Seminar 9
Integrale de suprafață

Noțiuni teoretice

Integralele de suprafață sînt similare celor curbilinii, cu modificarea că acum suportul pe care integrăm este o suprafață bidimensională.

Analogul curbelor parametrizate $\gamma(t)$ din cazul curbiniliu vom avea *pînze parametrizate* $\Phi(u, v)$.

Integrala de suprafață de speța întîi se calculează în următorul context și cu formula de mai jos. Fie $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ o pînză parametrizată, iar $\Sigma = \Phi(D)$ imaginea ei. Fie $F : U \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe imaginea pînzei. Integrala de suprafață a lui F pe Σ este, prin definiție:

$$\int_\Sigma F(x, y, z) d\sigma = \iint_D F(\Phi(u, v)) \cdot \left|\left|\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right|\right| du dv,$$

unde $\Phi(u, v)$ este o parametrizare a suprafeței, iar:

- $\vec{T}_u = \frac{\partial \Phi}{\partial u}$ este *vectorul tangent* la suprafață în direcția parametrului u;
- $\vec{T}_v = \frac{\partial \Phi}{\partial v}$ este *vectorul tangent* la suprafață în direcția parametrului v;
- $\vec{T}_u \times \vec{T}_v = \vec{N}$ este *vectorul normal* la suprafață.

În multe situații, parametrizarea suprafeței Σ este dată într-o formă particulară, numită *parametrizarea carteziană*. În acest caz, avem $z = f(x, y)$, cu $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Pentru această situație, formula de mai sus se simplifică și este:

$$\int_\Sigma F(x, y, z) d\sigma = \iint_D F(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy,$$

unde coeficienții sînt $p = z_x, q = z_y$.

Cazuri particulare de interes:

- Pentru $F = 1$, obținem *aria suprafeței* Σ;
- Dacă $F \geqslant 0$ este densitatea unei plăci Σ, atunci *masa ei* se calculează prin $M = \int_\Sigma F d\sigma$, iar *coordonatele centrului de greutate* sînt $x_i^G = \frac{1}{M} \int_\Sigma x_i F d\sigma$;
- Dacă F este interpretat ca un cîmp vectorial, atunci integrala de suprafață dă *fluxul cîmpului*:

$$\Phi_\Sigma(\vec{F}) = \iint_D F(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot (\vec{T}_u \times \vec{T}_v) du dv.$$

Pentru **integralele de suprafață de speța a doua**, considerăm o *2-formă diferențială*:

$$\omega = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$$

și fie o pînză parametrizată:

$$\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \Phi(u,v) = (X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)).$$

Atunci integrala pe suprafața orientată Σ a formei diferențiale ω este definită prin:

$$\int_\Sigma \omega = \iint_D \left((P \circ \Phi) \cdot \frac{D(Y,Z)}{D(u,v)} + (Q \circ \Phi) \cdot \frac{D(Z,X)}{D(u,v)} + (R \circ \Phi) \cdot \frac{D(X,Y)}{D(u,v)} \right) du dv,$$

unde $\frac{D(Y,Z)}{D(u,v)}$ etc. sînt jacobienii funcțiilor X, Y, Z în raport cu variabilele u, v. Mai precis, avem, de exemplu:

$$\frac{D(Y,Z)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} Y_u & Y_v \\ Z_u & Z_v \end{vmatrix}.$$

Putem scrie formula de mai sus într-o variantă simplificată, anume:

$$\int_\Sigma \omega = \iint_D \begin{vmatrix} P \circ \Phi & Q \circ \Phi & R \circ \Phi \\ X_u & Y_u & Z_u \\ X_v & Y_v & Z_v \end{vmatrix} du dv.$$

Exerciții

1. În fiecare din exemplele următoare, considerăm:

$$D \ni (u,v) \mapsto \Phi(u,v) = (X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)) \in \mathbb{R}^3$$

o pînză parametrizată. Să se calculeze vectorii tangenți la suprafață și versorul normalei la suprafață.

(a) *Sfera*: Fie $R > 0$ și $\Phi : [0,\pi] \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$:

$$\Phi(\theta, \varphi) = (R \sin\theta \cos\varphi, R \sin\theta \sin\varphi, R\cos\theta);$$

(b) *Paraboloidul*: Fie $a > 0, h > 0$ și $\Phi : [0,h] \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$:

$$\Phi(u,v) = (au\cos v, au\sin v, u^2);$$

(c) *Elipsoidul*: Fie $a, b, c > 0$ și $\Phi : [0,\pi] \times [0,2\pi) \to \mathbb{R}^3$:

$$\Phi(\theta,\varphi) = (a\sin\theta\cos\varphi, b\sin\theta\sin\varphi, c\cos\theta);$$

(d) *Conul*: Fie $h > 0, \Phi : [0,2\pi) \times [0,h] \to \mathbb{R}^3$:

$$\Phi(u,v) = (v\cos u, v\sin u, v);$$

(e) *Cilindrul*: Fie $a > 0, 0 \leqslant h_1 \leqslant h_2, \Phi : [0,2\pi) \times [h_1,h_2] \to \mathbb{R}^3$:

$$\Phi(\varphi, z) = (a\cos\varphi, a\sin\varphi, z);$$

(f) *Torul*: Fie $0 < a < b, \Phi[0,2\pi) \times [0,2\pi) \to \mathbb{R}^3$:

$$\Phi(u,v) = ((a + b\cos u)\cos v, (a + b\cos u)\sin v, b\sin u).$$

(g) *Parametrizarea carteziană*: Fie $D \subseteq \mathbb{R}^2$ și $f : D \to \mathbb{R}$, cu $f \in \mathcal{C}^1(D)$:

$$\Phi : D \to \mathbb{R}^3, \quad \Phi(x,y) = (x, y, f(x,y)).$$

Indicație: Vectorii tangenți la suprafață sînt $\frac{\partial\Phi}{\partial u}$ și $\frac{\partial\Phi}{\partial v}$, iar versorul normalei este:

$$\frac{1}{\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial u}\times\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right\|}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial u}\times\frac{\partial\Phi}{\partial v}.$$

2. Fie $\omega = Pdy\wedge dz + Qdz\wedge dx + Rdx\wedge dy$ o 2-formă diferențială, iar Σ, imaginea unei pînze parametrizate. Să se calculeze integrala de suprafață $\int_\Sigma \omega$ în cazurile:

(a) $\omega = ydy\wedge dz + zdz\wedge dx + xdx\wedge dy$, unde:

$$\Sigma : \begin{cases} X(u,v) &= u\cos v \\ Y(u,v) &= u\sin v \\ Z(u,v) &= cv \end{cases}$$

cu domeniul $(u,v)\in[a,b]\times[0,2\pi)$;

(b) $\omega = xdy\wedge dz + ydz\wedge dx + zdx\wedge dy$, unde:

$$\Sigma : x^2+y^2+z^2 = R^2;$$

(c) $\omega = yzdy\wedge dz + zxdz\wedge dx + xydx\wedge dy$, unde:

$$\Sigma : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1;$$

(d) $\omega = xdy\wedge dz + ydz\wedge dx$, unde:

$$\Sigma : x^2+y^2 = z^2, \quad z\in[1,2];$$

(e) $\omega = (y+z)dy\wedge dz + (x+y)dx\wedge dy$, unde:

$$\Sigma : x^2+y^2 = a^2, \quad a\in[0,1]$$

3. Să se calculeze integrala de suprafață de prima speță:

$$\iint_\Sigma F(x,y,z)d\sigma$$

în următoarele cazuri:

(a) $F(x,y,z) = |xyz|$, iar $\Sigma : x^2+y^2 = z^2, z\in[0,1]$;

(b) $F(x,y,z) = y\sqrt{z}$, iar $\Sigma : x^2+y^2 = 6z, z\in[0,2]$;

(c) $F(x,y,z) = z^2$, iar $\Sigma = \{(x,y,z) \mid z = \sqrt{x^2+y^2}, x^2+y^2-6y\leqslant 0\}$.

4. Folosind integralele de suprafață, să se calculeze ariile suprafețelor:

(a) sfera de rază R;

(b) conul $z^2 = x^2+y^2, z\in[0,h]$;

(c) paraboloidul $z = x^2 + y^2, z \in [0, h]$.

5. Să se calculeze aria suprafeței Σ în următoarele cazuri:

(a) $\Sigma : 2z = 4 - x^2 - y^2, z \in [0, 1]$;

(b) Σ este submulțimea de pe sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, situată în interiorul conului $x^2 + y^2 = z^2$, în semispațiul $z \geqslant 0$;

(c) Σ este submulțimea de pe sfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, situată în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 - Ry = 0$;

(d) Σ este submulțimea de pe paraboloidul $z = x^2 + y^2$, situată în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 = 2y$.

6. Să se calculeze fluxul cîmpului vectorial $\vec{V}$ prin suprafața Σ în următoarele cazuri:

(a) $\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, iar $\Sigma : z^2 = x^2 + y^2$, cu $z \in [0, 1]$;

(b) $\vec{V} = y\vec{i} + x\vec{j} + z^2\vec{k}$, iar $\Sigma : z = x^2 + y^2$, cu $z \in [0, 1]$;

(c) $\vec{V} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(y\vec{i} - x\vec{j} + \vec{k})$, iar $\Sigma : z = 4 - x^2 - y^2, z \in [0, 1]$.