# Seminar 6
# Integrale triple

1. Considerăm mulțimea:

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \leqslant 1, x^2 + y^2 \geqslant 1, x, y \geqslant 0, 0 \leqslant z \leqslant 5\}.$$

Calculați integrala $\iiint_\Omega \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy dz$ prin două metode:

(a) proiectînd mulțimea $\Omega$ pe planul XOY;

(b) folosind coordonate cilindrice.

*Soluție:* (a) Pentru a proiecta mulțimea $\Omega$ pe planul XOY, studiem doar ecuațiile corespunzătoare acestui plan. Astfel, avem intervalul $z \in [0, 5]$, iar pentru $x$ și $y$, obținem:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 1], \sqrt{1 - x^2} \leqslant y \leqslant 2\sqrt{1 - x^2}\}.$$

Atunci integrala se obține:

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy dz &= \iint_D dx dy \int_0^5 \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}} dz \\ &= \frac{25}{2} \iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy,\end{aligned}$$

integrală pe care o calculăm folosind coordonate polare.

(b) Coordonatele cilindrice sînt:

$$\begin{cases} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi \\ z &= z \end{cases}, \quad (\rho, \varphi, z) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R},$$

iar jacobianul transformării este $J = \rho$.

Pentru $\Omega$, avem:

$$z \in [0, 5], \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \rho \in \left[1, \frac{2}{\sqrt{3\cos^2 \varphi + 1}}\right].$$

Obținem, atunci:

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy dz &= \int_0^5 dz \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^{\frac{2}{\sqrt{3\cos^2 \varphi + 1}}} \frac{z\rho \sin \varphi}{\rho} \rho d\rho \\ &= \frac{25}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3(1 - \cos^2 \varphi)}{3\cos^2 \varphi + 1} \sin \varphi d\varphi \\ &= \frac{25}{18}(4\pi\sqrt{3} - 9).\end{aligned}$$

2. Folosind coordonatele sferice (generalizate) să se calculeze integralele:

(a) $\iiint_\Delta (y - x) dx dy dz$, unde domeniul este:

$$\Delta = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1, y > 0\};$$

(b) $\iiint_\Omega \left(1 - x^2 - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}} dxdydz$, domeniul fiind:

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \geqslant 0, z \geqslant 0, x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} \leqslant 1\};$$

(c) $\iiint_\Pi z dxdydz$, unde domeniul este:

$$\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leqslant 1\}.$$

*Indicații:* Coordonatele sferice sînt:

$$\begin{cases} x &= \rho \sin\theta \cos\varphi \\ y &= \rho \sin\theta \sin\varphi \\ z &= \rho \cos\theta \end{cases}, \quad (\rho, \theta, \varphi) \in [0, \infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi).$$

Jacobianul transformării este $J = \rho^2 \sin\theta$.
Pentru coordonatele sferice generalizate (utile pentru elipsoizi) sînt:

$$\begin{cases} x &= a\rho \sin\theta \cos\varphi \\ y &= b\rho \sin\theta \sin\varphi \\ z &= c\rho \cos\theta \end{cases},$$

definite pe același domeniu de mai sus, iar jacobianul este $J = abc\rho^2 \sin\theta$.

3. Calculați volumele mulțimilor $\Omega$, mărginite de suprafețele de ecuații:

(a) $2x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad 2x^2 + y^2 - z^2 = 0, z \geqslant 0$;

(b) $z = x^2 + y^2 - 1, \quad z = 2 - x^2 - y^2$;

(c) $z = 4 - x^2 - y^2, \quad 2z = 5 + x^2 + y^2$;

(d) $x^2 + y^2 = 1, \quad z^2 = x^2 + y^2, \quad z \geqslant 0$.

*Indicații:* (a) Intersectăm cele două suprafețe, egalînd primele două ecuații și obținem:

$$4x^2 + 2y^2 = 1, \quad z = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Atunci, proiecția acestui domeniu pe planul XOY este:

$$D = \{(x, y) \mid 4x^2 + 2y^2 \leqslant 1\}.$$

Iar coordonata $z$ o putem lua între cele două suprafețe, adică:

$$\sqrt{2x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{1 - 2x^2 - y^2}.$$

Rezultă că putem calcula volumul mulțimii astfel:

$$V(\Omega) = \iiint_\Omega dxdydz = \iint_D dxdy \int_{\sqrt{2x^2+y^2}}^{\sqrt{1-2x^2-y^2}} dz,$$

iar apoi pe domeniul D putem folosi coordonate polare generalizate (pentru parametrizarea elipsei).

(b) Similar, intersectăm cele două suprafețe rezolvînd sistemul de ecuații și găsim:

$$x^2 + y^2 = \frac{3}{2}, \quad z = \frac{1}{2}.$$

Proiecția pe planul XOY este:

$$D = \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant \frac{3}{2}\right\}.$$

Atunci:

$$V(\Omega) = \iiint_\Omega dxdydz = \iint_D dxdy \int_{x^2+y^2-1}^{2-x^2-y^2} dz.$$