Seminar 2
Integrale improprii

1 Recapitulare — Integrale Riemann

Calculați:

(a) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-16}} dx, x > 4;$

(b) $\displaystyle\int \frac{2x-5}{x^2-5x+7} dx;$

(c) $\displaystyle\int \frac{x-1}{3x^2-6x+11} dx;$

(d) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^4-1} dx, x \in (-1,1);$

(e) $\displaystyle\int \arcsin x dx;$

(f) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} x \log_3 x dx;$

(g) $\displaystyle\int_1^e \sin(\ln x) dx;$

(h) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{3-2x}{2x^2+1} dx;$

(i) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x(2+\ln x)} dx;$

Indicații:

- $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c;$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c;$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + c;$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + c;$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c;$
- $\displaystyle\int \frac{-dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arccos \frac{x}{a} + c;$

2 Integrale improprii. Criterii de convergență

Integralele improprii reprezintă cazul în care funcția care se integrează nu este mărginită la cel puțin unul dintre capetele domeniului de integrare.

Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ o funcție *local integrabilă* (i.e. integrabilă pe orice interval compact $[u, v] \subseteq [a, b)$).

Integrala improprie (în b) $\displaystyle\int_a^b f(x) dx$ se numește *convergentă* dacă limita:

$$\lim_{t \to b} \int_a^t f(x) dx$$

există și este finită. Valoarea limitei este valoarea integralei. În caz contrar, integrala se numește *divergentă*.

Dacă $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ este local integrabilă, atunci integrala improprie (la ∞) $\int_a^\infty f(x)dx$ se numește *convergentă* dacă limita:

$$\lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx$$

există și este finită. Valoarea limitei este egală cu valoarea integralei.

Integrala improprie $\int_a^b f(x)dx$ se numește *absolut convergentă* dacă integrala $\int_a^b |f(x)|dx$ este convergentă.

Criteriile de convergență pentru integralele improprii sînt foarte asemănătoare cu cele pentru serii (amintiți-vă, că, de fapt, integralele definite se construiesc cu ajutorul sumelor infinite, adică serii, v. *sumele Riemann*).

Așadar, avem:

Criteriul lui Cauchy (general): Fie $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ local integrabilă. Atunci integrala $\int_a^b f(t)dt$ este convergentă dacă și numai dacă:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists b_\varepsilon \in [a, b) \text{ a.î. } \forall x, y \in (b_\varepsilon, b), \Big| \int_x^y f(t)dt \Big| < \varepsilon.$$

Criteriul de comparație („termen cu termen"): Fie $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ astfel încît $0 \leqslant f \leqslant g$.

- Dacă $\int_a^b g(x)dx$ este convergentă, atunci și integrala $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă;
- Dacă integrala $\int_a^b f(x)dx$ este divergentă, atunci și integrala $\int_a^b g(x)dx$ este divergentă.

Criteriul de comparație la limită: Fie $f, g : [a, b) \to [0, \infty)$, astfel încît să existe limita:

$$\ell = \lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

- Dacă $\ell \in [0, \infty)$, iar $\int_a^b g(x)dx$ este convergentă, atunci $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă;
- Dacă $\ell \in (0, \infty)$ sau $\ell = \infty$, iar $\int_a^b g(x)dx$ este divergentă, atunci și $\int_a^b f(x)dx$ este divergentă.

Criteriul de comparație cu $\frac{1}{x^\alpha}$: Fie $a \in \mathbb{R}$ și $f : [a, \infty) \to [0, \infty)$ local integrabilă, astfel încît să existe:

$$\ell = \lim_{x\to\infty} x^\alpha f(x).$$

- Dacă $\alpha > 1$ și $0 \leqslant \ell < \infty$, atunci $\int_a^\infty f(x)dx$ este convergentă;
- Dacă $\alpha \leqslant 1$, iar $0 < \ell \leqslant \infty$, atunci $\int_a^\infty f(x)dx$ este divergentă.

Criteriul de comparație cu $\frac{1}{(b-x)^\alpha}$: Fie $a < b$ și $f : [a, b) \to [0, \infty)$, local integrabilă, astfel încît să existe:

$$\ell = \lim_{x \to b} (b-x)^\alpha f(x).$$

- Dacă $\alpha < 1$ și $0 \leqslant \ell < \infty$, atunci $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă;
- Dacă $\alpha \geqslant 1$ și $0 < \ell \leqslant \infty$, atunci $\int_a^b f(x)dx$ este divergentă.

Criteriul lui Abel: Fie $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, cu proprietățile:

- f este de clasă $\mathcal{C}^1$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$, iar $\int_a^\infty f'(x)dx$ este absolut convergentă;
- g este continuă, iar $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ este mărginită pe $[a, \infty)$.

Atunci integrala $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$ este convergentă.

3 Pe scurt — Convergența integralelor improprii

Fie $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$, cu $b \in \overline{\mathbb{R}}$, funcții local integrabile, pozitive, cu $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x), \forall x$.

Criteriul de comparație cu inegalități:

(a) Dacă $\int_a^b g(x)dx$ este convergentă $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ este convergentă;

(b) Dacă $\int_a^b g(x)dx$ este divergentă $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ este divergentă.

Criteriul de comparație la limită: Dacă există limita:

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = L,$$

atunci:

(a) Dacă $L \in [0, \infty)$ și $\int_a^b g(x)dx$ este convergentă, atunci $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă;

(b) Dacă $L \in (0, \infty]$ și $\int_a^b g(x)dx$ este divergentă, atunci $\int_a^b f(x)dx$ este divergentă.

Cum alegem funcția g ?

- Pentru $[a, \infty)$, luăm $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$;
- Pentru $(-\infty, a]$, luăm $g(x) = \frac{1}{(-x)^\alpha}$

$$\int_a^b g(x)dx \text{ convergentă pentru } \alpha > 1 \text{ și divergentă pentru } \alpha \leqslant 1;$$

- Pentru $[a, b)$, luăm $g(x) = \frac{1}{(b-x)^\alpha}$;
- Pentru $(a, b]$, luăm $g(x) = \frac{1}{(x-a)^\alpha}$;

$$\int_a^b g(x)dx \text{ convergentă pentru } \alpha < 1 \text{ și divergentă pentru } \alpha \geqslant 1;$$

- Pentru $(-\infty, \infty)$, descompunem integrala după $a \in \mathbb{R}$ fixat și lucrăm pe $(-\infty, a]$, apoi pe $[a, \infty)$.

4 Integrale cu parametri

Fie $A \neq \emptyset$ și $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un interval compact. Considerăm funcția $f : [a, b] \times A \to \mathbb{R}$, astfel încît, pentru orice $y \in A$, funcția $[a, b] \ni x \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ să fie integrabilă Riemann.

Funcția definită prin:

$$F : A \to \mathbb{R}, \quad F(y) = \int_a^b f(x, y)dx$$

se numește *integrală cu parametru*.

Proprietățile pe care le vom utiliza sînt cele de mai jos.

Continuitate: Dacă $f : [a, b] \times A \to \mathbb{R}$ este continuă, atunci integrala cu parametru $F(y)$ definită mai sus este funcție continuă.

Formula de derivare (Leibniz): Fie $f : [a, b] \times (c, d) \to \mathbb{R}$ o funcție continuă, astfel încît derivata parțială $\frac{\partial f}{\partial y}$ există și este continuă pe $[a, b] \times (c, d)$. Atunci integrala cu parametru $F(y)$ definită mai sus este derivabilă și are loc:

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx, \forall y \in (c, d).$$

Formula generală de derivare: Dacă $f : [a, b] \times (c, d) \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă, astfel încît derivata parțială $\frac{\partial f}{\partial y}$ să existe și să fie continuă pe $[a, b] \times (c, d)$, definim $\varphi, \psi : (c, d) \to [a, b)$ două funcții de clasă $\mathcal{C}^1$.

Atunci funcția $G(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)dx$ este derivabilă și are loc formula de derivare:

$$G'(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx + f(\varphi(y), y)\psi'(y) - f(\varphi(y), y)\varphi'(y), \forall y \in (c, d).$$

Schimbarea ordinii de integrare: Dacă $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă, atunci are loc:

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy.$$

5 Integrale improprii cu parametri

Putem considera acum integrale improprii, definite cu parametri, astfel. Luăm o funcție $f : [a, b) \times A \to \mathbb{R}$, astfel încît pentru orice $y \in A$, aplicația $[a, b) \ni x \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ este local integrabilă și integrala $\int_a^b f(x, y)dx$ converge. Atunci putem defini funcția:

$$F(x, y) = \int_a^b f(x, y)dx,$$

care se numește *integrală improprie cu parametru*.

Definiţie 5.1: Integrala $F(x, y)$ de mai sus se numește *uniform convergentă* (UC) (în raport cu y) pe mulțimea A dacă:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists b_\varepsilon \in (a, b) \text{ a.î. } \left| \int_t^b f(x, y)dx \right| < \varepsilon, \forall t \in (b_\varepsilon, b), \forall y \in A.$$

Pentru aceste integrale, se pot adapta proprietățile integralelor cu parametri din secțiunea anterioară:

Continuitate: Dacă $f : [a, b) \times A \to \mathbb{R}$ este continuă, iar integrala $\int_a^b f(x, y)dx$ este UC pe A, atunci funcția $F(x, y)$ definită mai sus este continuă.

Derivare: Fie $f : [a, b) \times (c, d) \to \mathbb{R}$ o funcție continuă, astfel încît derivata parțială $\frac{\partial f}{\partial y}$ există și este continuă pe $[a, b) \times (c, d)$ și pentru orice $y \in (c, d)$ fixat, integrala $F(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ este convergentă.

Dacă integrala $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx$ este UC pe (c, d), atunci integrala improprie cu parametru $F(y)$ de mai sus este derivabilă și are loc:

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx, \forall y \in (c, d).$$

Schimbarea ordinii de integrare: Dacă $f : [a, b) \times [c, d] \to \mathbb{R}$ este continuă și integrala $F(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ este UC pe (c, d), atunci are loc:

$$\int_c^d \Big(\int_a^b f(x, y)dx \Big) dy = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x, y)dy \Big) dx.$$

Criteriul de comparație pentru UC: Fie $f : [a, b) \times A \to \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că, pentru orice $y \in A$, aplicația $[a, b) \ni x \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ este local integrabilă. Fie $g : [a, b) \to \mathbb{R}$, astfel încît $|f(x, y)| \leqslant g(x), \forall x \in [a, b), \forall y \in A$.

Dacă integrala $\int_a^b g(x)dx$ este convergentă, atunci integrala $\int_a^b f(x, y)dx$ este UC.

5.1 Funcțiile lui Euler

Următoarele integrale improprii cu parametri se numesc *funcțiile lui Euler*:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx, \alpha > 0$$
$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, p > 0, q > 0.$$

Proprietățile lor, pe care le vom utiliza în calcule, sînt:

- $B(p, q) = B(q, p)$;
- $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$;
- $B(p, q) = \int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}dy$;
- $\Gamma(1) = 1$;
- $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha)$;

- $\Gamma(n) = (n-1)!, \forall n \in \mathbb{N}$;
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$;
- $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = (2n-1)!! \cdot 2^{-n} \cdot \sqrt{\pi}, \forall n \in \mathbb{N}$;
- $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}, \forall \alpha \in (0,1)$.

6 Exerciții

1. Folosind criteriile de comparație, să se studieze natura integralelor improprii:

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ (D);

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$ (C);

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{1-x^2}dx$ (D);

(d) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{x^3-1}}dx$ (C $x = 1$, D $x \to \infty \Rightarrow$ D);

(e) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$ (C $x \to \infty$, D $x \to 1$);

(f) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x^3-1}}dx$ (C);

2. Să se arate că integrala $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ este convergentă, dar nu este absolut convergentă.

Indicație: Pentru $x \to \infty$, convergența rezultă din criteriul lui Abel. Pentru $x = 0$, putem prelungi funcția prin continuitate, deoarece limita sa este finită.

Pentru AC, se aplică criteriul de comparație.

3. Să se calculeze integralele, folosind derivarea sub integrală:

(a) $\displaystyle I(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2 x + m^2 \sin^2 x)dx, m > 0$;

(b) $\displaystyle I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + a\cos x)}{\cos x}dx, |a| < 1$;

Soluție (a): Dacă considerăm funcția:

$$f(x, m) = \ln(\cos^2 x + m^2 \sin^2 x),$$

observăm că este continuă și admite o derivată parțială continuă în raport cu m.

Atunci obținem:

$$\frac{\partial f}{\partial m} = I'(m) = 2m \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x + m^2 \sin^2 x}dx$$

Pentru a calcula integrala, facem schimbarea de variabilă $\tan x = t$ și atunci:

$$dt = \frac{1}{\cos^2 x}dx.$$

Integrala inițială se poate prelucra:

$$I'(m) = 2m \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x(1 + m^2 \tan^2 x)} dx.$$

Așadar, pentru a obține $\sin^2 x$ în funcție de t calculăm:

$$\frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x} = t^2 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{t^2}{1 + t^2}.$$

În fine, integrala devine:

$$I'(m) = 2m \int_0^\infty \frac{t^2}{(1 + m^2 t^2)(1 + t^2)} dt.$$

Făcînd descompunerea în fracții simple, obținem:

$$\frac{t^2}{(1 + m^2 t^2)(1 + t^2)} = \frac{1}{m^2 - 1}\Big(\frac{1}{t^2 + 1} - \frac{1}{m^2 t^2 + 1}\Big).$$

și calculăm în fine integrala $I'(m) = \frac{\pi}{m+1}$. Integrăm și găsim $I(m) = \pi \ln(m + 1) + c$. Deoarece $I(1) = 0$, rezultă $c = -\pi \ln 2$ și, în fine:

$$I(m) = \pi \ln \frac{m + 1}{2}.$$

Indicație (b): Derivăm în raport cu a sub integrală și apoi integrăm cu schimbarea de variabilă $\tan \frac{x}{2} = t$.

4. Să se calculeze, folosind funcțiile Γ și B, integralele:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^p} dx, p > 0;$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{4}}}{(x + 1)^2} dx;$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^3 + 1} dx;$

(d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos^q x dx, p > -1, q > -1;$

(e) $\displaystyle\int_0^1 x^{p+1}(1 - x^m)^{q-1} dx, p, q, m > 0;$

(f) $\displaystyle\int_0^\infty x^p e^{-x^q} dx, p > -1, q > 0;$

(g) $\displaystyle\int_0^1 \ln^p x^{-1} dx, p > -1;$

(h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1 - x^n)^{\frac{1}{n}}}, n \in \mathbb{N}.$

Indicații:

(a) Facem schimbarea de variabilă $x^p = y$ și obținem $\Gamma\left(\frac{1}{p} + 1\right)$;

(b) Folosind proprietățile, obținem $B\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right)$, pe care îl scriem în funcție de Γ. Răspuns: $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$;

(c) Facem schimbarea de variabilă $x^3 = y$ și găsim $\frac{1}{3}B\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$;

(d) Facem schimbarea de variabilă $\sin^2 x = y$ și scriem în funcție de B;

(e) $x^m = y$ și scriem în funcție de B

(f) $x^q = y$ și scriem în funcție de Γ;

(g) $\ln x^{-1} = y$ și scriem în funcție de Γ;

(h) $x^n = y$ și scriem în funcție de B.