Seminar 12
Scheme clasice de probabilitate

Schemele clasice de probabilitate sînt modele matematice care ne permit calculul probabilității de realizare a unui eveniment în cazul unor distribuții anume.

Schema lui Poisson

Schema lui Poisson se formulează astfel. Presupunem că avem n urne $U_i, 1 \leqslant i \leqslant n$, care conțin bile albe și bile negre în proporții cunoscute. Fie p_i probabilitatea de extragere a unei bile albe din urna U_i, respectiv q_i, probabilitatea de extragere a unei bile negre din urna U_i.

Extragem cîte o bilă din fiecare urnă. Probabilitatea de a obține k bile albe este coeficientul lui X^k din polinomul:

$$\prod_{i=1}^{n}(p_i X + q_i) = (p_1 X + q_1)(p_2 X + q_2) \cdots (p_n X + q_n).$$

Observație: În cazul schemei lui Poisson, extragerea se face *fără revenire*. O bilă, după ce a fost extrasă, nu este repusă în urnă, astfel că, după fiecare extragere, numărul de bile din urnă scade.

Exemplu: Avem 3 sisteme de siguranță, primul funcționează cu probabilitatea de 80%, al doilea, de 70%, iar al treilea, în 90% din cazuri. Să se determine probabilitatea ca oricare două dintre sisteme să funcționeze simultan.

Soluție: Ne aflăm în cazul schemei lui Poisson, „bilele“ fiind sistemele de siguranță, iar „extragerea“ înseamnă funcționarea lor. Așadar, căutăm coeficientul lui X^2 din polinomul:

$$\pi = (0,8 \cdot X + 0,2)(0,7 \cdot X + 0,3)(0,9 \cdot X + 0,1),$$

coeficient care este $p = 0,398$.

Schema lui Bernoulli (binomială)

Situația este similară cu cea din cazul Poisson, doar că acum extragerile se fac *cu repunere*. Adică, după ce fiecare bilă este extrasă și se înregistrează culoarea sa, este repusă în urnă, pentru a putea fi extrasă din nou, eventual.

Așadar, schema lui Bernoulli se formulează astfel. Avem o urnă cu a bile albe și b bile negre. Extragem cu repunere n bile. Probabilitatea să extragem k bile albe, cu $0 \leqslant k \leqslant n$ este dată de:

$$p(n, k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad \text{unde } p = \frac{a}{a+b}, q = \frac{b}{a+b}.$$

De remarcat că în acest caz, p corespunde evenimentului favorabil, iar $q = 1 - p$.

Exemplu: Se aruncă două zaruri de 10 ori. Care este probabilitatea să se obțină de exact 4 ori suma 7?

Soluție: Ne aflăm în cazul schemei lui Bernoulli, unde „bilele" sînt sumele de pe zaruri, iar „extragerea" este aruncarea zarului. Evident, modelul potrivit este acela al extragerii cu revenire, deoarece orice sumă poate fi obținută la fiecare aruncare.

În acest caz, avem $p = \frac{1}{6}$, deoarece suma 7 poate fi obținută în 6 moduri din punctele de pe două zaruri, iar cazurile posibile sînt 36. Rezultă $q = \frac{5}{6}$.

În plus, avem $n = 10, k = 4$, deci:

$$p(10, 4) = C_{10}^4 \frac{1}{6^4} \cdot \frac{5^6}{6^6}.$$

Schema multinomială

Schema lui Bernoulli se mai numește *schema binomială*, deoarece $p(n, k)$ este, de fapt, coeficientul lui X^k din dezvoltarea binomului $(pX + q)^n$.

O generalizare a acestei situații este *schema multinomială*, în care presupunem că avem o urnă cu bile de $s \in \mathbb{N}$ culori și se extrag cu repunere n bile. Probabilitatea de a extrage k_i bile de culoare i, cu $1 \leqslant i \leqslant s$ este dată de formula:

$$p(n; k_1, \dots, k_s) = \frac{n!}{k_1!k_2! \cdots k_s!} \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_s^{k_s},$$

unde $n = k_1 + \cdots + k_s$ și $p_1 + \cdots + p_s = 1$, iar p_i este probabilitatea de a extrage o bilă de culoare i.

Exemplu: Se aruncă cu un zar de 10 ori. Care este probabilitatea ca exact de 2 ori să apară fața cu 1 punct și de 3 ori să apară fața cu 2 puncte?

Soluție: Evident, sîntem în cazul schemei multinomiale. „Culorile" sînt punctele de pe zaruri și vrem să „extragem 2 bile de culoarea 1 și 3 bile de culoarea 2".

Atunci $n = 10$, deoarece facem 10 „extrageri", $k_1 = 2$ și $k_2 = 3$. În plus, avem $p_1 = p_2 = \frac{1}{6}$, deoarece orice număr de pe zar are aceeași probabilitate de a apărea. Rezultă, de asemenea, că avem nevoie și de $k_3 = n - k_1 - k_2 = 5$ și $p_3 = 1 - p_1 - p_2 = \frac{2}{3}$.

Probabilitatea cerută este:

$$p(10; 2, 3, 5) = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 5!} \cdot \frac{1}{6^2} \cdot \frac{1}{6^3} \cdot \frac{2^5}{3^5}.$$

Schema geometrică

Dintr-o urnă cu a bile albe și b bile negre, extragem fără repunere n bile, cu $n \leqslant a + b$. Probabilitatea de a obține $k \leqslant a$ bile albe, *fără repunere*, este dată de:

$$p_{a,b}^{k,n-k} = \frac{C_a^k \cdot C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}.$$

Mai general, dacă avem a_i bile de culoarea $i, 1 \leqslant i \leqslant s$ și extragem n bile fără repunere, atunci probabilitatea de a extrage k_i, cu $k_1 + \cdots + k_s = n$ bile de culoarea i este dată de formula:

$$p_{a_1,\ldots,a_s}^{k_1,\ldots,k_s} = \frac{C_{a_1}^{k_1} \cdots C_{a_s}^{k_s}}{C_{k_1+\cdots+k_s}^{n}}.$$

Exemplu: Avem un lot de 100 articole, dintre care 80 sînt corespunzătoare, 15 sînt cu defecțiuni remediabile și 5 rebuturi. Alegem 6 articole. Care este probabilitatea ca dintre acestea, 3 să fie bune, 2 cu defecțiuni remediabile și un rebut?

Soluție: Presupunem că extragerile se fac cu repunere. Atunci sîntem în cazul schemei multinomiale, deci:

$$p(6;3,2,1) = \frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} \left(\frac{80}{100}\right)^3 \cdot \left(\frac{15}{100}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{100}\right)^1.$$

Dacă extragerile se fac fără repunere, ne aflăm în cazul schemei geometrice și avem:

$$p_{80,15,5}^{3,2,1} = \frac{C_{80}^3 \cdot C_{15}^2 \cdot C_5^1}{C_{100}^6}.$$

Exerciții

1. Un lot de 50 de procesoare conține 3 defecte. Alegem la întîmplare 10, simultan, și le verificăm. Care este probabilitatea ca 2 să fie defecte?

Indicație: Schema geometrică (fără repunere).

2. (a) Un semnal este transmis pe 3 canale diferite, iar probabilitățile de recepționare corectă sînt 0,9; 0,8 și 0,7. Care este probabilitatea să se recepționeze corect un semnal?

(b) Dar dacă semnalul este transmis pe un canal ales la întîmplare și presupunem că orice canal poate fi ales cu aceeași probabilitate?

Indicație: (a) Schema lui Poisson.

(b) Formula probabilității totale: $\frac{1}{3} \cdot (0,9 + 0,8 + 0,7)$.

3. O urnă conține 2 bile albe și 3 bile negre. Alegem la întîmplare 2 bile, fără repunere. Care este probabilitatea ca acestea să fie ambele negre?

Dar dacă extragerea se face cu repunere?

4. Se testează 5 dispozitive care funcționează în condiții identice, independent și cu randament de 0,9 fiecare. Care este probabilitatea ca exact două să funcționeze?

Indicație: Schema Bernoulli.

5. Se consideră 3 urne: U_1, care conține 5 bile albe și 5 negre, U_2, care conține 4 bile albe și 6 negre și U_3, care conține 4 bile albe și 5 negre. Din fiecare urnă se extrag cu repunere cîte 5 bile.

Care este probabilitatea ca din 2 urne să obținem cîte 2 bile albe și 3 negre, iar din a treia urnă să obținem o altă combinație?

Indicație: Schema Poisson sau Bernoulli, după cazuri (cu/fără repunere).

6. Se consideră urnele din problema precedentă. Din fiecare urnă se extrage cîte o bilă. Dacă se repetă experiența de 5 ori, care este probabilitatea ca de 3 ori să se obțină o bilă albă și 2 negre?

Indicație: Schema Poisson.

7. Fie 8 canale de transmisie a informației care funcționează independent. Presupunem că un canal este activ cu probabilitatea 1/3.

Să se calculeze probabilitatea ca la un moment dat să fie mai mult de 6 canale active.

Indicație: Schema Bernoulli.