Seminar 7
Integrale duble și triple

1. Calculați integralele duble:

(a) $\iint_D y\,dx\,dy$, unde D este mărginit de parabola $y^2 = 2x$, cercul $x^2 + y^2 - 2x = 0$ și dreapta $x = 2$;

(b) $\iint_D e^{x^2+y^2} dx\,dy$, unde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$;

(c) $\iint_D y\,dx\,dy$, unde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

2. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^2$ și $f : D \to [0, \infty)$ o funcție continuă. Definim mulțimea:

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D, 0 \leqslant z \leqslant f(x, y)\}.$$

Să se calculeze volumul mulțimii Ω, folosind formula:

$$\mathcal{V}(\Omega) = \iint_D f(x, y)\,dx\,dy,$$

în cazurile:

(a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 2y\}, f(x, y) = x^2 + y^2$;

(b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant x, y > 0\}, f(x, y) = xy$;

(c) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 2x + 2y - 1\}, f(x, y) = y$.

Indicații: (a) Mulțimea este $x^2 + (y-1)^2 \leqslant 1$, care este discul centrat în $(0, 1)$ și de rază 1. Putem folosi coordonate polare pentru a face calculul, remarcînd că, deoarece discul se află deasupra axei OX, avem $\theta \in [0, \pi]$.

În plus, din inegalitatea $x^2 + y^2 \leqslant 2y$, obținem $\rho \leqslant 2\sin\theta$.

Atunci integrala este:

$$\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\sin\theta} \rho^3 d\rho = \frac{3}{2}\pi.$$

3. Să se calculeze integrala triplă:

$$I = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy\,dz,$$

unde V este delimitat de suprafața conică $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ și planul $z = a > 0$.

4. Să se calculeze integrala triplă:

$$I = \iiint_V xy\,dx\,dy\,dz,$$

unde V este mărginit de cilindrul $x^2 + y^2 = R^2$ și planele $z = 0, z = 1, y = x, y = x\sqrt{3}$.

5. Să se calculeze volumul corpului delimitat de suprafețele:

$$\begin{cases} z &= x^2 + y^2 \\ z &= 2x^2 + 2y^2 \\ y &= x \\ y &= x^2 \end{cases}.$$

6. Să se calculeze volumul cuprins între paraboloizii:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 &= 2 + z \\ x^2 + y^2 &= 10 - z \end{cases}.$$

7. Calculați volumele mulțimilor Ω, mărginite de suprafețele de ecuații:

(a) $2x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad 2x^2 + y^2 - z^2 = 0, z \geqslant 0$;

(b) $z = x^2 + y^2 - 1, \quad z = 2 - x^2 - y^2$;

(c) $z = 4 - x^2 - y^2, \quad 2z = 5 + x^2 + y^2$;

(d) $x^2 + y^2 = 1, \quad z^2 = x^2 + y^2, \quad z \geqslant 0$.

Indicații: (a) Intersectăm cele două suprafețe, egalînd primele două ecuații și obținem:

$$4x^2 + 2y^2 = 1, \quad z = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Atunci, proiecția acestui domeniu pe planul XOY este:

$$D = \{(x, y) \mid 4x^2 + 2y^2 \leqslant 1\}.$$

Iar coordonata z o putem lua între cele două suprafețe, adică:

$$\sqrt{2x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{1 - 2x^2 - y^2}.$$

Rezultă că putem calcula volumul mulțimii astfel:

$$V(\Omega) = \iiint_\Omega dxdydz = \iint_D dxdy \int_{\sqrt{2x^2+y^2}}^{\sqrt{1-2x^2-y^2}} dz,$$

iar apoi pe domeniul D putem folosi coordonate polare generalizate (pentru parametrizarea elipsei).

(b) Similar, intersectăm cele două suprafețe rezolvînd sistemul de ecuații și găsim:

$$x^2 + y^2 = \frac{3}{2}, \quad z = \frac{1}{2}.$$

Proiecția pe planul XOY este:

$$D = \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant \frac{3}{2}\right\}.$$

Atunci:

$$V(\Omega) = \iiint_\Omega dxdydz = \iint_D dxdy \int_{x^2+y^2-1}^{2-x^2-y^2} dz.$$