Seminar 13
Variabile aleatoare

Cazul discret

Variabilele aleatoare sînt moduri de reprezentare a informației în calculul probabilităților, precum matricele ne pot ajuta să „codificăm" informații geometrice sau algebrice. De obicei, ele se reprezintă asemenea permutărilor, anume ca tablouri bidimensionale.

Începem cu definițiile fundamentale.

Definiţie 1: O variabile a cărei valoare se determină de un eveniment rezultat în urma unei experiențe se numește *variabilă aleatoare*.

Definiţie 2: Fie X o variabilă aleatoare care poate lua valorile $x_1, \dots, x_n$, cu probabilitățile $f(x_1), \dots, f(x_n)$. Mulțimea de perechi ordonate $\{(x_i, f(x_i))\}_i$ definește *repartiția* variabilei aleatoare.

Mai general, dacă X este o variabilă aleatoare reală (adică $\operatorname{Im} f \subseteq \mathbb{R}$), atunci funcția $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin:

$$F_X(x) = P(X < x), \forall x \in \mathbb{R}$$

se numește *funcția de repartiție* a variabilei aleatoare X.

Putem interpreta funcția de repartiție în sensul următor: calculată în x, ea ne dă probabilitatea ca valorile variabilei aleatoare să fie pînă în x.

Se poate vedea din definiție că au loc următoarele *proprietăți*:

(1) $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, iar $\lim\limits_{x \to \infty} F_X(x) = 1$;

(2) F_X este crescătoare (deoarece acumulează) și este continuă la dreapta în orice punct $x \in \mathbb{R}$;

(3) $P(X = x) = F(x) - F(x - 0)$, unde $F(x - 0)$ notează limita la stînga

$$\lim_{x_0 \nearrow x} F(x_0).$$

(4) $P(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a)$.

Ne vor interesa două cazuri, anume acelea ale variabilelor aleatoare continue și discrete, pe care le definim mai jos.

Definiţie 3: Variabila aleatoare X se numește *discretă* dacă mulțimea valorilor ei este o mulțime cel mult numărabile de numere reale sau complexe (în bijecție cu o submulțime [nestrictă] a lui $\mathbb{N}$), $\{a_n\}_n$.

În acest caz, dacă $P(X = a_n) = p_n$, atunci condiția de normare este $\sum p_n = 1$, iar funcția de repartiție F_X este o funcție în scară, cu:

$$F_X(x) = \sum_{a_n < x} p_n.$$

În acest caz, putem reprezenta variabila aleatoare într-o formă matriceală:

$$X \sim \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n & \dots \\ p_0 & p_1 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix},$$

matrice care se numește *matricea de repartiție* a lui X sau *distribuția* sa.

Cazul continuu este definit mai jos.

Definiţie 4: Dacă $P(X = x) = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, atunci variabila aleatoare X se numește *continuă*. Echivalent, funcția ei de repartiție este o funcție reală continuă (v. proprietatea (3)).

În multe situații, vom lucra cu variabile aleatoare discrete, reprezentate matriceal. Va fi util să definim cîteva operații elementare între aceste obiecte.

Fie, așadar, două variabile aleatoare discrete:

$$X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}, \quad Y : \begin{pmatrix} y_j \\ q_j \end{pmatrix}$$

Definim $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j), \forall i, j$. Atunci au loc formulele de calcul:

$$p_i = \sum_j p_{ij}$$
$$q_j = \sum_i p_{ij}$$
$$1 = \sum_{i,j} p_{ij}.$$

Variabilele X și Y se numesc **independente** dacă $p_{ij} = p_i \cdot q_j$.

Suma variabilelor are repartiția:

$$X + Y : \begin{pmatrix} x_i + y_j \\ p_{ij} \end{pmatrix}.$$

Dacă $\alpha \in \mathbb{R}$ este o constantă reală, atunci variabila $X + \alpha$ are repartiția:

$$X + \alpha : \begin{pmatrix} x_i + \alpha \\ p_i \end{pmatrix}.$$

Produsul variabilelor X și Y are repartiția:

$$XY : \begin{pmatrix} x_i y_j \\ p_{ij} \end{pmatrix}$$

Produsul αX, pentru $\alpha \in \mathbb{R}$ are repartiția:

$$\alpha X : \begin{pmatrix} \alpha x_i \\ p_i \end{pmatrix}.$$

Să vedem un exemplu de calcul:

Exemplu: Se dau variabilele independente:

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix}, \quad Y : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Determinați repartițiile variabilelor $X + Y, XY, 2 + X, X^2, 3Y$.

Soluție: Vom prezenta repartițiile punînd valorile pentru evenimente în ordine crescătoare. De exemplu, $X + Y$ poate lua valorile 1, 2, 3, 4, iar X^2 poate lua valorile 0, 1, 4.

Folosim independența și formulele de calcul pentru probabilități și obținem, de exemplu:

$$\begin{aligned} P(X + Y = 1) &= P(X = 0 \wedge Y = 1) \\ &= P(X = 0) \cdot P(Y = 1) \\ &= 0,12 \\ P(X + Y = 2) &= P\Big((X = 0 \wedge Y = 2) \vee (X = 1 \wedge Y = 1)\Big) \\ &= P(X = 0 \wedge Y = 2) + P(X = 1 \wedge Y = 1) \\ &= 0,32 \end{aligned}$$

Similar se calculează și celelalte valori și, folosind definițiile operațiilor, obținem:

$$\begin{aligned} X + Y &: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0,12 & 0,32 & 0,4 & 0,16 \end{pmatrix} \\ XY &: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0,2 & 0,24 & 0,4 & 0,6 & \end{pmatrix} \\ 2 + X &: \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix} \\ X^2 &: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix} \\ 3Y &: \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pentru studiul variabilelor aleatoare se folosesc mai multe mărimi, pe care le introducem, pe rînd.

Definiţie 5: Fie X o variabilă aleatoare discretă.

(1) Dacă seria $\sum_{n \geqslant 0} x_n p_n$ este absolut convergentă, atunci spunem că X admite medie, iar numărul:

$$E(X) = \sum_{n \geqslant 0} x_n p_n$$

se numește *media* lui X;

(2) Pentru $n \neq 0$, media $E(X^n)$ a variabilei X^n se numește *momentul de ordinul* n al lui X;

(3) Media variabilei $(X - E(X))^2$ se numește *varianța* sau *dispersia* lui X, notată $\text{Var}(X)$ sau $D^2(X)$.

Funcția de medie are următoarele proprietăți esențiale:

(a) **Liniaritatea:** $E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$, pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$;

(b) **Monotonia:** Dacă $X \leqslant Y$, atunci $E(X) \leqslant E(Y)$;

(c) Dacă X este o constantă c, atunci $E(X) = c$;

(d) Dacă X și Y sînt variabile aleatoare independente, adică descriu evenimente independente, atunci $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$.

Funcția de dispersie are proprietățile:

(a) $D^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2$;

(b) $D^2(X) \geqslant 0$;

(c) $D^2(X) = 0 \Leftrightarrow P(X = E(X)) = 1$, adică X este o constantă cu probabilitatea 1 (X descrie doar evenimentul sigur);

(d) **Cebîșev:** Pentru orice $\varepsilon > 0$, are loc:

$$P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) < \frac{D^2(X)}{\varepsilon^2}.$$

Echivalent, se mai poate scrie:

$$P(|X - E(X)| < \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{D^2(X)}{\varepsilon^2}.$$

(e) $D^2(\alpha X) = \alpha^2 D^2(X)$, pentru orice $\alpha \in \mathbb{C}$;

(f) Dacă X și Y sînt independente, atunci:

$$D^2(X + Y) = D^2(X) + D^2(Y).$$

Mai definim două mărimi care se asociază variabilelor aleatorii.

Definiţie 6: Fie X și Y două variabile aleatoare. Numim *covarianță* a variabilelor X și Y, notată $\operatorname{cov}(X, Y)$ numărul:

$$\operatorname{cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Proprietățile esențiale ale covarianței sînt date de:

(a) Dacă X și Y sînt variabile aleatoare independente, atunci $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$;

(b) Dacă $X_1, \dots, X_n$ sînt variabile aleatoare cu dispersiile D_i^2 și covarianțele $\operatorname{cov}(X_i, X_j), i \neq j$, atunci are loc:

$$D^2\Big(\sum_{i=1}^n X_i\Big) = \sum_{i=1}^n D_i^2 + 2\sum_{i<j} \operatorname{cov}(X_i, X_j).$$

Definiţie 7: Dacă X și Y sînt variabile aleatoare, se numește *coeficient de corelație* al lor, notat $\rho(X, Y)$, numărul calculat prin:

$$\rho(X, Y) = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{D^2(X) \cdot D^2(Y)}}$$

Se poate vedea din definiție că, atît covarianța, cît și corelația arată „gradul de independență" a variabilelor aleatoare X și Y. Într-adevăr, dacă X și Y sînt independente, atunci avem $\rho(X,Y) = 0$. Afirmația reciprocă este, însă, falsă!

Să luăm un exemplu: Fie $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, cu $P(a_i) = \dfrac{1}{4}$.

Presupunem că variabila aleatoare X realizează corespondența:

$$X(a_1) = 1, X(a_2) = -1, X(a_3) = 2, X(a_4) = -2.$$

Atunci, ea are matricea de repartiție:

$$X \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Presupunem că o altă variabilă aleatoare Y realizează corespondența:

$$Y(a_1) = 1, Y(a_2) = 1, Y(a_3) = -1, Y(a_4) = -1.$$

Atunci matricea ei se poate reduce la:

$$Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Produsul celor două variabile aleatoare are matricea de repartiție:

$$XY : \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Rezultă că $E(X) = E(Y) = E(XY)$, deci $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$. Însă putem observa că X și Y nu sînt independente. Într-adevăr, avem:

$$P(X = 1 \wedge Y = 1) = P(a_1) = \frac{1}{4} \neq P(X = 1) \cdot P(Y = 1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}.$$

În fine, o altă noțiune de care avem nevoie este *funcția generatoare*.

Definiţie 8: Fie X o variabilă aleatoare discretă care ia valori naturale.

Funcția $G_X(t)$, definită prin:

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{n \geqslant 0} p_n t^n,$$

cu $t \leqslant 1$ și $p_n = P(X = n)$ se numește *funcția generatoare* a variabilei aleatoare X.

Funcția generatoare codifică, de fapt, în coeficienții unei serii formale, repartiția unei variabile aleatoare. Ea are următoarele proprietăți:

(a) Dacă avem variabilele aleatoare independente $X_1, \ldots, X_n$, iar $X = X_1 + \cdots + X_n$, atunci:

$$G_X(t) = G_{X_1}(t) \cdots G_{X_n}(t);$$

(b) $E(X) = G'_X(1)$;

(c) $D^2(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - [G'_X(1)]^2$;

(d) Două variabile aleatoare cu aceeași funcție generatoare au aceeași repartiție.

Exemple de repartiții discrete

Vom regăsi acum, în contextul teoriei variabilelor aleatoare, scheme clasice de probabilitate.

Repartiția binomială (Bernoulli)

Presupunem că se fac n experiențe independente, în fiecare din experiențe, probabilitatea de realizare a unui eveniment A fiind constantă și egală cu p (rezultă că probabilitatea ca A să nu se realizeze este $q = 1 - p$).

Numărul de realizări ale evenimentului A în cele n experiențe se constituie ca o variabilă aleatoare X, ale cărei valori posibile sînt $k = 0, 1, \dots, n$, în funcție de cîte din experiențe realizează A. Așadar, avem $P(X = k) = p_k$.

Cînd considerăm fiecare k, cu probabilitatea sa de realizare, mulțimea perechilor $(k, p_k), k \in \{0, 1, \dots, n\}$ se numește *repartiție binomială* sau *repartiție Bernoulli*.

Pentru acestea, valorile principalilor parametri sînt:

- $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, k \in \{0, 1, \dots, n\}$;
- $E(X) = np$;
- $D^2(X) = npq$;
- $G_X(t) = (pt + q)^n$.

Observație: Pentru $n \to \infty, p \to 0$, astfel încît $np = \lambda$, probabilitățile $P(X = k)$ pot fi aproximate prin valorile repartiției Poisson (vezi mai jos).

Repartiția geometrică

Fie X numărul de experimente de tip Bernoulli, cu probabilitatea p de succes, care trebuie repetate pînă la apariția primului succes. Atunci:

- $P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}, k \in \mathbb{N}^*$;
- $E(X) = \dfrac{1}{p}$;
- $D^2(X) = \dfrac{1 - p}{p^2}$;
- $G_X(t) = \dfrac{pt}{1 - qt}$.

Repartiția binomial negativă

Fie X numărul de experimente de tip Bernoulli cu probabilitatea de succes p care trebuie efectuate pentru a obține m succese. Atunci:

- $P(X = n) = C_{n-1}^{m-1} p^m q^{n-m}$ (pentru $m = 1$, găsim repartiția geometrică);
- $E(X) = \dfrac{m}{p}$;

- $D^2(X) = \dfrac{mq}{p^2}$;
- $G_X(t) = \dfrac{p^m t^m}{(1-qt)^m}$.

Repartiția hipergeometrică

Fie X o variabilă aleatoare care reprezintă numărul de bile albe obținute după n extrageri fără repunere dintr-o urnă ce conține a bile albe și b bile negre. Atunci avem:

- $P(X = x) = \dfrac{C_a^x C_b^{n-x}}{C_{a+b}^n}, 0 \leqslant x \leqslant n$;
- $E(X) = np$;
- $D^2(X) = xpq \cdot \dfrac{a+b-x}{a+b-1}$, unde $p = \dfrac{a}{a+b}$, iar $q = 1 - p = \dfrac{b}{a+b}$.

Repartiția Poisson

Repartiția Poisson se caracterizează printr-un parametru $\lambda > 0$ (v. repartiția binomială [Bernoulli] mai sus). Avem:

- $P(X = n) = \dfrac{\lambda^n}{n!} \cdot e^{-\lambda}, n \in \mathbb{N}$;
- $E(X) = \lambda$;
- $D^2(X) = \lambda$;
- $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$.

Cazul continuu

Definiţie 9: Variabila aleatoare X se numește *absolut continuă* dacă există o funcție integrabilă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ astfel încît funcția de repartiție $F(x)$ a lui X să fie dată de:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

În acest caz, f se numește *densitatea de probabilitate* a lui X.

Ca în cazul discret, avem următoarele proprietăți esențiale:

(a) Funcția f este pozitivă și are loc condiția de normare

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

(b) În orice punct de continuitate a lui f, avem $F'(x) = f(x)$;

(c) $P(a \leqslant X \leqslant b) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$;

(d) $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$;

(e) Dacă X are densitatea X, iar $Y = aX + b$ este o altă variabilă aleatoare, cu $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, atunci Y are densitatea:

$$f_Y(x) = \frac{1}{|a|} f\Big(\frac{x-b}{a}\Big).$$

Definiţie 10: Pentru orice variabilă aleatoare X, funcția:

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX})$$

se numește *funcția caracteristică* a lui X.

Funcția caracteristică joacă un rol similar funcției generatoare din cazul discret. Astfel, ea are următoarele proprietăți:

(a) Dacă $X_1, \dots, X_n$ sînt variabile aleatoare independente, iar $X = X_1 + \cdots + X_n$, atunci:

$$\varphi_X(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(t);$$

(b) Dacă X admite moment de ordinul n, atunci:

$$E(X^k) = \frac{\varphi_X^{(k)}(0)}{i^k}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n;$$

(c) Două variabile aleatoare cu aceeași funcție caracteristică au aceeași repartiție;

(d) Dacă X este discretă, atunci obținem:

$$\varphi_X(t) = \sum_n e^{ita_n} p_n;$$

(e) Dacă X are densitatea de repartiție $f(x)$, atunci:

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx,$$

iar în punctele de continuitate ale lui f, are loc relația:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi_X(t) dt.$$

În continuare, prezentăm cele mai cunoscute repartiții absolut continue.

Repartiții absolut continue

Repartiția normală (gaussiană)

Dată media m și abaterea pătratică σ, repartiția variabilei aleatoare X are densitatea:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

În acest caz, se mai notează $X \sim N(m, \sigma)$.

Pentru cazul particular $m = 0$ și $\sigma = 1$, X se numește *variabilă aleatoare standard*.

Funcția caracteristică este dată de $\varphi_X(t) = e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$.

Pentru cazul variabilelor normale standard, funcția de repartiție are o formă particulară și se numește *funcția lui Laplace*:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt.$$

Observație: Valorile funcției Laplace sînt tabelate și, de obicei, se dau în probleme.

În general, dacă avem o variabilă aleatoare normală de tip $N(m, \sigma)$, atunci funcția ei de repartiție F se poate obține din funcția lui Laplace în forma:

$$F(x) = \Phi\Big(\frac{x - m}{\sigma}\Big).$$

Așadar, avem:

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \Phi\Big(\frac{b - m}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\frac{a - m}{\sigma}\Big), \tag{1}$$

de unde putem obține mai departe:

$$P(|X - m| < \varepsilon\sigma) = \Phi(\varepsilon) - \Phi(-\varepsilon) = 2\Phi(\varepsilon) - 1.$$

Repartiția uniformă

Pentru un interval $[a, b]$, densitatea de repartiție este:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b - a}, & a \leqslant x \leqslant b \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

În acest caz, avem media $E(X) = \dfrac{a + b}{2}$ și $D^2(X) = \dfrac{(b - a)^2}{12}$.

Repartiția exponențială

Dat un parametru $\lambda > 0$, repartiția exponențială are densitatea:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}.$$

Pentru aceasta, avem:

- $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$;
- $D^2(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$;
- $\varphi_X(t) = \Big(1 - \dfrac{it}{\lambda}\Big)^{-1}$.

Repartiția Gamma

Dați parametrii $\lambda, p > 0$, densitatea variabilei aleatoare de repartiție Gamma este:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases},$$

unde Γ este funcția lui Euler. În acest caz, avem:

- $E(X) = \dfrac{p}{\lambda}$;
- $D^2(X) = \dfrac{p}{\lambda^2}$;
- $\varphi_X(t) = \left(1 - \dfrac{it}{\lambda}\right)^{-p}$.

Din repartiția Gamma, putem obține alte cîteva cazuri particulare:

- pentru $p = 1$, se obține repartiția exponențială;
- pentru $\lambda = \dfrac{1}{2}, p = \dfrac{n}{2}$, se obține repartiția numită *hi pătrat*, cu n grade de libertate, notată $\chi^2(n)$.

Repartiția Cauchy

Aceasta are densitatea $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$.
În acest caz, X nu admite valoare medie.

Exerciții

1. Doi parteneri egal cotați boxează 12 runde. Probabilitatea ca oricare dintre ei să cîștige o rundă este 50%. Să se calculeze valoarea medie, dispersia și abaterea medie pătratică a variabilei aleatoare care reprezintă numărul de runde cîștigate de unul din parteneri.

Soluție: Variabila aleatoare are o distribuție binomială. Astfel, avem:

- $P(X = k) = C_{12}^k \dfrac{1}{2^k} \cdot \dfrac{1}{2^{12-k}}$;
- $E(X) = np = 12 \cdot \dfrac{1}{2}$;
- $D^2(X) = npq = 12 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 3$;
- $D(X) = \sqrt{D^2(X)} = \sqrt{3}$.

2. La o agenție de turism s-a constatat că 5% dintre persoanele care au făcut rezervări renunță. Se presupune că s-au făcut 100 de rezervări pentru un hotel cu 95 locuri. Care este probabilitatea ca toate persoanele ce se prezintă la hotel să aibă loc?

Soluție: Fie X variabila aleatoare corespunzătoare numărului de persoane care se prezintă la hotel. X urmează o repartiție binomială, cu $n = 100$ și $p = 0,95$. Atunci avem:

$$P(X \leqslant 95) = 1 - P(X > 95) = 1 - \sum_{k=96}^{100} C_{100}^{k} (0,05)^{100-k} \cdot (0,95)^{k}.$$

3. La examenul de matematică, probabilitatea ca o teză să fie notată cu notă de trecere este 75%. Se aleg la întîmplare 10 lucrări. Fie X variabila aleatoare ce reprezintă numărul tezelor ce vor fi notate cu notă de trecere. Calculați:

(a) repartiția lui X ;

(b) $E(X), D^2(X)$;

(c) $P(X \geqslant 5), P(7 \leqslant X \leqslant 10/X \geqslant 8), P(X = 10)$;

(d) funcția caracteristică a lui X.

Soluție: (a) Avem o variabilă aleatoare cu repartiție binomială și $n = 10$, $p = 0,75$. Atunci X ia valorile $x \in \{0, 1, \ldots, 10\}$ cu probabilitățile corespunzătoare distribuției binomiale, deci:

$$p(x) = C_{10}^{x} (0,75)^{x} \cdot (0,25)^{10-x}.$$

(b) Conform formulelor de calcul, avem:

$$\begin{aligned} E(X) &= np = 10 \cdot 0,75 = 7,5 \\ D^2(X) &= npq = 10 \cdot 0,75 \cdot 0,25 = 1,875. \end{aligned}$$

(c)

$$P(X \geqslant 5) = \sum_{x=5}^{10} C_{10}^{x} (0,75)^{x} \cdot (0,25)^{10-x}$$

Pentru $P(7 \leqslant X \leqslant 10/X \geqslant 8)$ avem un *eveniment condiționat*. Dacă A și B sînt două evenimente, amintim că probabilitatea $P(A/B)$, adică probabilitatea evenimentului A condiționat de evenimentul prealabil B este:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Atunci, obținem:

$$\begin{aligned} P(7 \leqslant X \leqslant 10/X \geqslant 8) &= \frac{P(8 \leqslant X \leqslant 10)}{P(X \geqslant 8)} \\ &= \frac{\sum_{x=8}^{10} C_{10}^{x} (0,75)^{x} (0,25)^{10-x}}{\sum_{x=8}^{10} C_{10}^{x} (0,75)^{x} (0,25)^{10-x}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

În fine:

$$P(X = 10) = C_{10}^{10} (0,75)^{x} (0,25)^{0}.$$

(d) Calculăm succesiv:

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= E(e^{itX}) \\ &= \sum_{x=0}^{10} e^{itx} C_{10}^{x} (0,75)^x (0,25)^{10-x} \\ &= (0,75 \cdot e^{it} + 0,25)^{10}.\end{aligned}$$

4. Presupunem că la 100 de convorbiri telefonice au loc 1000 de bruiaje. Care este probabilitatea de a avea o convorbire fără bruiaje? Dar una cu cel puțin 2 bruiaje?

Variabila aleatoare ce reprezintă numărul de bruiaje se consideră a fi repartizată Poisson, cu $\lambda = E(X)$.

Soluție: Avem $E(X) = \dfrac{1000}{100} = 10 = \lambda$, care este și parametrul distribuției Poisson. Atunci:

$$\begin{aligned}P(X = 0) &= e^{-10} \cdot \frac{10^0}{0!} = e^{-10} \\ P(X \geqslant 2) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &= 1 - e^{-10} - 10 \cdot e^{-10}.\end{aligned}$$

5. Într-o mină au loc în medie 2 accidente pe săptămînă, distribuite după legea Poisson. Să se calculeze probabilitatea de a avea cel mult 2 accidente:

(a) într-o săptămînă;

(b) în 2 săptămîni;

(c) în fiecare săptămînă dintr-un interval de 2 săptămîni.

Soluție: (a) Fie X variabila aleatoare ce desemnează numărul de accidente dintr-o săptămînă. Distribuția este de tip Poisson, cu $\lambda = E(X) = 2$. Atunci:

$$P(X \leqslant 2) = e^{-2}\left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{4}{2!}\right) = 5e^{-2}.$$

(b) Fie Y variabila aleatoare ce desemnează numărul de accidente în 2 săptămîni. Distribuția este de asemenea de tip Poisson, cu $\lambda = 2 + 2 = 4$. Atunci:

$$P(Y \leqslant 2) = e^{-5}\left(1 + \frac{4}{1!} + \frac{16}{2!}\right) = 13e^{-4}.$$

(c) Probabilitatea cerută este:

$$P(X \leqslant 2) \cdot P(X \leqslant 2) = 25e^{-4}.$$

6. La un anumit cîntar erorile de măsurare sînt normal distribuite cu $m = 0$ și $\sigma = 0,1\text{g}$. Dacă se cîntărește un obiect la acest aparat, care este probabilitatea ca eroarea de măsurare să fie mai mică decît 15g?

Soluție: Fie X variabila aleatoare care reprezintă eroarea de măsurare dată cînd un obiect este cîntărit. Această variabilă este continuă și distribuită normal cu parametrii dați. Notăm acest lucru cu $X \sim N(0; 0,1)$. Vrem să calculăm probabilitatea $P(-0,15 \leqslant X \leqslant 0,15)$.

Avem succesiv (cf. (1)):

$$\begin{aligned} P(-0,15 \leqslant X \leqslant 0,15) &= P\Big(\frac{-0,15-0}{0,1} \leqslant X \leqslant \frac{-0,15+0}{0,1}\Big) \\ &= P(-1,5 \leqslant X \leqslant 1,5) \\ &= \Phi(1,5) - \Phi(-1,5) \\ &= \Phi(1,5) - 1 + \Phi(1,5) \\ &= 0,8664. \end{aligned}$$