Seminar 2
Integrale improprii cu parametri

1. Să se calculeze integralele, folosind derivarea sub integrală:

(a) $I(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2 x + m^2 \sin^2 x) dx, m > 0;$

(b) $I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 - \sin^2 \theta) d\theta, a > 1;$

(c) $I(a) = \int_0^1 \frac{\arctan ax}{x\sqrt{1-x^2}} dx, a > 0.$

Soluții:

(a) Dacă considerăm funcția:

$$f(x, m) = \ln(\cos^2 x + m^2 \sin^2 x),$$

observăm că este continuă și admite o derivată parțială continuă în raport cu m.

Atunci obținem:

$$\frac{\partial f}{\partial m} = I'(m) = 2m \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x + m^2 \sin^2 x} dx$$

Pentru a calcula integrala, facem schimbarea de variabilă $\tan x = t$ și atunci:

$$dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx.$$

Integrala inițială se poate prelucra:

$$I'(m) = 2m \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x(1 + m^2 \tan^2 x)} dx.$$

Așadar, pentru a obține $\sin^2 x$ în funcție de t calculăm:

$$\frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x} = t^2 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{t^2}{1 + t^2}.$$

În fine, integrala devine:

$$I'(m) = 2m \int_0^\infty \frac{t^2}{(1 + m^2 t^2)(1 + t^2)} dt.$$

Făcînd descompunerea în fracții simple, obținem:

$$\frac{t^2}{(1 + m^2 t^2)(1 + t^2)} = \frac{1}{m^2 - 1} \Big(\frac{1}{t^2 + 1} - \frac{1}{m^2 t^2 + 1} \Big).$$

și calculăm în fine integrala $I'(m) = \frac{\pi}{m+1}$. Integrăm și găsim $I(m) = \pi \ln(m + 1) + c$. Deoarece $I(1) = 0$, rezultă $c = -\pi \ln 2$ și, în fine:

$$I(m) = \pi \ln \frac{m + 1}{2}.$$

(b) Dacă considerăm funcția:

$$f(\theta, a) = \ln(a^2 - \sin^2 \theta),$$

observăm că este continuă și admite o derivată parțială continuă în raport cu a.

Atunci avem:

$$I'(a) = \frac{\partial f}{\partial a} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a}{a^2 - \sin^2\theta} d\theta.$$

Cu schimbarea de variabilă $t = \tan\theta$, avem succesiv:

$$\begin{aligned}
I'(a) &= \int_0^\infty \frac{2a}{a^2 - \frac{t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt \\
&= \int_0^\infty \frac{2a}{t^2(a^2-1)+a^2} dt \\
&= \frac{2a}{a^2-1} \int_0^\infty \frac{1}{t^2 + \frac{a^2}{a^2-1}} dt \\
&= \frac{2a}{a^2-1} \cdot \frac{\sqrt{a^2-1}}{a} \cdot \arctan t \frac{\sqrt{a^2-1}}{a} \Big|_0^\infty \\
&= \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} \cdot \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.
\end{aligned}$$

Integrăm pentru a obține $I(a)$ și găsim:

$$I(a) = \int \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}} da = \pi \ln(a + \sqrt{a^2-1}) + c.$$

Pentru a calcula constanta c, putem rescrie integrala din forma inițială:

$$\begin{aligned}
I(a) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\Big(a^2\Big(1 - \frac{\sin^2\theta}{a^2}\Big)\Big) d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln a^2 d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\Big(1 - \frac{\sin^2\theta}{a^2}\Big) d\theta.
\end{aligned}$$

Putem considera limita $a \to \infty$ și atunci integrala de calculat tinde la 0, deci $c = -\pi \ln 2$.

Concluzie: $I(a) = \pi \ln \frac{a+\sqrt{a^2-1}}{2}$.

(c) Dacă considerăm funcția $f(x, a) = \frac{\arctan ax}{x\sqrt{1-x^2}}$, observăm că este continuă și admite o derivată parțială continuă în raport cu a. Atunci:

$$I'(a) = \frac{\partial f}{\partial a} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+a^2x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Pentru a calcula integrala, facem schimbarea de variabilă $x = \sin t$ și obținem:

$$I'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + a^2 \sin^2 t}.$$

Mai departe, aplicăm schimbarea de variabilă $\tan t = u$ și obținem succesiv:

$$\begin{aligned}
I'(a) &= \int_0^\infty \frac{du}{(1+a^2)u^2+1} \\
&= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}.
\end{aligned}$$

Așadar, printr-o integrare în funcție de a, găsim:

$$I(a) = \frac{\pi}{2} \ln(a + \sqrt{1+a^2}) + c.$$

Cum $I(0) = 0$, găsim $c = 0$.

2. Să se calculeze, folosind funcțiile B și Γ:

(a) $\int_1^e \frac{1}{x} \ln^3 x \cdot (1 - \ln x)^4 dx$;

(b) $\int_0^1 \sqrt{\ln \frac{1}{x}} dx$;

(c) $\int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^4)^2} dx$;

(d) $\int_{-1}^\infty e^{-x^2-2x+3} dx$;

Indicație (d):

$$\int_{-1}^\infty e^{-(x+1)^2+4} dx = e^4 \int_{-1}^\infty e^{-(x+1)^2} dx.$$

Notînd acum $x + 1 = y$, integrala se rezolvă cu formula pentru Γ.