Seminar 11
Spații de probabilitate

Noțiuni teoretice

Trecem acum la studiul probabilităților într-un context mai abstract decît în liceu, unde se defineau și studiau evenimentele aleatoare concret.

Definiţie 1: Se numește *spațiu (cîmp) discret de probabilitate* o mulțime finită sau numărabilă $\Omega = (\omega_n)_n$, împreună cu un șir $(p_n)_n$, cu $0 \leqslant p_n \leqslant 1$, care satisface condiția $\sum_n p_n = 1$.

Orice submulțime $A \subseteq \Omega$ este un *eveniment*, căruia i se atașează o probabilitate

$$P(A) = \sum_{\omega_n \in A} p_n.$$

Intuitiv, putem privi elementele mulțimii Ω drept *experiențe*, pe care le putem colecta în *evenimente*, iar p_n este probabilitatea ca o experiență să se realizeze.

Alte definiții elementare sînt următoarele:

Definiţie 2: *Evenimentul sigur* este un eveniment care se realizează cu certitudine la fiecare repetare a experienței.

Evenimentul imposibil nu se produce la nicio efectuare a experienței.

Dat un eveniment $A \subseteq \Omega$, lui i se asociază *evenimentul contrar*, notat $\overline{A}$, CA sau A^c, care constă în nerealizarea lui A.

Două evenimente $A, B \subseteq \Omega$ se numesc *compatibile* dacă se pot produce simultan și *incompatibile* în caz contrar.

Pentru evenimente incompatibile, avem o definiție alternativă, calculatorie:

Definiţie 3: Dacă A și B sînt evenimente incompatibile, atunci:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Mai general, pentru orice șir (A_n) de evenimente două cîte două incompatibile, avem:

$$P\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n).$$

Definiția abstractă a contextului în care vom studia teoria probabilităților urmează.

Definiţie 4: Se numește *spațiu de probabilitate* un triplet $(\Omega, \mathcal{K}, P)$, unde Ω este o mulțime de evenimente elementare (individuale), $\mathcal{K}$ este o submulțime a $\mathcal{P}(\Omega)$, iar $P : \mathcal{K} \to [0, 1]$ este o funcție de probabilitate, care satisface:

- $P(\Omega) = 1$;

- $P\Big(\bigcup_{n\geqslant 0} A_n\Big) = \sum_{n\geqslant 0} P(A_n)$, pentru orice șir (A_n) de evenimente două cîte două incompatibile.

Pornind de la această definiție generală, putem obține cazuri particulare cunoscute:

Definiția clasică a probabilității: Dacă Ω este o mulțime cu N elemente, putem defini un spațiu discret de probabilitate, definind $p_n = \frac{1}{N}$, pentru orice $n \in \{1, \dots, N\}$. În acest caz, probabilitățile sînt egale pentru toate evenimentele, deci spunem că *evenimentele sînt echiprobabile*. Pentru orice eveniment $A \subseteq \Omega$, avem:

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)},$$

care coincide cu definiția clasică a raportului dintre numărul cazurilor favorabile unui eveniment și numărul cazurilor posibile.

Probabilități geometrice: Dacă luăm $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ o submulțime oarecare, pe care considerăm *măsura Lebesgue* (cea cu ajutorul căreia calculăm integralele), atunci obținem un spațiu de probabilitate definind pentru orice eveniment A probabilitatea prin:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)},$$

unde μ este măsura Lebesgue din $\mathbb{R}^n$ (în particular, e vorba de lungimea dl pe $\mathbb{R}$, aria $dA = dxdy$ din $\mathbb{R}^2$ etc.).

Următoarele sînt proprietăți elementare ale probabilităților:

Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un spațiu de probabilitate.

(1) Dacă $A, B \in \mathcal{K}$ și $A \subseteq B$, atunci $P(B - A) = P(B) - P(A)$;

(2) **Poincaré**: Fie n evenimente arbitrare $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{K}$. Atunci are loc:

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i\neq j} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1, \dots, A_n).$$

(3) Pentru orice șir crescător de evenimente $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots$, avem:

$$P\Big(\bigcup_{n\geqslant 0}\Big) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Definiţie 5: Evenimentele A și B se numesc *independente* dacă $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

În general, evenimentele $A_1, \dots, A_n$ se numesc *independente în ansamblu* dacă pentru orice $m \geqslant n$ și $1 \leqslant j_1 \leqslant \dots \leqslant j_m \leqslant n$, avem:

$$P(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_m}) = P(A_{j_1}) \cdots P(A_{j_m}).$$

Observaţie 1: Dacă avem n evenimente independente două cîte două (cf. primei părți a definiției de mai sus), nu rezultă neapărat că sînt evenimente în ansamblul lor (cf. părții a doua a definiției).

Un contraexemplu, datorat lui S. N. Bernstein este următorul. Considerăm un tetraedru omogen cu fețele colorate alb, negru, roșu, iar a patra, cu toate cele trei culori. Aruncăm acest corp și notăm cu A_i probabilitatea ca tetraedrul să se așeze (cu baza) pe fața cu numărul $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Aceste evenimente sînt elementare și $P(A_i) = \frac{1}{4}, \forall i$. Acum fie $A = A_1 \cup A_2$, $B = A_1 \cup A_3$ și $C = A_1 \cup A_4$. Atunci $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$, deoarece pentru fiecare culoare sînt 4 cazuri posibile și 2 favorabile (fața cu culoarea respectivă și fața cu toate culorile).

În plus, avem:

$$P(A \cap B) = P(B \cap C) = P(C \cap A) = \frac{1}{4},$$

deci evenimentele sînt independente două cîte două.

În plus, avem:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A_1) = \frac{1}{4}$$
$$P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8},$$

deci evenimentele nu sînt independente în ansamblul lor.

Mai avem nevoie de următorul concept:

Definiție 6: Fie A și B două evenimente, cu $P(B) \neq 0$.
Probabilitatea lui A *condiționată de* B, notată $P(A/B)$ sau $P_B(A)$ se definește prin:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

De asemenea, în calcule, vom mai folosi:

Formula de înmulțire a probabilităților: Fie $A_1, \dots A_n$ evenimente. Atunci are loc:

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n/A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Formula probabilității totale: Dacă avem descompunerea evenimentului sigur Ω în reuniunea de n evenimente incompatibile $H_1, \dots H_n$, atunci pentru orice eveniment $A \in \mathcal{K}$, are loc:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/H_i) \cdot P(H_i).$$

Formula lui Bayes: În contextul și cu notațiile de mai sus:

$$P(H_j/A) = \frac{P(A/H_j) \cdot P(H_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A/H_i) \cdot P(H_i)}.$$

În particular, pentru două evenimente A, B, avem:

$$P(A) = P(A/B) \cdot P(B) + P(A/B^c) \cdot P(B^c)$$
$$P(B/A) = \frac{P(A/B) \cdot P(B)}{P(A/B) \cdot P(B) + P(A/B^c) \cdot P(B^c)}.$$

Exerciții

Calcul „clasic“

1. Într-un spațiu de probabilitate se considerăm evenimentele A, B, cu:

$$P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{4}, P(A \cap B) = \frac{1}{6}.$$

Determinați $P(A^c), P(A^c \cup B), P(A \cup B^c), P(A^c \cup B^c), P(A^c \cap B^c)$.

2. Care dintre următoarele evenimente rezultate în urma aruncării cu zarul este mai probabil:

(a) obținerea numărului 6 în cel puțin una din 4 aruncări;

(b) obținerea cel puțin a unei duble de 6 în 24 aruncări cu 2 zaruri?

3. O urnă conține 12 bile numerotate de la 1 la 12. Să se determine probabilitatea ca bilele numerotate cu $5, 7, 11$ să iasă la extragerile cu numărul de ordine $5, 7, 11$.

Soluție: Cazurile posibile sînt 12! la număr.

Cazurile favorabile sînt 9!, deoarece dacă fixăm de fiecare dată bilele cu numerele $5, 7, 11$, rămîn 9! libere.

Rezultă $P = \frac{9!}{12!} = \frac{1}{1320}$.

4. O urnă conține 50 bile, dintre care 10 sînt negre, iar restul albe. Se scot la întîmplare 5 bile. Care e probabilitatea ca între cele 5 bile să fie bile negre?

Indicație: Se calculează mai ușor probabilitatea evenimentului complementar.

5. Coeficienții întregi ai ecuației $ax^2 + bx + c = 0$ sînt obținuți prin aruncarea unui zar de 3 ori. Să se determine probabilitatea ca rădăcinile ecuației să fie reale.

Indicație: Calculăm clasic probabilitatea ca $\frac{b^2}{4} \geqslant ac$, unde $a, b, c \in \{1, 2, \dots, 6\}$.

6. Într-o cameră întunecoasă se găsesc 5 perechi de pantofi. Se aleg la întîmplare 5 pantofi.

(a) Care este probabilitatea ca între cei 5 pantofi aleși să fie cel puțin o pereche, în ipoteza că cele 5 perechi sînt identice (deci este suficient să avem un pantof stîng și unul drept)?

(b) Care e probabilitatea ca între cei 5 pantofi aleși să fie cel puțin o pereche, dacă toate cele 5 perechi sînt distincte (culoare, număr)?

7. **Problema aniversării:** Într-o cameră sînt k persoane. Care este probabilitatea ca cel puțin două din aceste persoane să aibă aceeași zi de naștere, adică aceeași zi și lună a anului?

8. Se aruncă 3 zaruri. Calculați probabilitatea ca suma punctelor obținute să fie:

(a) mai mică decît 8;

(b) mai mare decît 7;

(c) egală cu 12.

9. Un scafandru are 2 sisteme de oxigen independente. Presupunem că probabilitatea ca primul sistem să funcționeze este 0,9, iar probabilitatea ca al doilea sistem să funcționeze este 0,8.

(a) Găsiți probabilitatea ca niciun sistem să nu se defecteze;

(b) Găsiți probabilitatea ca cel puțin unul din sisteme să funcționeze.

Soluție: Fie $S_{1,2}$ evenimentul ca sistemul $1, 2$ să funcționeze. (a) Cum evenimentele sînt independente, avem:

$$P(S_1 \cap S_2) = P(S_1) \cdot P(S_2) = 0,72.$$

(b)

$$P(S_1 \cup S_2) = P(S_1) + P(S_2) - P(S_1 \cap S_2) = 0,98.$$

Probabilități geometrice

10. Care este probabilitatea ca suma a 3 numere din intervalul $[0, a]$ alese la întîmplare să fie mai mare decît a?

Soluție: Spațiul de probabilitate este $\Omega = [0, a]^3$. Evenimentul cerut este dat de punctele mulțimii:

$$E = \{(x, y, z) \in \Omega \mid x + y + z \geqslant a\}.$$

Alegem un sistem ortogonal de axe și Ω devine un cub de latură a situat în primul octant. În acest caz, E este una din regiunile lui Ω separate de planul $x + y + z = a$. Rezultă:

$$P(E) = \frac{a^3 - \frac{a^3}{2}}{a^3} = \frac{1}{2}.$$

11. Pe un plan orizontal considerăm un sistem de axe XOY și mulțimea E a punctelor cu coordonate întregi. O monedă cu diametrul $\frac{1}{2}$ este aruncată la întîmplare pe acest plan. Care e probabilitatea ca moneda să acopere un punct din E?

Soluție: Fie $C(x_0, y_0)$ cel mai apropiat punct din E de centrul monedei, deci coordonatele lui M sînt de forma:

$$(x_0 + x, y_0 + y), \quad -\frac{1}{2} < x, y < \frac{1}{2}.$$

Spațiul de probabilitate este:

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{1}{2} < x, y < \frac{1}{2}\right\}.$$

Mulțimea evenimentelor favorabile este dată de:

$$A = \left\{(x, y) \in \Omega \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \frac{1}{16}\right\},$$

deoarece raza monedei este $\frac{1}{4}$.

Rezultă:

$$p = \frac{\text{aria}(A)}{\text{aria}(\Omega)} = \frac{\pi}{16}.$$

12. Se alege aleatoriu un număr real x în intervalul $[0, 3]$. Care este probabilitatea ca x să fie mai apropiat de 0 decît de 1?

Soluție: Interpretînd problema geometric, ne putem gîndi la x ca fiind un punct pe axa reală. Atunci cazurile favorabile se află în segmentul $[0; 0,5)$, iar cazurile posibile sînt pe tot segmentul.

Probabilitatea, calculată cu formula geometrică, este dată de raportul lungimilor celor două segmente:

$$P = \frac{0,5}{3} = \frac{1}{6} \simeq 17\%.$$

13. Se trage cu o săgeată la o țintă circulară de rază r. Care este probabilitatea ca săgeata să ajungă mai aproape de centru decît de margine?

Soluție: Aria cercului, care ne dă și „cazurile posibile", este πr^2.

Cazurile favorabile se află în cercul concentric de rază $< \frac{r}{2}$, care are aria $\frac{\pi r^2}{4}$. Atunci:

$$P = \frac{1}{4}.$$

14. **Problema autobuzului (cu așteptare):** Să presupunem că ajungeți în stația de autobuz la o oră aleatorie din intervalul 12 și 1. Așteptați 20 minute în stație, iar dacă autobuzul nu vine, plecați. Același „program" îl are și autobuzul, dar cu condiția că așteaptă 5 minute în stație, apoi pleacă.

Care este probabilitatea să prindeți autobuzul?[1]

Soluție: Avem două variabile independente: momentul în care ajungeți în stație și momentul în care autobuzul ajunge. Deci putem modela problema bidimensional. Mai precis, să luăm un pătrat cu latura de 60 de unități (1/minut) și-i notăm laturile cu c și a („călător" și „autobuz").

Remarcăm că avem cazurile (cf. Figura 1):

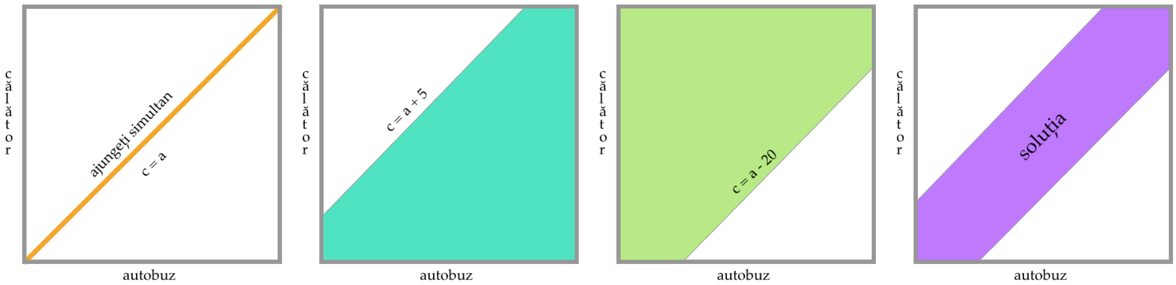
- Pentru a prinde autobuzul la fix, ar trebui să ne situăm pe segmentul $a = c$;
- Cum autobuzul așteaptă 5 minute, de fapt putem să ne situăm în zona $c \leqslant a + 5$, *nețințînd seama de faptul că și călătorul așteaptă (deocamdată)!*;

[1] Mai multe exemple și explicații puteți găsi, de exemplu, aici.

- Cum călătorul așteaptă 20 minute, ne situăm în zona $c \geqslant a - 20$ (*nețiînd seama că și autobuzul așteaptă!*);
- Luînd toate restricțiile în considerare, ne interesează, de fapt, zona dintre cele două puncte anterioare, deci sub segmentul $c = a + 5$ și deasupra lui $c = a - 20$.

Acum trebuie doar să calculăm aria zonei corespunzătoare și să o împărțim la aria pătratului:

$$P = \frac{60^2 - \frac{55^2}{2} - \frac{40^2}{2}}{60^2} \simeq 36\%.$$



(a) $c = a$ (b) $c \leqslant a + 5$ (c) $c \leqslant b - 20$ (d) Soluția

Figura 1: *Problema autobuzului (cu așteptare)*

15. Trei persoane aleg la întîmplare un număr real între 0 și 1. Care este probabilitatea ca suma pătratelor numerelor alese de ei să nu depășească 1?

Soluție: Pentru a modela problema geometric, e clar că o putem gîndi ca pe alegerea unui punct din cubul unitate, $(x, y, z) \in [0, 1]^3$. Cazurile posibile sînt, atunci, date de volumul cubului, care este 1.

Pentru cazurile favorabile, avem nevoie de $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$, care este sfera unitate. Dar, cum ne interesează doar alegerile de numere pozitive, i.e. partea din sferă care se găsește în interiorul cubului, adică $\frac{1}{8}$ din ea.

Avem, deci:

$$P = \frac{\frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi \cdot 1^3}{3}}{1} \simeq 52\%.$$

Mult mai multe exemple sofisticate de probabilități geometrice se pot găsi la Wolfram MathWorld.