Seminar 5
Integrale curbilinii

1 Drumuri parametrizate

Definiţie 1.1: Fie $J \subseteq \mathbb{R}$. Se numește *drum parametrizat* pe J cu valori în $\mathbb{R}^n$ orice aplicație continuă $\gamma : J \to \mathbb{R}^n$.

Pe componente, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_n(t))$, relațiile $x_i = \gamma_i(t)$ se numesc *ecuațiile parametrice* ale drumului.

Dacă J este un interval $[a, b]$, atunci $\gamma(a)$ și $\gamma(b)$ se numesc *capetele* drumului, iar drumul se numește *închis* dacă $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Dacă $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ este un drum, *opusul său* se definește prin:

$$\gamma^- : [a, b] \to \mathbb{R}^n, \quad \gamma^-(t) = \gamma(a + b - t).$$

Date două drumuri parametrizate, ele se pot *concatena*, rezultatul fiind un drum care parcurge, pe rînd, intervalele de definiție ale celor două componente.

Observaţie 1.1: Concatenarea a două drumuri parametrizate are sens numai atunci cînd capătul de final al unui drum coincide cu capătul de început al celuilalt. Mai precis, dacă avem: $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ și $\gamma_2 : [b, c] \to \mathbb{R}^n$, atunci

$$\gamma_1 \cup \gamma_2 = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a, b] \\ \gamma_2(t), & t \in [b, c]. \end{cases}$$

Aspectele analitice de interes sînt:

Definiţie 1.2: Un drum $\gamma : J \to \mathbb{R}^n$ se numește *neted* dacă aplicația γ este de clasă $\mathcal{C}^1(J)$, iar $\gamma'(t) \neq 0, \forall t \in J$.

Un drum se numește *neted pe porțiuni* dacă se obține prin concatenarea unui număr finit de drumuri netede.

În cazurile particulare de interes, adică în $\mathbb{R}^2$ și $\mathbb{R}^3$, vom nota drumurile parametrizate prin $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, respectiv $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

2 Integrala curbilinie

Integrala curbilinie de prima speță

Dat un drum neted $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, iar $f : D \to \mathbb{R}$, o funcție continuă cu $D \supseteq \gamma([a, b])$, se definește integrala curbilinie de prima speță a funcției f pe drumul γ prin:

$$\int_\gamma f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

În particular, pentru $f = 1$, obținem $L(\gamma)$, care este *lungimea drumului* γ, definit prin:

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

Un alt caz particular este dat de o interpretare fizică. Presupunem că imaginea lui γ reprezintă un fir material, iar f este funcția de densitate a firului. Atunci putem calcula masa M și coordonatele centrului de greutate (x_i^G) ale firului prin:

$$M = \int_\gamma f ds$$
$$x_i^G = \frac{1}{M} \int_\gamma x_i f ds.$$

Integrala curbilinie de speța a doua

Fie $\alpha = Pdx + Qdy + Rdz$ o 1-formă diferențială, unde P, Q, R sînt funcții continue definite pe $D \subseteq \mathbb{R}^3$, mulțime deschisă.

Fie $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3, \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ un drum parametrizat neted, cu $\gamma([a, b]) \subseteq D$.

Integrala curbilinie a formei diferențiale α de-a lungul drumului γ se definește prin:

$$\int_\gamma \alpha = \int_a^b (P(\gamma(t))x'(t) + Q(\gamma(t))y'(t) + R(\gamma(t))z'(t)dt.$$

Putem da și în acest caz o interpretare fizică, folosind *notații vectoriale*. Asociem 1-formei diferențiale $\alpha = Pdx + Qdy + Rdz$ un cîmp de vectori $\vec{V} : D \to \mathbb{R}^3$, de componente $\vec{V} = (P, Q, R)$. Integrala 1-formei α pe drumul γ devine, în acest caz, *circulația cîmpului* $\vec{V}$ de-a lungul drumului γ, notată $\int_\gamma \vec{V} \cdot d\vec{r}$.

În particular, dacă interpretăm $\vec{V} = \vec{F}$ ca un cîmp de forțe, atunci circulația $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ este *lucrul mecanic* efectuat de forța $\vec{F}$, acționînd pe drumul γ.

3 Forme diferențiale exacte

Definiţie 3.1: O 1-formă diferențială $\alpha = Pdx + Qdy + Rdz$ se numește *exactă* pe o mulțime D dacă există o funcție f, numită *potențial scalar* sau *primitivă*, de clasă $\mathcal{C}^1(D)$, astfel încît $Df = \alpha$ sau, pe componente:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P, \frac{\partial f}{\partial y} = Q, \frac{\partial f}{\partial z} = R.$$

În interpretarea vectorială, cîmpul de vectori $\vec{V} = (P, Q, R)$ asociat formei diferențiale α se numește *cîmp de gradienți*, deoarece $V = \nabla f$.

Definiţie 3.2: O 1-formă diferențială $\alpha = Pdx + Qdy + Rdz$ se numește *închisă* pe D dacă sînt verificate, în orice punct din D, egalitățile:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Exactitatea formelor diferențiale ne permite să calculăm mai simplu unele integrale curbilinii, după cum arată următoarea teoremă:

Teoremă 3.1: *Fie* $\alpha = Df$ *o 1-formă diferențială exactă pe* D *și fie* γ *un drum parametrizat neted, cu imaginea inclusă în* D*, de capete* $p, q \in D$*. Atunci:*

(a) $\int_\gamma Df = f(q) - f(p)$;

(b) Dacă γ *este închis, atunci* $\int_\gamma Df = 0$.

Să remarcăm faptul că, folosind teorema de simetrie a lui Schwartz, rezultă că *orice formă diferențială exactă este și închisă*. Reciproca este, în general falsă. De exemplu, forma diferențială:

$$\alpha = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

este închisă pe $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, dar nu este exactă.

Un rezultat fundamental este următorul:

Teoremă 3.2 (Poincaré)**:** *Fie* α *o 1-formă diferențială de clasă* $\mathcal{C}^1$, *închisă pe domeniul* $D \subseteq \mathbb{R}^n$. *Atunci, pentru orice* $x \in D$, *există o vecinătate deschisă a sa* $U \subseteq D$ *și o funcție* f *de clasă* $\mathcal{C}^1$, *astfel încît* $Df = \alpha$, pe U.

Cu alte cuvinte, orice 1-formă diferențială închisă este *local exactă*.

Mai avem nevoie și de următoarea:

Definiţie 3.3: O mulțime $D \subseteq \mathbb{R}^n$ se numește *stelată* (*domeniu stelat*) dacă există un punct $x_0 \in D$, astfel încît segmentul $[x_0, x] \subseteq D$, pentru orice $x \in D$.

4 Exerciții

1. Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de speța întîi:

(a) $\int_C x ds$, unde $C : y = x^2, x \in [0,2]$;

(b) $\int_C y^5 ds$, unde $C : x = \frac{y^4}{4}, y \in [0,2]$;

(c) $\int_C x^2 ds$, unde $C : x^2 + y^2 = 2, x, y \geqslant 0$;

(d) $\int_C y ds$, unde $C : x(t) = \ln(\sin t) - \sin^2 t, y(t) = \frac{1}{2} \sin 2t, t \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$;

(e) $\int_C xy ds$, unde $C : x(t) = |t|, y(t) = \sqrt{1-t^2}, t \in [-1,1]$;

(f) $\int_C |x-y| ds$, unde $C : x(t) = |\cos t|, y(t) = \sin t, t \in [0,\pi]$.

2. Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de speța a doua:

(a) $\int_C \frac{dx}{2a+y} - \frac{dy}{a+x}$, unde C este o curbă simplă formată din porțiunea din cercul $x^2 + y^2 + 2ay = 0$ ($a > 0$), pentru care $x + y \geqslant 0$, iar capătul de pornire este $A(a, -a)$;

(b) $\int_C x dy - y dx$, unde $C : x^2 + y^2 = 4, y = x\sqrt{3}, x \geqslant 0, y = \frac{x}{\sqrt{3}}$;

(c) $\int_\gamma (x+y) dx + (x-y) dy$, unde domeniul este:

$$\gamma = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 4, y \geqslant 0\}.$$

(d) $\int_\gamma \frac{y}{x+1} dx + dy$, unde γ este triunghiul cu vîrfurile $A(2,0), B(0,0), C(0,2)$;

(e) $\int_\gamma x dy - y dx$, unde:

$$\gamma = \{(x,y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}.$$

3. Să se calculeze $\int_\gamma y dx + x dy$, pe un drum de la $A(2,1)$ la $B(1,3)$.

4. Fie $a \in \mathbb{R}$ și $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definite prin:

$$P(x,y) = x^2 + 6y, \quad Q(x,y) = 3ax - 4y.$$

Să se afle a astfel încît $\omega = P dx + Q dy$ să fie o 1-formă diferențială exactă pe $\mathbb{R}^2$ și să se determine primitiva sa ($f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, cu $Df = \omega$).

5. Să se calculeze circulația cîmpului de vectori $\vec{V}$ de-a lungul curbei γ, pentru:

(a) $\vec{V} = -(x^2+y^2)\vec{i} - (x^2-y^2)\vec{j}$, cu

$$\gamma = \{(x,y) \mid x^2+y^2 = 4, y < 0\} \cup \{(x,y) \mid x^2+y^2-2x = 0, y \geqslant 0\}.$$

(b) $\vec{V} = x\vec{i} + xy\vec{j} + xyz\vec{k}$, unde:

$$\gamma = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 = 1\} \cap \{(x,y,z) \mid x+z = 3\}.$$

6. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al unui fir cu forma unui arc de cerc, de rază R și de măsură $\alpha \in (0,\pi)$, presupus omogen.

7. Să se calculeze masa firului material γ, cu ecuațiile parametrice:

$$\begin{cases} x(t) &= t \\ y(t) &= \frac{1}{2}t^2 \text{ , } t \in [0,1] \\ z(t) &= \frac{1}{3}t^3 \end{cases}$$

și cu densitatea $F(x,y,z) = \sqrt{2y}$.