Seminar 4
Integrale multiple

1 Măsură și integrală Lebesgue

Pentru integrarea în mai multe dimensiuni, trebuie să avem un concept de *măsură*. Dacă integrala Riemann permite calculul de lungimi, arii și volume pentru o funcție de o variabilă reală, într-un spațiu multidimensional, este necesar să adaptăm noțiunile respective, pentru a putea vorbi în continuare de „cantități măsurabile". Acestea vor fi generalizări ale conceptelor de tip *lungime, arie, volum*, în sensul că, în cazul particular al două sau trei dimensiuni, vor coincide cu intuiția geometrică.

Fără a intra în detalii suplimentare, menționăm că măsura care se utilizează în acest caz al problemelor din $\mathbb{R}^n$ se numește *măsura Lebesgue*. În particular, *elementul de lungime* față de măsura Lebesgue va fi notat cu dl sau dx, *elementul de arie*, cu $dA = dxdy$, iar *elementul de volum*, cu $dV = dxdydz$ sau corespunzător unor eventuale schimbări de coordonate (e.g. în coordonate polare, $dA = drd\theta$, în coordonate sferice, $dV = drd\theta d\varphi$ etc.).

Față de această măsură Lebesgue, putem defini *integrala Lebesgue* din $\mathbb{R}^k$, a unei funcții reale $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, notată, în general, prin:

$$\int_A f(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k.$$

În cazurile particulare $k = 1, 2, 3$, vom folosi notațiile uzuale:

$$\int_A f(x)dx, \quad \iint_A f(x,y)dxdy, \quad \iiint_A f(x,y,z)dxdydz.$$

Următorul rezultat ne arată că putem inversa ordinea de integrare:

Teoremă 1.1 (Fubini)**:** *Fie* $(x, y) \in \mathbb{R}^{k+p}$ *un punct oarecare, notăm măsura Lebesgue din* $\mathbb{R}^k$ *cu* dx, *unde* $x \in \mathbb{R}^k$, *măsura Lebesgue din* $\mathbb{R}^p$ *cu* $dy, y \in \mathbb{R}^p$, *iar măsura Lebesgue din* $\mathbb{R}^{k+p}$ *cu* $dxdy$.

Fie $f : \mathbb{R}^{k+p} \to \mathbb{R}$ *o funcție integrabilă Lebesgue. Atunci are loc:*

$$\int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)dy \right) dx = \iint_{\mathbb{R}^{k+p}} f(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^k} f(x,y)dx \right) dy.$$

Cazurile particulare pe care le vom folosi în exerciții sînt:

(a) *Aria* unei mulțimi compacte $D \subseteq \mathbb{R}^2$ se calculează prin:

$$\mathcal{A}(D) = \iint_D dxdy;$$

(b) *Volumul* unei mulțimi compacte $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ se calculează prin:

$$\mathcal{V}(\Omega) = \iiint_\Omega dxdydz.$$

De asemenea, pentru calculul integralelor multiple, putem adapta formula de schimbare de variabile:

Teoremă 1.2 (Schimbare de variabile)**:** *Fie* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *o mulțime deschisă și* φ *un difeomorfism*[1] *al lui* A.

Pentru orice funcție continuă $f : \varphi(A) \to \mathbb{R}$ *are loc:*

$$\int_{\varphi(A)} f(x)dx = \int_A (f \circ \varphi)(y) \cdot |J_\varphi(y)| dy,$$

unde J_φ *este jacobianul difeomorfismului (schimbării de variabile)* φ.

[1] aplicație continuă și bijectivă, cu inversa continuă

2 Exerciții

1. Să se calculeze următoarele integrale duble:

(a) $\iint_D xy^2 dxdy$, unde $D = [0,1] \times [2,3]$;

(b) $\iint_D xy dxdy$, unde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [0,1], y^2 \leqslant x \leqslant y\}$;

(c) $\iint_D y dxdy$, unde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

Indicație: Integralele pot fi gîndite ca integrale iterate. În particular, pentru domeniul de la punctul (c), avem $-\sqrt{(x-2)^2-1} \leqslant y \leqslant \sqrt{(x-2)^2-1}$, iar $x \in [1,3]$ (altfel, inegalitatea nu are soluții).

2. Să se calculeze integralele duble:

(a) $\iint_D (x+3y) dxdy$, unde D este mulțimea plană mărginită de curbele de ecuații:

$$y = x^2+1, \quad y = -x^2, \quad x = -1, \quad x = 3;$$

(b) $\iint_D e^{|x+y|} dxdy$, unde D este mulțimea plană mărginită de curbele de ecuații:

$$x+y = 3, \quad x+y = -3, \quad y = 0, \quad y = 3;$$

(c) $\iint_D x dxdy$, unde D este mulțimea plană mărginită de $x^2+y^2 = 9, x \geqslant 0$.

Indicație: În toate cazurile, este util să schițăm grafic mulțimea, pentru a vedea care sînt capetele domeniilor pentru x, respectiv y. În plus, în cazul (b), avem de explicitat modulul, deci studiem cazurile cînd $x+y \geqslant 0$ și $x+y < 0$ pe domeniile de definiție.

3. Folosind trecerea la coordonate polare, să se calculeze integralele:

(a) $\iint_D e^{x^2+y^2} dxdy$, unde $D : x^2+y^2 \leqslant 1$;

(b) $\iint_D (1+\sqrt{x^2+y^2}) dxdy$, unde $D : x^2+y^2-y \leqslant 0, x \geqslant 0$;

(c) $\iint_D \ln(1+x^2+y^2) dxdy$, unde D este mărginit de curbele de ecuații:

$$x^2+y^2 = e^2, \quad y = x\sqrt{3}, \quad x = y\sqrt{3}, \quad x \geqslant 0.$$

4. Calculați integralele duble, găsind explicit domeniul de definiție (prin intersecția curbelor care îl definesc):

(a) $\iint_D xy dxdy$, cu $D : xy = 1, \quad x+y = \frac{5}{2}$;

(b) $\iint_D \frac{1}{\sqrt{x}} dxdy$, cu $D : y^2 \leqslant 8x, y \leqslant 2x, y+4x \leqslant 24$;

(c) $\iint_D (1-y) dxdy$, cu $D : x^2+(y-1)^2 \leqslant 1, y \leqslant x^2, x \geqslant 0$.