Seminar 1
Integrale multiple

1. Calculați:

(a) $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-16}}dx, x > 4;$

(b) $\int \frac{2x-5}{x^2-5x+7}dx;$

(c) $\int \frac{x-1}{3x^2-6x+11}dx;$

(d) $\int \frac{2x}{x^4-1}dx, x \in (-1,1);$

(e) $\int \arcsin x dx;$

(f) $\int_1^{\sqrt{e}} x \log_3 x dx;$

(g) $\int_1^e \sin(\ln x) dx;$

(h) $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{3-2x}{2x^2+1}dx;$

(i) $\int_1^e \frac{\ln x}{x(2+\ln x)}dx;$

Indicații:

- $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c;$
- $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c;$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + c;$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + c;$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c;$
- $\int \frac{-dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arccos\frac{x}{a} + c;$

2. Să se calculeze integralele duble:

(a) $\iint_D xy^2 dxdy$, unde $D = [0,1] \times [2,3]$;

(b) $\iint_D xy dxdy$, unde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [0,1], y^2 \leqslant x \leqslant y\}$;

(c) $\iint_D (x+3y)dxdy$, unde D este mulțimea plană mărginită de curbele de ecuații $y = x^2+1, y = -x^2, x = -1, x = 3$;

(d) $\iint_D x dxdy$, unde D este mulțimea plană mărginită de $x^2+y^2 = 9, x \geqslant 0$;

(e) $\iint_D xy dxdy$, unde D este domeniul delimitat de curbele $xy = 1$ și $x+y = \frac{5}{2}$;

(f) $\iint_D y\,dx\,dy$, unde D este domeniul mărginit de parabola $y^2 = 2x$, cercul $x^2 + y^2 - 2x = 0$ și dreapta $x = 2$.

3. Să se calculeze, trecînd la coordonate polare, integralele:

(a) $\iint_D e^{x^2+y^2}dx\,dy$, unde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$;

(b) $\iint_D 1 + \sqrt{x^2 + y^2}dx\,dy$, unde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - y \leqslant 0, x \geqslant 0\}$;

(c) $\iint_D \ln(1 + x^2 + y^2)dx\,dy$, unde D este mărginit de curbele de ecuații:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 & = e^2 \\ y & = x\sqrt{3} \\ x & = y\sqrt{3} \\ x & \geqslant 0 \end{cases}$$