, avem $|f^{(n)}(x)| \leq M$.*

Atunci pentru orice $x_0 \in (a,b)$, seria Taylor a lui f în jurul punctului x_0 este uniform convergentă pe $[a,b]$ și suma ei este funcția f, adică avem:

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad \forall x \in [a,b].$$

Pentru cazul particular $x_0 = 0$, seria se numește *Maclaurin*.

3.5 Serii de puteri

Seriile de puteri sînt un caz particular al seriilor de funcții, luînd doar funcții de tip polinomial.

Definiţie 3.4: Fie (a_n) un șir de numere reale și fie $a \in \mathbb{R}$.
Seria $\sum_{n \geq 0} a_n (x - a)^n$ se numește *seria de puteri centrată în a*, definită de șirul a_n.

Toate rezultatele privitoare la serii de funcții sînt valabile și pentru serii de puteri. Rezultatele specifice urmează.

Teoremă 3.8 (Abel)**:** *Pentru orice serie de puteri* $\sum a_n x^n$ *există un număr* $0 \leq R \leq \infty$ *astfel încît:*

- *Seria este absolut convergentă pe intervalul* $(-R, R)$*;*
- *Seria este divergentă pentru orice* $|x| > R$*;*
- *Seria este uniform convergentă pe* $[-r, r]$*, unde* $0 < r < R$.

Numărul R se numește raza de convergență *a seriei, iar intervalul* $(-R, R)$ *se numește* intervalul de convergență.

Calculul razei de convergență se poate face cu unul dintre următoarele criterii:

Teoremă 3.9 (Cauchy-Hadamard)**:** *Fie* $\sum a_n x^n$ *o serie de puteri, R raza sa de convergență și definim:*

$$\omega = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Atunci:

- $R = \omega^{-1}$ *dacă* $0 < \omega < \infty$*;*
- $R = 0$ *dacă* $\omega = \infty$*;*
- $R = \infty$ *dacă* $\omega = 0$.

Teoremă 3.10: *Raza de convergență se poate calcula cu formula:*

$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

Observaţie 3.1: Din natura seriilor de puteri, teoremele de derivare și integrare termen cu termen sînt automate. Așadar, dacă $\sum a_n (x - a)^n$ este o serie de puteri iar $S(x)$ este suma sa, atunci:

- Seria derivatelor, $\sum n a_n (x - a)^{n-1}$, are aceeași rază de convergență cu seria inițială, iar suma sa este $S'(x)$;
- Seria primitivelor, $\sum a_n \dfrac{(x - a)^{n+1}}{n + 1}$, are aceeași rază de convergență cu seria inițială, iar suma sa este o primitivă a lui S.

3.6 Exerciții

1. Să se studieze convergența punctuală și uniformă a șirurilor de funcții:

(a) $f_n : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \dfrac{1}{nx+1}, n \geq 0;$

(b) $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x^n - x^{2n}, n \geq 0;$

(c) $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}, n > 0;$

(d) $f_n : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2};$

(e) $f_n : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \dfrac{1-x^n}{1-x};$

(f) $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2};$

(g) $f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \dfrac{x+n}{x+n+1};$

(h) $f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2}.$

2. Să se arate că șirul de funcții dat de:

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{n} \arctan x^n$$

converge uniform pe $\mathbb{R}$, dar:

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x) \right)'_{x=1} \neq \lim_{n\to\infty} f_n'(1).$$

Rezultatele diferă deoarece șirul derivatelor nu converge uniform pe $\mathbb{R}$.

3. Să se arate că șirul de funcții dat de:

$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = nxe^{-nx^2}$$

este convergent, dar:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

Rezultatul se explică prin faptul că șirul nu este uniform convergent. De exemplu, pentru $x_n = \frac{1}{n}$, avem $f_n(x_n) \longrightarrow 1$, dar, în general, $f_n(x) \longrightarrow 0$.

4. Să se dezvolte următoarele funcții în serie Maclaurin, precizînd și domeniul de convergență:

(a) $f(x) = e^x$;

(b) $f(x) = \sin x$;

(c) $f(x) = \cos x$;

(d) $f(x) = (1 + x)^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$;

(e) $f(x) = \frac{1}{1 + x}$;

(f) $f(x) = \ln(1 + x)$;

(g) $f(x) = \arctan x$;

(h) $f(x) = \ln(1 + 5x)$;

(i) $f(x) = 3\ln(2 + 3x)$.

5. Să se calculeze raza de convergență și mulțimea de convergență pentru următoarele serii de puteri:

(a) $\sum_{n\geq 0} x^n$;

(b) $\sum_{n\geq 1} n^n x^n$;

(c) $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$;

(d) $\sum_{n\geq 1} \frac{n^n x^n}{n!}$;

(e) $\sum \frac{(x - 1)^{2n}}{n \cdot 9^n}$;

(f) $\sum \frac{(x + 3)^n}{n^2}$.

6. Găsiți mulțimea de convergență și suma seriei:

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Indicație: Se derivează termen cu termen și rezultă seria geometrică de rază $-x^2$, căreia i se poate calcula suma, care apoi se integrează.

7. Să se calculeze cu o eroare mai mică decît 10^{-3} integralele:

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$;

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$;

(c) $\displaystyle\int_0^{1} e^{-x^2} dx$.

8. Să se calculeze polinomul Taylor de grad 3 în jurul originii pentru funcțiile:

(a) $f(x) = 3\ln(2+x)$;

(b) $f(x) = \arctan x$;

(c) $f(x) = \sqrt{1+2x}$.

SEMINAR 4

SERII TAYLOR

4.1 Exerciții suplimentare

1. Găsiți aproximarea liniară și pătratică a funcțiilor:

(a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$;

(b) $f(x) = \sin(\cos x)$;

(c) $f(x) = e^{\sin x}$;

(d) $f(x) = \arcsin x$.

2. Folosind seria Taylor, aproximați cu o eroare mai mică decît 10^{-3} numerele:

(a) $\sqrt[3]{65}$;

(b) $\sin 32$;

(c) $\arctan \dfrac{1}{2}$;

(d) $e^{-0,2}$;

(e) $\ln 1,1$;

(f) $\ln 4$;

(g) $\ln 5$.

Indicație: Atenție la domeniile de convergență!

3. Să se calculeze cu o eroare mai mică decît 10^{-3} integralele:

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x} dx;$

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x)}{x} dx;$

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{\arctan x}{x} dx;$

(d) $\displaystyle\int_0^{1} e^{-x^2} dx.$

4. Găsiți mulțimea de convergență și suma seriei:

$$sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Indicație: $R = 1$ (raport), iar suma se poate afla derivînd termen cu termen. Rezultă (prin derivare) seria geometrică de rază $-x^2$, cu suma $\dfrac{1}{x^2+1}$, valabilă pentru $x \in (-1, 1)$.

Rezultă $f(x) = \arctan x + c$.

5. Arătați că seriile numerice de mai jos sînt convergente și calculați sumele lor, folosind serii de puteri:

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{3n+1};$

(b) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)^2}{n!};$

(c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^2(3^n - 2^n)}{6^n}.$

Indicații:

(a) Seria satisface criteriul lui Leibniz, deci este convergentă.

Pentru a găsi suma, pornim cu seria de puteri $\sum(-1)^n \dfrac{x^{3n+1}}{3n+1}$.

Intervalul de convergență este $(-1, 1)$, iar pentru $x = 1$, avem seria dată.

Fie f suma acestei serii de puteri în intervalul $(-1, 1)$. Derivăm termen cu termen și obținem:

$$f'(x) = \sum(-1)^n x^{3n} = \frac{1}{1+x^3},$$

pentru $|x| < 1$, ca suma unei serii geometrice alternate.

Rezultă:

$$f(x) = \int \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan 2x - 1\sqrt{3} + c,$$

pentru $|x| < 1$. Calculînd $f(0)$, găsim $c = \dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}$.

(b) Se folosește seria pentru e^x, din care obținem seria pentru $(x+x^2)e^x$, pe care o derivăm termen cu termen.

Pentru $x = 1$, se obține seria cerută, cu suma $5e$.

(c) Descompunem seria în două, apoi folosim seria de puteri $\sum n^2 x^n$, pe care o derivăm termen cu termen, pentru a obține seria pentru nx^{n-1}, apoi seria pentru nx^n.

SEMINAR 5

DERIVATE PARȚIALE

5.1 Funcții de mai multe variabile

În general, putem lucra cu funcții de forma $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, funcții care acceptă n variabile, deci $f(x_1, \dots, x_n) = y \in \mathbb{R}$.

Cazurile pe care le vom folosi cel mai des sînt $n = 2$ și $n = 3$.

Dacă $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcție de două variabile, în loc de $f(x, y)$, putem gîndi că avem o funcție de forma $f_x(y)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Evident, putem avea inclusiv $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, adică funcții de mai multe variabile, care returnează mai multe variabile.

5.2 Operatori diferențiali

În cele ce urmează, presupunem că lucrăm cu $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, f = f(x, y, z)$.

Putem defini *derivata parțială* a lui f după variabila x ca fiind derivata obținută prin tratarea lui y și z drept parametri. Notația este $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ sau f_x sau $\partial_x f$.

Similar se pot defini și celelalte derivate parțiale. De exemplu:

$$f(x, y, z) = 3x^2 y + 5xe^y + \sin(yz).$$

Avem:

$$f_x = 6xy + 5e^y, \quad f_y = 3x^2 + 5xe^y + z\cos(yz), \quad f_z = y\cos yz.$$

Pentru asemenea funcții, se definesc următorii *operatori diferențiali*:

- *gradient*, notat $\text{grad} f = \nabla f = (f_x, f_y, f_z)$. *Observație:* Gradientul transformă o funcție într-un vector de funcții.

- *divergență*, notată $\mathrm{div} f = \nabla \cdot f = f_x + f_y + f_z$;
- *laplacianul*, notat $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

  O funcție se numește *armonică*, dacă $\Delta f = 0$.

Fiecare dintre acești operatori poate fi înțeles privind *operatorul nabla*, ∇ ca fiind:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Atunci, *gradientul* reprezintă *aplicarea* lui ∇ pe f, iar *divergența* reprezintă *produsul scalar* dintre ∇ și vectorul (f, f, f). De asemenea, laplacianul poate fi înțeles ca produsul scalar $\nabla \cdot \nabla$, aplicat apoi lui f.

5.3 Diferențiala totală

Dată o funcție de mai multe variabile, pe lîngă derivatele parțiale, se poate defini și o *diferențială totală*, care conține toate informațiile din derivatele parțiale.

Pentru o funcție $f = f(x, y, z)$, aceasta se definește prin:

$$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz$$

De asemenea, avem și diferențiala totală de ordinul 2:

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy.$$

5.4 Exerciții

1. Pentru următoarele funcții $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, calculați gradientul, divergența și diferențiala totală în punctele $(1, 1, 1)$ și $(1, 2, 3)$:

(a) $f(x, y, z) = 3x^2 y + x \sin z + z \cos y$;

(b) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;

(c) $f(x, y, z) = \ln(xy) + \ln(xz) + \ln(yz)$;

(d) $f(x, y, z) = e^{x+y+z}$;

(e) $f(x, y, z) = \frac{x + y}{z} + \frac{y + z}{x} + \frac{x + z}{y}$;

(f) $f(x, y, z) = \arctan \frac{x}{y} + \arctan \frac{y}{z} + \arctan \frac{z}{x}$.

2. Verificați dacă următoarele funcții sînt armonice:

(a) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$;

(b) $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$;

(c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$;

(d) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;

(e) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1}$;

(f) $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$.

SEMINAR 6

RECAPITULARE PARȚIAL

6.1 Model 1

1. Să se studieze natura seriilor:

(a) $\sum \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$;

(b) $\sum(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

2. Studiați convergența uniformă a șirului de funcții:

$$f_n : [3, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{n}{x(x^2+n)}, n \geq 1.$$

3. Calculați, cu o eroare de maxim 10^{-2} integrala:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x)}{x} dx.$$

4. Să se dezvolte în serie Taylor în jurul lui $x_0 = 0$ funcția:

$$f(x) = \ln(2+3x).$$

Găsiți domeniul de convergență al dezvoltării.

5.

(a) Să se aproximeze, folosind polinomul Taylor de gradul 2 în jurul originii, funcția $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$;

(b) Să se calculeze, folosind aproximația de mai sus, $\sqrt[3]{28}$.

(c) Estimați eroarea aproximației de mai sus.

(*) Verificați dacă funcția $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$ este armonică.

6.2 Model 2

1. Studiați convergența seriilor:

$$\sum_{n\geq 1}(\sqrt{n^4+2n+1}-n^2), \quad \sum_{n\geq 1}\frac{a^n n!}{n^n}, a>0.$$

2. Studiați convergența uniformă a șirului de funcții:

$$f_n : [1,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sqrt{1+nx} - \sqrt{nx}, n \geq 1.$$

3. Găsiți domeniul de convergență pentru seria de puteri:

$$\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{3n+1}x^{3n+1}.$$

Calculați suma seriei numerice $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{3n+1}$ folosind această serie de puteri.

4. Să se calculeze cu o eroare mai mică decît 10^{-2} integrala:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctan x}{x}\,dx.$$

5. Scrieți polinomul Taylor de gradul 3 pentru funcția $f(x) = e^x$ și, folosindu-l, aproximați $e^{\sqrt{2}}$. Estimație eroarea aproximației.

(*) Fie funcția $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Calculați Δf.

6.3 Model 3

1. Studiați convergența seriilor:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt[3]{n^3 + n^2} - n}{n^2}, \quad \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln n}.$$

2. Studiați convergența punctuală și uniformă a șirului de funcții:

$$f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n - x^{n+1}.$$

3. Determinați mulțimea de convergență și suma seriei:

$$\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n + 1}.$$

4. Calculați, cu o eroare de maxim 10^{-3} integrala:

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

5. Aproximați, folosind polinomul Taylor de gradul 3, funcția $f(x) = \arctan 2x$ și calculați, folosind această aproximație, $\arctan \frac{1}{2}$. Estimați eroarea.

(*) Calculați laplacianul funcției $f(x, y, z) = \ln(x + y + z)$ în punctul $A(1, 2, 1)$.

SEMINAR 7

PROBLEME DE EXTREM

7.1 Extreme libere

Dată o funcție de două sau trei variabile (așa cum vom folosi în majoritatea cazurilor), se pune problema studiului punctelor de extrem. Vom împărți aceasta în două: *extreme libere*, în care domeniul de definiție este $\mathbb{R}^2$ sau $\mathbb{R}^3$, fără constrîngeri suplimentare și cazul *extremelor cu legături*, cînd domeniul este fie un dreptunghi (respectiv, paralelipiped), fie este dat de o anumită ecuație.

Cazul extremelor libere este foarte simplu și se aseamănă cu studiul punctelor de extrem pentru funcții de o variabilă. Astfel, avem de parcurs următorii pași (vom presupune, pentru simplitate, că lucrăm cu o funcție de două variabile, $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$):

(1) Se rezolvă sistemul de ecuații dat de anularea derivatelor parțiale de ordinul întîi, pentru a afla *punctele critice* (puncte care *este posibil* să fie de extrem):

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} & = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = 0 \end{cases}$$

(2) Pentru fiecare dintre aceste puncte, se alcătuiește *matricea hessiană* a funcției, alcătuită din derivatele de ordinul al doilea, și se evaluează matricea în punctele critice:

$$H_f = \begin{pmatrix} f_x xx & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

(3) Fie $A(x_A, y_A)$ un punct critic. Alcătuim matricea $H_f(A)$ și îi calculăm *valorile proprii*, λ_1 și λ_2.

- Dacă λ_1 și λ_2 sînt ambele *pozitive*, atunci punctul A este *punct de minim local*;

- Dacă λ_1 și λ_2 sînt ambele *negative*, atunci punctul A este *punct de maxim local*;
- Dacă λ_1 și λ_2 au *semne contrare*, atunci punctul A *nu este de extrem*.

(4) Se repetă procedura pentru fiecare dintre punctele critice.

Observaţie 7.1: Dacă una dintre valorile proprii ale unei matrice hessiene este 0, metoda nu decide și se aplică tehnici specifice, care sînt dincolo de scopul acestui seminar.

7.2 Extreme cu legături

În cazul în care domeniul de definiție este specificat cu o ecuație sau este dat de un produs de intervale, se aplică o metodă specifică, numită, în general, *metoda multiplicatorilor lui Lagrange.*

Astfel, fie funcția $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ca mai sus, căreia vrem să îi determinăm extremele și presupunem că vrem să o facem numai într-un domeniu dat de:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}.$$

Atunci, ecuația $x^2 + y^2 = 4$ se numește *legătură* și o scriem sub forma unei funcții $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4$, pentru ca legătura să devină $g(x, y) = 0$.

Cu aceasta, metoda multiplicatorilor lui Lagrange înseamnă să alcătuim *funcția lui Lagrange*[1]:

$$F(x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Cu aceasta, singura modificare care trebuie aplicată metodei de mai sus este că sistemul pentru găsirea punctelor critice devine:

$$\begin{cases} f_x & = 0 \\ f_y & = 0 \\ g & = 0 \end{cases} \Longrightarrow (x, y, \lambda).$$

Pentru punctele critice, ne putem dispensa de λ, iar rezolvarea funcționează ca mai devreme.

Observaţie 7.2: Nu întotdeauna este nevoie să ne complicăm cu funcția lui Lagrange. Dacă, de exemplu, legătura era $x + y = 3$, putem să o scriem ca $y = 3 - x$, iar funcția inițială devine o funcție de o variabilă, $f(x, 3 - x)$, căreia îi studiem extremele ca în liceu.

Observaţie 7.3: Dacă legăturile sînt multiple, de exemplu, $g_1, g_2, g_3, \ldots, g_k$, funcția lui Lagrange corespunzătoare este:

$$F(x, y) = f(x, y) - \sum \lambda_i g_i(x, y),$$

iar sistemul de rezolvat este dat de anularea derivatelor parțiale și a tuturor legăturilor.

[1]Detalii și explicații geometrice sînt date, de exemplu, foarte clar în această lecție video

7.2.1 Cazul compact

Dacă domeniul de definiție este un *spațiu compact* — ceea ce, în esență, pentru uzul acestui seminar înseamnă un produs de intervale (semi)închise sau legături date de inegalități —, problema se studiază în două etape:

- **În interiorul domeniului**, caz în care legătura este inexistentă;
- **Pe frontieră**, caz în care legătura este dată de egalitate.

De exemplu, pentru domeniile:

$$D_1 = [3,4] \times [1,5], \quad D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 2y \leq 2\}$$

- Interiorul înseamnă:
  - pentru D_1, $\mathrm{Int}D_1 = (3,4) \times (1,5)$, caz în care avem doar de verificat că punctele critice se găsesc în intervalele date;
  - pentru D_2, avem legătura $3x + 2y < 2$, caz în care, din nou, verificăm dacă punctele critice satisfac inegalitatea *strictă*
- Frontierele înseamnă:
  - pentru D_1, cazurile separate $x = 3, y \in [1,5]$, apoi $x = 4, y \in [1,5]$ și invers;
  - pentru D_2, legătura devine $3x + 2y = 2$, pe care o putem rezolva cu Lagrange sau cu metoda simplificată din observația 7.2.

7.3 Exerciții

1. Fie funcția:

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y + 3.$$

Determinați punctele de extrem și calculați valorile funcției în aceste puncte.

2. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, f(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy$.

(a) Pentru $D = \mathbb{R}^2$, determinați punctele de extrem și calculați valorile funcției în aceste puncte;

(b) Pentru $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \geq 5\}$, determinați valoarea minimă și maximă a funcției.

Indicație (b): Considerați funcțiile $g_1(x) = f(x, 0), g_2 = f(0, y)$ și apoi funcția $g_3 = f(x, 5 - x)$, cărora le găsiți punctele de extrem.

3. Fie $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = 3xy^2 - x^3 - 15x - 36y + 9$.

(a) Pentru $D = \mathbb{R}^2$, determinați punctele de extrem și calculați valorile funcției în aceste puncte;

(b) Pentru $D = [-4, 4] \times [-3, 3]$ determinați valoarea minimă și valoarea maximă a funcției.

Indicație (b): Considerați funcțiile $f(x, -3), f(4, y), f(x, 3), f(-4, y)$.

4. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$.

(a) Pentru $D = \mathbb{R}^2$, determinați punctele de extrem și calculați valorile funcției în aceste puncte;

(b) Pentru $D = [-1, 2] \times [0, 2]$, determinați valoarea minimă și maximă a funcției.

5. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^3 + 3x^2y - 15x - 12y$.

(a) Pentru $D = \mathbb{R}^2$, determinați punctele de extrem și calculați valorile funcției în aceste puncte;

(b) Pentru $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, 3y + x \leq 3\}$ determinați valoarea minimă și valoarea maximă a funcției.

6. Determinați valorile extreme pentru funcțiile f, definite pe domeniile D, unde:

(a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy, D = \mathbb{R}^2$;

(b) $f(x, y) = xy(1 - x - y), D = [0, 1] \times [0, 1]$;

(c) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2, D = (-\infty, 0) \times (0, \infty)$;

(d) $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 2xy, D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0, y + 2x \leq 2\}$;

(e) $f(x, y) = x^4 + y^3 - 4x^3 - 3y^2 + 3y, D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}$.

7*. Dintre toate paralelipipedele dreptunghice cu volum constant 1, determinați pe cel cu aria totală minimă.

8. Fie funcția $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy$.

(a) Pentru $D = \mathbb{R}^2$, determinați punctele de extrem și calculați valorile funcției în aceste puncte;

(b) Pentru $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0, x + y \leq 5\}$ determinați valoarea minimă și valoarea maximă a funcției.

9. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$.

(a) Pentru $D = \mathbb{R}^2$, determinați punctele de extrem și calculați valorile funcției în aceste puncte;

(b) Pentru $D = [-1, 2] \times [0, 2]$, determinați valoarea minimă și valoarea maximă a funcției.

10. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^4 + y^3 - 4x^3 = 3y^2 + 3y$. Pentru domeniul de definiție:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\},$$

determinați punctele de extrem ale funcției.

SEMINAR 8

METODA CELOR MAI MICI PĂTRATE. INTEGRALE IMPROPRII

8.1 Regresie liniară

Problema regresiei liniare se adresează unor cazuri de tip statistic, atunci cînd avem la dispoziție o serie de date experimentale și vrem să le corelăm cu un model teoretic *liniar*, adică dat de o funcție de gradul întîi.

Așadar, dată o serie de perechi de forma (x_i, y_i), care reprezintă datele colectate într-un experiment și care verifică o teorie bazată pe ecuații liniare, ne punem problema găsirii celei mai potrivite drepte care să reprezinte o abatere minimă față de punctele colectate (eng. *"best fit"*).

Fie, așadar, dreapta $y = f(x) = ax + b$ modelul teoretic pe care îl urmărim. Dacă (x_i, y_i) reprezintă colecția de puncte experimentale, vom impune condiția minimizării abaterii acestor puncte de la funcția f folosind *metoda celor mai mici pătrate*. Aceasta cere ca *suma pătratelor* abaterilor să fie minimă, motivația fiind, pe de o parte de a se lua în calcul atît abateri pozitive, cît și negative, cu aceeași pondere, dar și de amplificare a abaterilor mari și minimizare a celor mici (prin ridicare la pătrat).

Așadar, putem privi funcția $y = f(x) = ax + b$ ca pe o funcție de două variabile a și b, pe care vrem să le determinăm. Expresia corespunzătoare sumei pătratelor abaterilor este:

$$S(a, b) = \sum \left(f(x_i) - y_i\right)^2.$$

Această funcție se dorește minimizată, deci problema revine la găsirea punctelor ei de minim, folosind metoda cunoscută pentru extreme libere.

În fine, găsind punctul (sau punctele) de minim (a, b), obținem *dreapta* (sau *dreptele*) *de regresie liniară* $y = ax + b$.

8.2 Exerciții

Găsiți dreapta de regresie liniară care mediază între punctele:

(a) $M_1(1,2), M_2(2,0), M_3(3,1)$;

(b) $M_1(-1,0), M_2(1,1), M_3(2,1), M_4(3,2)$;

(c) $M_1(-2,1), M_2(0,2), M_3(1,3), M_4(2,4)$.

8.3 Integrale improprii

În cazul în care funcția integrată pe un interval $[a,b]$ nu este mărginită în cel puțin unul dintre capete, integrala se numește *improprie*. De exemplu:

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x} dx$, improprie în $x = 0$;
- $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{x} dx$, improprie în ambele capete;

Calculul acestor integrale se poate face prin trecere la limită. Dacă integrala pe $[a,b]$ este improprie în b, de exemplu, avem:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \longrightarrow b} \int_a^t f(x)dx.$$

Dacă valoarea limitei de mai sus este finită, integrala se numește *convergentă*, iar valoarea limitei este valoarea integralei. În caz contrar, integrala se numește *divergentă*.

8.3.1 Integrale improprii cu parametri. Funcțiile lui Euler

Fie $f : [a,b) \times A \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție astfel încît pentru orice $y \in A$, aplicația $[a,b) \ni x \longmapsto f(x,y) \in \mathbb{R}$ are proprietatea că integrala $\displaystyle\int_a^b f(x,y)dx$ converge.

Atunci putem defini funcția:

$$F(x,y) = \int_a^b f(x,y)dx,$$

care se numește *integrală improprie cu parametru*. Un exemplu simplu este:

$$I(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2 x + m^2 \sin^2 x)dx, m > 0.$$

Dintre acestea, vom studia doar un exemplu particular, cunoscute sub numele de *funcțiile lui Euler*, B și Γ. Ele se definesc astfel:

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx, t > 0$$
$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx, p > 0, q > 0.$$

Proprietățile lor, pe care le vom folosi în calcule, sînt:

(1) $B(p,q) = B(q,p), \forall p, q > 0$;

(2) $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$;

(3) $B(p,q) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}} dy$;

(4) $\Gamma(1) = 1$;

(5) $\Gamma(t+1) = t\cdot\Gamma(t), \forall t > 0$;

(6) $\Gamma(n) = (n-1)!, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

8.4 Exerciții

Calculați, folosind funcțiile B și Γ, integralele:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^p} dx, p > 0$;

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{4}}}{(x+1)^2} dx$;

(c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1} dx$;

(d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos^q x dx, p > -1, q > -1$;

(e) $\displaystyle\int_0^1 x^{p+1}(1-x^m)^{q-1} dx, p, q, m > 0$;

(f) $\displaystyle\int_0^\infty x^p e^{-x^q} dx, p > -1, q > 0$;

(g) $\displaystyle\int_0^1 \ln^p x^{-1}\,dx,\ p > -1;$

(h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^n)^{\frac{1}{n}}},\ n \in \mathbb{N};$

(i) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}\ln^3 x \cdot (1-\ln x)^4\,dx;$

(j) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\ln\frac{1}{x}}\,dx;$

(k) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^4)^2}\,dx;$

(l) $\displaystyle\int_{-1}^\infty e^{-x^2-2x+3}\,dx.$

SEMINAR 9

INTEGRALE DUBLE ȘI TRIPLE

9.1 Exerciții

1. Reprezentați grafic domeniile date de următoarele (in)ecuații:

(a) $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2, y^2 = x\}$;

(b) $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2, y = x, xy = 1\}$;

(c) $D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2y\}$;

(d) $D_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq x, y \geq 0\}$;

(e) $D_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0, x + y - 6 = 0, y^2 = 8x\}$;

(f) $D_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2x + 2y - 1\}$.

2. Calculați $\iint_D f(x, y)dxdy$ în următoarele cazuri:

(a) $D = [0, 1] \times [2, 3]$, iar $f(x, y) = xy^2$;

(b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 2x \leq y \leq x^2 + 1\}$, iar $f(x, y) = x$;

(c) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x, y = x^2\}$, iar $f(x, y) = 3x - y + 2$;

(d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, iar $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$;

(e) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$, iar $f(x, y) = e^{-2(x^2+y^2)}$;

(f) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq x, y \geq 0\}$, iar $f(x, y) = xy$.

3. Calculați ariile domeniilor de mai sus.

4. Calculați aria domeniului:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x + y \geq 0\}.$$

5. Calculați volumul corpului mărginit de suprafețele de ecuații date:

(a) $z = x^2 + y^2$ (paraboloid), $z = x + y$ (plan);

(b) $z = x^2 + y^2 - 1, z = 2 - x^2 - y^2$;

(c) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (sferă), $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ (cilindru).

9.2 Indicații teoretice

Pentru un domeniu D, mărginit de (in)ecuații date, *aria domeniului* se calculează cu integrala dublă:

$$A(D) = \iint_D dxdy.$$

Similar, *volumul corpului* Ω închis de suprafețe date se calculează cu integrala triplă:

$$V(\Omega) = \iiint_\Omega dxdydz.$$

Atunci cînd domeniul plan este de natură circulară, este de preferat să se folosească trecerea la *coordonate polare* (r, θ). Astfel, pentru coordonate carteziene (x, y), trecerea la coordonatele polare se face cu formula:

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{cases},$$

domeniul fiind, în general, $r \in [0, \infty)$, iar $\theta \in [0, 2\pi]$, dacă nu există restricții suplimentare.

Similar, pentru cazul tridimensional, pot fi necesare următoarele sisteme de coordonate, descrise împreună cu trecerea de la coordonatele carteziene (x, y, z):

- *Coordonate sferice* (r, θ, φ):
$$\begin{cases} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{cases},$$
cu domeniul, respectiv, $[0, \infty) \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$;

- *Coordonate cilindrice* (r, θ, z):
$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z \end{cases},$$
cu domeniul, respectiv, $[0, \infty) \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$.

Ca în cazul 1-dimensional, atunci cînd se face schimbarea de coordonate, trebuie calculată și modificarea diferențialei. Aceasta se face cu ajutorul *matricei jacobiene*, al cărui determinant se numește *jacobianul* transformării.

Dacă φ este, în general, funcția care dă schimbarea de coordonate, matricea jacobiană se definește prin derivatele parțiale ale vechilor coordonate în raport cu noile coordonate.

De exemplu, pentru coordonatele polare, avem:

$$J_\varphi(r, \theta) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \Longrightarrow \det J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

Similar, pentru coordonatele cilindrice, $|J_\varphi(r, \theta, z)| = r\sin\theta$, iar pentru coordonatele sferice, $|J_\varphi(r, \theta, \varphi)| = r^2\sin\theta$.

O notație alternativă, care pune în evidență și coordonatele, este:

$$J_\varphi(r, \theta) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$$

și celelalte.

Observație 9.1: Pentru resurse electronice suplimentare, puteți folosi:

- GeoGebra— pentru reprezentări grafice;

- Lecțiile online ale Prof. Travis Kowalski (în special secțiunea `Calculus 3`, începînd cu lecția 17 pentru integrale duble).

SEMINAR 10

INTEGRALE CURBILINII. FORMULE INTEGRALE 1

10.1 Integrala curbilinie de prima speță

Fie $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un drum neted, adică dat de o funcție de clasă $\mathcal{C}^1$ și fie $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă, cu proprietatea că $D \supseteq \gamma([a, b])$.

Se definește *integrala curbilinie de speța întîi* a funcției f în lungul drumului γ prin:

$$\int_\gamma f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt,$$

unde $(x(t), y(t), z(t))$ este o *parametrizare* a drumului γ. În particular, pentru $f = 1$, obținem *lungimea drumului* γ:

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt.$$

Mai sînt relevante și alte două interpretări fizice:

- presupunem că γ reprezintă un fir material, iar f este funcția care dă *densitatea* firului. Atunci *masa* firului se poate calcula prin integrala curbilinie:

$$M = \int_\gamma f ds;$$

- dacă x_i^G sînt coordonatele centrului de greutate ale firului ($x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$), acestea se pot calcula prin integrala curbilinie:

$$x_i^G = \frac{1}{M} \int_\gamma x_i f ds.$$

10.2 Integrala curbilinie de speța a doua

Fie $\alpha = Pdx + Qdy + Rdz$ o 1-formă diferențială, unde P, Q, R sînt funcții continue definite pe $D \subseteq \mathbb{R}^3$. Fie, de asemenea, $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$ un drum parametrizat, neted, cu $\gamma([a, b]) \subseteq D$.

Se definește *integrala curbilinie a formei diferențiale* α în lungul drumului γ prin formula:

$$\int_\gamma \alpha = \int_a^b (P\circ\gamma)x'(t) + (Q\circ\gamma)y'(t) + (R\circ\gamma)z'(t)dt.$$

Interpretările fizice relevante sînt următoarele:

- formei diferențiale α i se poate asocia un cîmp vectorial tridimensional, cu aceleași componente: $\vec{V} = (P, Q, R)$. Atunci integrala curbilinie a lui α în lungul curbei γ se numește *circulația cîmpului* $\vec{V}$ de-a lungul drumului γ, notată:

$$\int_\gamma \alpha = \int_\gamma \vec{V} \cdot d\vec{r};$$

- dacă interpretăm cîmpul $\vec{V}$ de mai sus ca pe un *cîmp de forțe*, atunci integrala de mai sus este *lucrul mecanic al forței* $\vec{F}$, care acționează asupra unui corp punctiform în lungul drumului γ:

$$\int_\gamma \alpha = \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

10.3 Formula Green-Riemann

Această formulă, care face parte din formulele integrale esențiale pe care le vom studia, ne permite să transformăm o integrală curbilinie de speța a doua într-una dublă.

Mai precis, avem formula:

$$\int_\gamma Pdx + Qdy = \iint_K \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy,$$

unde K este suprafața bidimensională închisă de curba γ.

Observație importantă: Pentru a putea aplica formula Green-Riemann, este necesar ca drumul γ să fie închis, pentru a putea descrie o suprafață închisă K! De asemenea, evident, forma diferențială trebuie să fie de clasă $\mathcal{C}^1$, inclusiv în K, pentru a putea calcula derivatele parțiale.

10.3.1 Forme diferențiale închise

Fie $\alpha = Pdx + Qdy$ o 1-formă diferențială de clasă $\mathcal{C}^1$ pe o vecinătate a $K = \text{Int}(\gamma)$. Această formă diferențială se numește *închisă* dacă are loc:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Se poate observa, folosind formula Green-Riemann, că pentru forme diferențiale închise, integrala curbilinie în lungul oricărui drum este nulă. Această observație se mai numește *independența de drum a integralei curbilinii.*

10.4 Exerciții

1. Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de speța întîi:

(a) $\int_\gamma x ds$, unde $\gamma : y = x^2, x \in [0, 2]$;

(b) $\int_\gamma y^5 ds$, unde $\gamma : x = \frac{y^4}{4}, y \in [0, 2]$;

(c) $\int_\gamma x^2 ds$, unde $\gamma : x^2 + y^2 = 2, x, y \geq 0$;

(d) $\int_\gamma y^2 ds$, unde $\gamma : x^2 + y^2 = 4, x \leq 0, y \geq 0$.

2. Calculați, direct și aplicînd formula Green-Riemann, integrala curbilinie $\int_\gamma \alpha$ în următoarele cazuri:

(a) $\alpha = y^2 dx + x dy$, unde γ este pătratul cu vîrfurile $A(0, 0), B(2, 0), C(2, 2), D(0, 2)$;

(b) $\alpha = y dx + x^2 dy$, unde γ este cercul centrat în origine și de rază 2.

3. Calculați următoarele integrale curbilinii de speța a doua:

(a) $\int_\gamma x dy - y dx$, unde $\gamma : x^2 + y^2 = 4, y = x\sqrt{3} \geq 0$ și $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$;

(b) $\displaystyle\int_\gamma (x+y)dx + (x-y)dy$, pe domeniul:

$$\gamma\ :\ x^2 + y^2 = 4, y \geq 0;$$

(c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{y}{x+1}dx + dy$, unde γ este triunghiul cu vîrfurile $A(2,0), B(0,0), C(0,2)$.

4. Să se calculeze $\displaystyle\int_\gamma ydx + xdy$ pe un drum de la $A(2,1)$ la $B(1,3)$.

5. Să se calculeze circulația cîmpului de vectori $\vec{V}$ de-a lungul curbei γ, pentru:

(a) $\vec{V} = -(x^2+y^2)\vec{i} - x^2 \vec{-} y^2\vec{j}$, cu:

$$\gamma\ :\ \{x^2 + y^2 = 4, y < 0\} \cap \{x^2 + y^2 - 2x = 0, y \geq 0\}$$

(b) $\vec{V} = x\vec{y} + xy\vec{j}$, unde:

$$\gamma\ :\ \{x^2 + y^2 = 1\} \cap \{x + y = 3\}.$$

6. Să se calculeze masa firului material γ, cu ecuațiile parametrice:

$$\begin{cases} x(t) & = t \\ y(t) & = t^2/2, t \in [0,1] \\ z(t) & = t^3/3 \end{cases}$$

iar densitatea $f(x,y,z) = \sqrt{2y}$.

7. Fie forma diferențială:

$$\alpha = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy.$$

Să se calculeze $\displaystyle\int_\gamma \alpha$, unde γ este cercul centrat în origine și cu raza 2.

8. Să se calculeze integrala curbilinie $\displaystyle\int_\gamma xydx + \frac{x^2}{2}dy$, pe conturul:

$$\gamma\ :\ \{x^2 + y^2 = 1, x \leq 0 \leq y\} \cap \{x + y = -1, x, y < 0\}.$$

Indicație: Curba γ nu este închisă, deci nu putem aplica formula Green-Riemann. Considerăm segmentul orientat $[AB]$, cu $A(0,-1), B(0,1)$, cu care închidem curba. Definim $C = \gamma \cup [AB]$ și acum putem aplica Green-Riemann pe C. Vom avea, de fapt:

$$\int_C \alpha = \int_\gamma \alpha + \int_{[AB]} \alpha,$$

unde α este forma diferențială de integrat.

Putem calcula acum integrala pe C cu Green-Riemann, iar cea pe $[AB]$ cu definiția, obținînd în final integrala pe γ.

9. Calculați, folosind integrala curbilinie:

(a) lungimea unui cerc de rază 2;

(b) lungimea segmentului AB, cu $A(1,2)$ și $B(3,5)$;

(c) lungimea arcului de parabolă $y = 3x^2$, cu $x \in [-2,2]$;

(d) lungimea arcului de hiperbolă $xy = 1$, cu $x \in [1,2]$.

SEMINAR 11

INTEGRALE DE SUPRAFAȚĂ. FORMULE INTEGRALE 2

11.1 Integrale de suprafață de speța întîi

Integralele de suprafață reprezintă generalizarea într-o dimensiune superioară pentru integralele curbilinii. Astfel, multe dintre formulele și abordările de calcul pe care le vom folosi vor fi similare.

Fie $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ o pînză parametrizată și fie $\Sigma = \Phi(D)$ imaginea ei (i.e. suprafață pe care vom integra). Fie $f : U \subseteq \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă (deci integrabilă), definită pe (o porțiune din) imaginea pînzei.

Vom fi interesați de un caz particular (și, totodată, cel mai des întîlnit) pentru integrala de suprafață, anume cînd pînza este dată într-o *parametrizare carteziană*. Adică ecuația suprafeței poate fi scrisă în forma $z = z(x, y)$.

Integrala de suprafață de speța întîi a funcției f pe suprafața Σ parametrizată cartezian prin $z = z(x, y)$ este:

$$\int_{\Sigma} f(x, y, z)d\sigma = \iint_{D} f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + p^2 + q^2}dxdy,$$

unde:

- D este domeniul de definiție al parametrizării carteziene, adică proiecția pe planul XOY a suprafeței ($z : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$);
- coeficienții de sub radical sînt $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$ și $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

În cazul particular în care $f = 1$, se obține *aria suprafeței* Σ.

11.2 Integrale de suprafață de speța a doua

Fie, ca mai sus, o pînză tridimensională, pe care o considerăm a fi parametrizată:

$$\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Phi(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)).$$

Fie, de asemenea, o 2-formă diferențială[1]:

$$\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy.$$

Integrala pe suprafața orientată $\Sigma = \Phi(D)$ a 2-formei diferențiale ω se definește prin:

$$\int_\Sigma \omega = \iint_D (P \circ \Phi) \cdot \frac{D(Y, Z)}{D(u, v)} + (Q \circ \Phi) \cdot \frac{D(Z, X)}{D(u, v)} + (R \circ \Phi) \cdot \frac{D(X, Y)}{D(u, v)} dudv,$$

unde D este domeniul parametrizării ($(u, v) \in D$), iar $\frac{D(Y, Z)}{D(u, v)}$ etc. sînt jacobienii parametrizării (X, Y, Z) în funcție de u, v. Concret, de exemplu, avem:

$$\frac{D(X, Y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} X_u & X_v \\ Y_u & Y_v \end{vmatrix},$$

și celelalte, folosind notația simplificată $X_u = \frac{\partial X}{\partial u}$ etc. [2]

Într-o formă simplificată, putem scrie integrala folosind un determinant formal:

$$\int_\Sigma \omega = \begin{vmatrix} P \circ \Phi & Q \circ \Phi & R \circ \Phi \\ X_u & Y_u & Z_u \\ X_v & Y_v & Z_v \end{vmatrix} dudv.$$

11.3 Formula Gauss-Ostrogradski

Această formulă ne permite să schimbăm o integrală de suprafață de speța a doua cu una triplă, similar formulei Green-Riemann, dar în dimensiune superioară.

[1] ω este o **2**-formă diferențială deoarece ea conține produse de cîte 2 elemente diferențiale dx, dy, dz. De asemenea, notația $\wedge$ (citită „wedge“ sau „produs exterior“) este o notație specifică pentru produsul care se definește între diferențialele dx, dy, dz. Alternativ, puteți găsi scrierea și prin juxtapunere:

$$\omega = Pdydz + Qdzdx + Rdxdy.$$

Însă acest produs *nu este comutativ*, deci ordinea în care scriem 2-forma diferențială este esențială! (observați permutările circulare: $dydz \longrightarrow dzdx \longrightarrow dxdy$).

[2] Ordinea scrierii jacobienilor este, evident, esențială. Pentru a-i reține mai ușor, observați că ordinea urmează tot o permutare circulară, asemănătoare diferențialelor din 2-forma diferențială ω.

Păstrînd notațiile și contextul de mai sus, formula Gauss-Ostrogradski se scrie:

$$\int_{\Sigma} \omega = \iiint_K P_x + Q_y + R_z dxdydz,$$

unde $K = \text{Int}\Sigma$ este solidul care are drept frontieră suprafața Σ, iar P_x, Q_y, R_z notează derivatele parțiale corespunzătoare coeficienților din 2-forma diferențială ω.

Observaţie 11.1: Formula Gauss-Ostrogradski are, ca și formula Green-Riemann, *condiții de aplicare (existență)*. Încercați să le formulați, analizînd formula.

Formula Gauss-Ostrogradski se mai numește *formula flux-divergență*. Într-adevăr, folosind o interpretare fizică, se poate asocia 2-formei diferențiale ω cîmpul vectorial $\vec{V} = (P, Q, R)$, iar membrul stîng, adică integrala de suprafață, calculează *fluxul cîmpului $\vec{V}$ prin suprafața* Σ. În fizică, acesta se definește ca produsul scalar dintre cîmpul vectorial și versorul normal la suprafață. Membrul drept este, după cum se poate vedea ușor, divergența cîmpului vectorial *în solidul* $\text{Int}\Sigma$, deci avem:

$$\int_{\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_K \nabla \cdot \vec{V} dxdydz.$$

Versorul normal se poate calcula prin formula:

$$\vec{n} = \frac{1}{\|\nabla \vec{V}\|} \cdot \nabla \vec{V}.$$

Pentru cazul cînd suprafața este parametrizată, adică avem:

$$\Phi = \Phi(X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)),$$

se pot calcula *vectorii tangenți* la suprafață, după direcțiile lui u și v, prin derivate parțiale:

$$\vec{T}_u = \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \qquad \vec{T}_v = \frac{\partial \Phi}{\partial v}.$$

Apoi, normala la suprafață se poate calcula prin produs vectorial[3]. O variantă simplă de a reține formula de calcul pentru produsul vectorial folosește determinantul formal:

$$\vec{n} = \vec{T}_u \times \vec{T}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \vec{T}_u^1 & \vec{T}_u^2 & \vec{T}_u^3 \\ \vec{T}_v^1 & \vec{T}_v^2 & \vec{T}_v^3 \end{vmatrix},$$

unde $\vec{T}_{u,v}^i$ notează componenta i a vectorului $\vec{T}_{u,v}$.

[3] amintiți-vă, produsul vectorial al doi vectori este un vector perpendicular pe planul dat de cei doi factori

11.4 Parametrizări uzuale

Următoarele formule de parametrizare pot fi folosite în calcule:

(1) **Sfera:** Fie $R > 0$ și $(u, v) \in D = [0, \pi] \times [0, 2\pi)$. Parametrizarea sferei $\Phi = \Phi(u, v)$ este:

$$\Phi(u, v) = (R \sin u \cos v, R \sin u \sin v, R \cos u);$$

(2) **Elipsoidul:** Fie $a, b, c > 0$ și $(u, v) \in D = [0, \pi] \times [0, 2\pi)$. Parametrizarea elipsoidului este:

$$\Phi(u, v) = (a \sin u \cos v, b \sin u \sin v, c \cos u);$$

(3) **Paraboloidul:** Fie $a > 0, h > 0$ și $(u, v) \in D = [0, h] \times [0, 2\pi)$. Parametrizarea paraboloidului este:

$$\Phi(u, v) = (au \cos v, au \sin v, u^2);$$

(4) **Conul:** Fie $h > 0$ și $(u, v) \in D = [0, 2\pi) \times [0, h]$. Parametrizarea conului este:

$$\Phi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, v);$$

(5) **Cilindrul:** Fie $a > 0, 0 \leq h_1 \leq h_2$ și $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [h_1, h_2]$. Parametrizarea cilindrului este:

$$\Phi(u, v) = (a \cos u, a \sin u, v).$$

11.5 Exerciții

1. Calculați vectorii tangenți și versorul normalei la suprafețele parametrizate din secțiunea anterioară.

2. Să se calculeze integrala de suprafață de prima speță:

$$\int_\Sigma f(x, y, z) d\sigma,$$

unde $f(x, y, z) = y\sqrt{z}$, iar $\Sigma : x^2 + y^2 = 6z, z \in [0, 2]$.

3. Folosind integrala de suprafață, calculați aria suprafeței Σ, unde:

$$\Sigma : 2z = 4 - x^2 - y^2, \quad z \in [0, 1].$$

4. Calculați fluxul cîmpului vectorial $\vec{V}$ prin suprafața Σ pentru:

$$\vec{V} = y\vec{i} + x\vec{j} + z^2\vec{k}, \quad \Sigma : z = x^2 + y^2, z \in [0, 1].$$

5. Calculați $\displaystyle\int_\Sigma \omega$, unde:

(a)
- $\omega = ydy \wedge dz + zdz \wedge dx + xdx \wedge dy$;
- $\Sigma : x^2 + y^2 = z^2, z \in [1, 2]$.

(b)
- $\omega = x(z + 3)dy \wedge dz + yzdz \wedge dx - (z + z^2)dx \wedge dy$;
- $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$.

6. Calculați fluxul cîmpului:

$$\vec{V} = (x + y)dy \wedge dz + (y + z)dz \wedge dx - 2zdx \wedge dy$$

prin emisfera $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = 4, z > 0$.

11.6 Formula lui Stokes

Această ultimă formulă integrală ne permite să schimbăm o integrală curbilinie de speța a doua cu una de suprafață de speța a doua.

Fie Σ o suprafață cu bord (frontieră) și fie o 1-formă diferențială

$$\alpha = Pdx + Qdy + Rdz,$$

care este de clasă $\mathcal{C}^1$ într-o vecinătate a lui Σ.

Notăm frontiera lui Σ prin $\partial\Sigma$, care este o curbă (conturul suprafeței) sau, mai precis, un *drum neted.*

Are loc *formula lui Stokes:*

$$\int_{\partial\Sigma} Pdx + Qdy + Rdz = \int_\Sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx \wedge dy.$$

În notație vectorială, dacă asociem cîmpul vectorial $\vec{V} = (P, Q, R)$ 1-formei diferențiale α, atunci formula lui Stokes se scrie:

$$\int_{\partial\Sigma} \vec{V} \cdot d\vec{r} = \int_\Sigma (\nabla \times \vec{V}) \cdot \vec{n} d\sigma,$$

unde $\nabla \times \vec{V} = \operatorname{rot}\vec{V}$ se numește *rotorul* cîmpului vectorial, calculat cu ajutorul produsului vectorial formal între operatorul diferențial $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ și cîmpul $\vec{V} = (P, Q, R)$.

11.7 Exerciții

7. Să se calculeze, folosind formula lui Stokes, integrala curbilinie $\int_\gamma \alpha$ pentru cazurile:

(a) $\alpha = (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, iar curba γ este frontiera suprafeței $\Sigma : z = x^2 + y^2, z = 1$;

(b) $\alpha = ydx + zdy + xdz$, iar curba γ este frontiera suprafeței $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0$.

SEMINAR 12

MODELE RECAPITULATIVE

12.1 Model 1

Acesta este examenul dat de Prof. Olteanu la ACS, sesiunea ianuarie 2018.

Numărul 1

1. Să se afle valorile extreme ale funcției:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 3x - 2y + 1$$

pe mulțimea $K : x^2 + y^2 \leq 1$.

2. Calculați $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}$.

3. Să se calculeze volumul corpului mărginit de suprafețele:

$$\begin{cases} z &= x^2 + y^2 \\ 2 &= x^2 + y^2 + z^2. \end{cases}$$

4. Să se calculeze fluxul cîmpului $\vec{V} = (x + z^2, y + z^2, -2z)$ prin suprafața $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$.

5. Să se calculeze aria suprafeței:

$$\Sigma = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\} \cap \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 \leq Ry\}.$$

(Aria lui Viviani)

Numărul 2
1. Să se afle valorile extreme ale funcției:

$$f(x, y) = x \cdot y, \text{ pe } K : 2x^2 + y^2 \le 1.$$

2. Calculați $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^3 + 1}$.

3. Să se calculeze volumul corpului obținut prin intersecția suprafețelor:

$$\begin{cases} 2 & = x^2 + y^2 + z^2 \\ z^2 & = x^2 + y^2, z \ge 0 \end{cases}$$

4. Să se calculeze aria suprafeței $2 - z = x^2 + y^2, z \in [0, 1]$.

5. Calculați fluxul cîmpului vectorial $\vec{V} = \frac{q}{4\pi} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$ prin:

(a) Sfera centrată în origine și cu rază $R > 0$;

(b) Orice suprafață Σ închisă, care nu conține originea.

Observație: $\vec{r} = (x, y, z)$ și $r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
(Legea lui Gauss)

12.2 Model 2

1. Calculați, folosind beta și gamma, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt[4]{x}}{(x+1)^2} dx$.

2. Calculați integrala:

$$\iint_D (1 + \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy, \quad D : x^2 + y^2 \le 2, y > 0.$$

3. Calculați volumul corpului mărginit de suprafețele:

$$\begin{cases} z & = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 & = 6, z > 0. \end{cases}$$

4. Calculația aria suprafeței determinate de:

$$z = 5 - x^2 - y^2, \quad z \in [1, 4].$$

5. Determinați valorile extreme pentru funcția:

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 2xy,$$

unde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y, \geq 0, y + 2x \leq 2\}$.

12.3 Model 3

1. Determinați valorile extreme pentru funcția:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^4 + y^3 - 4x^3 - 3y^2 + 3y,$$

unde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.

2. Calculați $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{(1 + x^4)^2} dx$.

3. Calculați volumul mulțimii mărginite de suprafețele:

$$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 6z, z \geq 3$$
$$S_2 : 2(x^2 + y^2) = z^2.$$

4. Fie suprafața $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 5, z \leq 0\}$. Desenați suprafața și calculați:

$$\iint_S (2x + 5x) dy \wedge dz + 2y dz \wedge dx + (2z - 5x) dx \wedge dy.$$

INDEX

BIBLIOGRAFIE

[Burtea, 2006] Burtea, M. (2006). *Manual de matematică M1, clasa a XI-a.* Carminis.

[Costache, 2009] Costache, L. (2009). *Analiză matematică.* Printech.

[Olteanu, 2004] Olteanu, M. (2004). *Analiză matematică.* online.

[Țena, 2006] Țena, M. (2006). *Manual de matematică M1, clasa a XI-a.* Art.