Seminar 7
Formula Green-Riemann

1 Formula Green-Riemann

Fie $(K, \partial K)$ un compact cu bord orientat inclus în $\mathbb{R}^2$ și considerăm o 1-formă diferențială de clasă $\mathcal{C}^1$ pe o vecinătate a lui K, $\alpha = P dx + Q dy$. Atunci are loc *formula Green-Riemann*:

$$\int_{\partial K} P dx + Q dy = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy.$$

Această formulă ne permite să calculăm integrale curbilinii cu ajutorul integralelor duble, însă doar în cazul în care forma diferențială are proprietățile din ipoteză.

O consecință imediată este o formulă de calcul pentru arie:

$$\mathcal{A}(K) = \frac{1}{2} \int_{\partial K} x dy - y dx.$$

2 Exerciții

1. Calculați integralele duble:

(a) $\iint_D y dx dy$, unde D este mărginit de parabola $y^2 = x$, cercul $x^2 + y^2 - 2x = 0$ și dreapta $x = 2$;

(b) $\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy$, unde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$;

(c) $\iint_D y dx dy$, unde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

2. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^2$ și $f : D \to [0, \infty)$ o funcție continuă. Definim mulțimea:

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D, 0 \leqslant z \leqslant f(x, y)\}.$$

Să se calculeze volumul mulțimii Ω, folosind formula:

$$\mathcal{V}(\Omega) = \iint_D f(x, y) dx dy,$$

în cazurile:

(a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 2y\}, f(x, y) = x^2 + y^2$;

(b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant x, y > 0\}, f(x, y) = xy$;

(c) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 2x + 2y - 1\}, f(x, y) = y$.

3. Calculați direct și aplicînd formula Green-Riemann integrala curbilinie $\int_\Gamma \alpha$ în următoarele cazuri:

(a) $\alpha = y^2 dx + x dy$, unde Γ este pătratul cu vîrfurile $A(0,0), B(2,0), C(2,2), D(0,2)$;

(b) $\alpha = y dx + x^2 dy$, unde Γ este cercul cu centrul în origine și rază 2;

(c) $\alpha = y dx - x dy$, unde Γ este elipsa de semiaxe a și b și de centru O.

4. Fie forma diferențială:

$$\alpha = \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy.$$

Să se calculeze $\int_\Gamma \alpha$, unde Γ este cercul cu centrul în origine și rază 2.

5. Să se calculeze integrala curbilinie $\displaystyle\int_\Gamma xy dx + \frac{x^2}{2} dy$, pe conturul:

$$\Gamma = \{(x,y) \mid x^2+y^2 = 1, x \leqslant 0 \leqslant y\} \cup \{(x,y) \mid x+y=-1, x, y \leqslant 0\}.$$

Indicație: curba Γ nu este închisă, deci nu putem aplica formula Green-Riemann. Considerăm segmentul orientat $[AB]$, cu $A(0,-1)$ și $B(0,1)$, cu care închidem curba, definind $\Lambda = \Gamma \cup [AB]$.

Acum putem aplica formula Green-Riemann pe Λ și găsim:

$$\int_\Lambda xy dx + \frac{x^2}{2} dy = \iint_K 0 dx dy = 0,$$

unde K este compactul mărginit de Λ.

Atunci:

$$\int_\Gamma xy dx + \frac{x^2}{2} dy = -\int_{[AB]} xy dx + \frac{x^2}{2} dy = 0.$$