Seminar 8
Recapitulare parțial

Șirul aproximațiilor succesive
1. Să se aproximeze cu o eroare mai mică decît 10^{-3} soluția reală a ecuației $x^3 + 4x - 1 = 0$.
Indicație: $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$ sau $g(x) = \frac{1}{4}(1 - x^3)$.

2. Aceeași cerință pentru $x^3 + 12x - 1 = 0$.
Indicație: $f(x) = \frac{1}{x^2+12}$.

3. Aceeași cerință pentru: $x^5 + x - 15 = 0$.
Indicație: $f(x) = \sqrt[5]{15 - x}$.

Integrale improprii
4. Să se calculeze, folosind funcțiile Γ și B, integralele:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^p} dx, p > 0;$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{4}}}{(x+1)^2} dx;$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1} dx;$

(d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos^q x dx, p > -1, q > -1;$

(e) $\displaystyle\int_0^1 x^{p+1}(1 - x^m)^{q-1} dx, p, q, m > 0;$

(f) $\displaystyle\int_0^\infty x^p e^{-x^q} dx, p > -1, q > 0;$

(g) $\displaystyle\int_0^1 \ln^p x^{-1} dx, p > -1;$

(h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1 - x^n)^{\frac{1}{n}}}, n \in \mathbb{N};$

(i) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x} \ln^3 x \cdot (1 - \ln x)^4 dx;$

(j) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\ln \frac{1}{x}} dx;$

(k) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^4)^2} dx;$

(l) $\int_{-1}^{\infty} e^{-x^2-2x+3} dx$;

Integrale curbilinii

5. Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de speța întîi:

(a) $\int_C x ds$, unde $C : y = x^2, x \in [0, 2]$;

(b) $\int_C y^5 ds$, unde $C : x = \frac{y^4}{4}, y \in [0, 2]$;

(c) $\int_C x^2 ds$, unde $C : x^2 + y^2 = 2, x, y \geqslant 0$;

(d) $\int_C y ds$, unde $C : x(t) = \ln(\sin t) - \sin^2 t, y(t) = \frac{1}{2} \sin 2t, t \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$;

(e) $\int_C xy ds$, unde $C : x(t) = |t|, y(t) = \sqrt{1 - t^2}, t \in [-1, 1]$;

(f) $\int_C |x - y| ds$, unde $C : x(t) = |\cos t|, y(t) = \sin t, t \in [0, \pi]$.

6. Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de speța a doua:

(a) $\int_C \frac{dx}{2a+y} - \frac{dy}{a+x}$, unde C este o curbă simplă formată din porțiunea din cercul $x^2 + y^2 + 2ay = 0$ $(a > 0)$, pentru care $x + y \geqslant 0$, iar capătul de pornire este $A(a, -a)$;

(b) $\int_C x dy - y dx$, unde $C : x^2 + y^2 = 4, y = x\sqrt{3}, x \geqslant 0, y = \frac{x}{\sqrt{3}}$;

(c) $\int_\gamma (x + y) dx + (x - y) dy$, unde domeniul este:

$$\gamma = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4, y \geqslant 0\}.$$

(d) $\int_\gamma \frac{y}{x+1} dx + dy$, unde γ este triunghiul cu vîrfurile $A(2, 0), B(0, 0), C(0, 2)$;

(e) $\int_\gamma x dy - y dx$, unde:

$$\gamma = \{(x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}.$$

7. Să se calculeze $\int_\gamma y dx + x dy$, pe un drum de la $A(2, 1)$ la $B(1, 3)$.

Integrale duble și triple

8. Calculați volumele mulțimilor Ω, mărginite de suprafețele de ecuații:

(a) $2x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad 2x^2 + y^2 - z^2 = 0, z \geqslant 0$;

(b) $z = x^2 + y^2 - 1, \quad z = 2 - x^2 - y^2$;

(c) $z = 4 - x^2 - y^2, \quad 2z = 5 + x^2 + y^2$;

(d) $x^2 + y^2 = 1, \quad z^2 = x^2 + y^2, \quad z \geqslant 0$.

9. Să se calculeze, trecînd la coordonate polare, integralele:

(a) $\iint_D e^{x^2+y^2} dxdy$, unde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$;

(b) $\iint_D 1 + \sqrt{x^2+y^2} dxdy$, unde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-y \leqslant 0, x \geqslant 0\}$;

(c) $\iint_D \ln(1+x^2+y^2) dxdy$, unde D este mărginit de curbele de ecuații:

$$\begin{cases} x^2+y^2 & = e^2 \\ y & = x\sqrt{3} \\ x & = y\sqrt{3} \\ x & \geqslant 0 \end{cases}$$

10. Calculați integralele duble, găsind explicit domeniul de definiție (prin intersecția curbelor care îl definesc):

(a) $\iint_D xy dxdy$, cu $D : xy = 1, \quad x+y = \frac{5}{2}$;

(b) $\iint_D \frac{1}{\sqrt{x}} dxdy$, cu $D : y^2 \leqslant 8x, y \leqslant 2x, y+4x \leqslant 24$;

(c) $\iint_D (1-y) dxdy$, cu $D : x^2+(y-1)^2 \leqslant 1, y \leqslant x^2, x \geqslant 0$.