Seminar 1
Spații metrice

1 Spații metrice

Definiţie 1.1: Fie X o mulțime nevidă. O aplicație $d : X \times X \to \mathbb{R}$ se numește *distanță* (metrică) pe X dacă:

(a) $d(x, y) \geqslant 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$;

(b) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(c) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$;

(d) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (*inegalitatea triunghiului*).

În acest context, perechea (X, d) se numește *spațiu metric*.

Această noțiune vine să generalizeze calculul distanțelor cu ajutorul modulului, cum se procedează în cazul mulțimii numerelor reale, de exemplu. În consecință, avem și următoarele *mulțimi remarcabile în spații metrice* (X, d):

- *bila deschisă de centru* a *și rază* r, definită pentru $a, r \in \mathbb{R}$ prin:

$$B(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) < r\};$$

- *sfera de centru* a *și rază* r, definită prin:

$$S(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) = r\};$$

- *bila închisă de centru* a *și rază* r, definită prin:

$$\overline{B(a, r)} = B(a, r) \cup S(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) \leqslant r\}.$$

Aceste mulțimi generalizează *intervalele de numere reale*. Mai general, avem:

Definiţie 1.2: Fie X un spațiu metric. O submulțime $D \subseteq X$ se numește *deschisă* dacă $\forall a \in D, \exists r > 0$ astfel încît $B(a, r) \subseteq D$. Cu alte cuvinte, mulțimea conține o bilă deschisă, centrată în orice punct al său.

O mulțime se numește *închisă* dacă complementara ei, relativ la spațiul total, este o mulțime deschisă.

Adaptînd noțiunile specifice pentru analiza matematică, precum convergență, limită ș.a.m.d. folosindu-ne de funcția distanță, putem defini construcțiile și conceptele uzuale. În particular, au sens noțiuni precum *șiruri convergente* și *șiruri Cauchy*, definite ca în cazul mulțimii numerelor reale, doar cu ajutorul funcției generale distanță. În plus, avem și următoarea noțiune:

Definiţie 1.3: Un spațiu metric (X, d) se numește *complet* dacă noțiunile de „șir Cauchy“ și „șir convergent“ coincid pentru X.

2 Principiul contracției. Metoda aproximațiilor succesive

Definiție 2.1: Fie (X, d) un spațiu metric și fie $f : X \to X$ o funcție.

Aplicația f se numește *contracție pe* X dacă există $k \in [0, 1)$ astfel încît:

$$d(f(x), f(y)) \leqslant k \cdot d(x, y), \forall x, y \in X.$$

Numărul k se numește *factor de contracție*.

Observație 2.1: De remarcat că în cazul clasic, unde $d(x, y) = |x - y|$, formula contracției se poate gîndi ca o aproximație finită a derivatei. Mai precis, avem:

$$\frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)} = \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leqslant k.$$

Așadar, calculînd $\sup |f'(x)|$ putem găsi valoarea maximă a factorului de contracție.

Un rezultat important este următorul:

Teoremă 2.1 (Banach)**:** *Fie* (X, d) *un spațiu metric complet și fie* $f : X \to X$ *o contracție de factor* k*. Atunci există un unic punct* $\xi \in X$*, astfel încît* $f(\xi) = \xi$*.*

În acest context, ξ *se numește* punct fix *pentru* f*.*

Pentru a găsi punctul fix al unei aplicații, se folosește *metoda aproximațiilor succesive*. Se construiește un șir recurent astfel.

Fie $x_0 \in X$, arbitrar și definim șirul recurent $x_{n+1} = f(x_n)$. Se poate demonstra că șirul x_n este convergent, iar limita sa este punctul fix căutat. În plus, eroarea aproximației cu acest șir este dată de:

$$d(x_n, \xi) \leqslant \frac{k^n}{1-k} \cdot d(x_0, x_1), \forall n \in \mathbb{N}.$$

3 Exemplu rezolvat

Aplicațiile interesante pentru această temă sînt date de calculul aproximativ al soluțiilor unor ecuații, definite în spații metrice.

1. Să se aproximeze cu o eroare mai mică decît 10^{-3} soluția reală a ecuației $x^3 + 4x - 1 = 0$.

Soluție: Folosind, eventual, metode de analiză (șirul lui Rolle), se poate arăta că ecuația are o singură soluție reală $\xi \in (0, 1)$. Folosim metoda aproximațiilor succesive pentru a o găsi.

Fie $X = [0, 1]$ și $f : X \to X, f(x) = \frac{1}{x^2+4}$. Ecuația dată este echivalentă cu $f(x) = x$, adică a găsi un punct fix pentru funcția f.

Spațiul metric X este complet. Mai demonstrăm că f este contracție pe X. Derivata este $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+4)^2}$, și avem:

$$\sup_{x \in X} |f'(x)| = -f'(1) = \frac{2}{25} < 1,$$

deci f este o contracție, de factor $k = \frac{2}{25}$.

Șirul aproximațiilor succesive este dat de:

$$x_0 = 0, \quad x_{n+1} = f(x_n) = \frac{1}{x_n^2 + 4}.$$

Evaluarea erorii:

$$|x_n - \xi| < \frac{k^n}{1-k}|x_0 - x_1| = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{25}\right)^n,$$

de unde rezultă că putem lua $\xi \simeq x_3 = f\left(\frac{16}{65}\right) \simeq 0,235$.

Observaţie 3.1: Alternativ, puteam lucra cu $g(x) = \frac{1}{4}(1 - x^3)$, cu $x \in [0, 1]$. Se arată că și g este o contracție, de factor $k = \frac{3}{4}$. În acest caz, șirul aproximațiilor succesive converge mai încet și avem $\xi \simeq x_6$.

Similar, puteți rezolva următoarele ecuații, cu eroarea ε:

(a) $x^3 + 12x - 1 = 0, \quad \varepsilon = 10^{-3}$;

(b) $x^5 + x - 15 = 0, \quad \varepsilon = 10^{-3}$;

(c) $3x + e^{-x} = 1, \quad \varepsilon = 10^{-3}$;

(d) $x^3 - x + 5 = 0, \quad \varepsilon = 10^{-2}$;

(e) $x^5 + 3x - 2 = 0, \quad \varepsilon = 10^{-3}$.