Seminar 9
Extremele funcțiilor de mai multe variabile
Metoda celor mai mici pătrate.

1 Extreme în mai multe dimensiuni

Pornim cu următoarea:

Definiţie 1.1: Fie $f : A \to \mathbb{R}$, cu $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Un punct $a \in A$ se numește *punct critic* pentru f dacă f este diferențiabilă în a și $df(a) = 0$, adică $\frac{\partial f}{\partial x_k} = 0$, pentru orice $k = 1, \dots, n$.

Rezultă de aici că punctele de extrem local ale lui f sînt printre soluțiile sistemului:

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_n) = 0 \right\}_k.$$

În studiul naturii punctelor critice pentru o funcție f, pașii de urmat sînt:

(1) Se determină punctele critice, din anularea derivatelor parțiale;

(2) Fie a un punct critic. Se calculează matricea hessiană corespunzătoare, adică $H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{i,j}$;

(3) Se calculează valorile proprii ale lui H:

   (a) Dacă toate valorile proprii sînt pozitive, a este un minim local;

   (b) Dacă toate sînt negative, a este un maxim local;

   (c) Dacă valorile proprii nu au semn uniform, a nu este de extrem;

   (d) Dacă 0 este valoare proprie, nu se poate decide. Astfel, se dezvoltă în serie Taylor a lui f în jurul lui a, de unde se calculează semnul diferenței $f(x) - f(a)$.

Pentru cazul bidimensional ($n = 2$), avem o metodă simplificată:

(1) Se determină punctele de extrem din sistemul:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0;$$

(2) Fie $a = (a_1, a_2)$ un asemenea punct critic. Calculăm numerele:

$$r_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a_1, a_2)$$
$$s_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a_1, a_2)$$
$$t_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a_1, a_2).$$

Observăm că avem:

$$d^2 f(a_1, a_2) = r_0 dx^2 + 2 s_0 dx dy + t_0 dy^2.$$

   (a) Dacă $r_0 > 0$ și $r_0 t_0 - s_0^2 > 0$, atunci a e punct de minim local;

   (b) Dacă $r_0 < 0$ și $r_0 t_0 - s_0^2 > 0$, atunci a e punct de maxim local;

(c) Dacă $r_0 t_0 < 0$, atunci a nu este punct de extrem local;

(d) Dacă $r_0 t_0 - s_0^2$, atunci studiem semnul $f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2)$ prin dezvoltare în serie Taylor.

Dezvoltarea în serie Taylor pentru o funcție de două variabile reale în jurul punctului $a = (x_0, y_0)$ este dată de formula:

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= f(a) + \frac{1}{1!}\Big[(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(a) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(a)\Big] \\
&+ \frac{1}{2!}\Big[(x-x_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) + 2(x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) + (y-y_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)\Big] + \\
&+ \frac{1}{3!}\Big[(x-x_0)^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a) + 3(x-x_0)^2(y-y_0)\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(a) + 3(x-x_0)(y-y_0)^3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(a) + (y-y_0)^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a) \\
&+ \dots
\end{aligned}$$

Observaţie 1.1: În cazul în care se impun constrîngeri pentru domeniul de definiție a funcției, se studiază separat problema punctelor de extrem în interiorul domeniului, precum și pe frontieră.

2 Regresia liniară

Regresia liniară se adresează unor probleme de tip statistic, atunci cînd avem la dispoziție o serie de date experimentale, pe care trebuie să le corelăm cu un model teoretic *liniar*.

Așadar, date o serie de perechi de puncte de forma (x_i, y_i), care reprezintă datele colectate într-un experiment care verifică o teorie bazată pe ecuații liniare, ne punem problema găsirii celei mai potrivite drepte care să prezinte o abatere minimă față de punctele colectate (eng. "best fit").

Fie, așadar, dreapta $y = f(x) = ax + b$ modelul teoretic pe care îl studiem. Dacă (x_i, y_i) reprezintă colecția de puncte experimentale, atunci vom minimiza abaterea lor de la funcția f prin intermediul *metodei celor mai mici pătrate*. Vom impune, așadar, ca suma pătratelor distanțelor de la punctele colectate la dreapta teoretică să fie minimă.

În expresia $f(x) = ax + b$, necunoscutele sînt a și b, deoarece ele determină dreapta experimentală pe care o căutăm. Așadar, putem privi f ca pe o funcție de variabilele a și b. Scriem, deci, expresia corespunzătoare celor mai mici pătrate:

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - y_i]^2.$$

Această funcție se dorește minimizată, așadar problema revine la găsirea punctelor de minim pentru ea.

Se studiază punctele critice cu metoda din secțiunea de mai sus, apoi se găsesc punctele (a, b) care să fie de minim.

În fine, *dreapta de regresie* este $y = ax + b$.

Se poate face și *calculul erorilor*, folosind variabilele:

$$\begin{aligned}
S_r &= \sum_i (y_i - b - ax_i)^2 \\
S_t &= \sum_i (y_i - \overline{y})^2,
\end{aligned}$$

unde $\overline{y}$ este media (aritmetică) a valorilor y_i experimentale.

În fine, se pot calcula *eroarea standard* a estimării și, respectiv, abaterea medie pătratică:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{S_r}{n-2}}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{S_t}{n-1}}.$$

3 Exerciții

1. Fie funcția:

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y + 3.$$

Determinați punctele de extrem și calculați valorile funcției în aceste puncte.

2. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy$.

(a) Pentru $D = \mathbb{R}^2$, determinați punctele de extrem și calculați valorile funcției în aceste puncte;

(b) Pentru $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \geqslant 5\}$, determinați valoarea minimă și maximă a funcției.

Indicație (b): Considerați funcțiile $g_1(x) = f(x, 0), g_2 = f(0, y)$ și apoi funcția $g_3 = f(x, 5 - x)$, cărora le găsiți punctele de extrem.

3. Fie $f : D \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = 3xy^2 - x^3 - 15x - 36y + 9$.

(a) Pentru $D = \mathbb{R}^2$, determinați punctele de extrem și calculați valorile funcției în aceste puncte;

(b) Pentru $D = [-4, 4] \times [-3, 3]$ determinați valoarea minimă și valoarea maximă a funcției.

Indicație (b): Considerați funcțiile $f(x, -3), f(4, y), f(x, 3), f(-4, y)$.

4. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$.

(a) Pentru $D = \mathbb{R}^2$, determinați punctele de extrem și calculați valorile funcției în aceste puncte;

(b) Pentru $D = [-1, 2] \times [0, 2]$, determinați valoarea minimă și maximă a funcției.

5. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = x^3 + 3x^2y - 15x - 12y$.

(a) Pentru $D = \mathbb{R}^2$, determinați punctele de extrem și calculați valorile funcției în aceste puncte;

(b) Pentru $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, 3y + x \leqslant 3\}$ determinați valoarea minimă și valoarea maximă a funcției.

6. Determinați valorile extreme pentru funcțiile f, definite pe domeniile D, unde:

(a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy, D = \mathbb{R}^2$;

(b) $f(x, y) = xy(1 - x - y), D = [0, 1] \times [0, 1]$;

(c) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2, D = (-\infty, 0) \times (0, \infty)$;

(d) $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 2xy, D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geqslant 0, y + 2x \leqslant 2\}$;

(e) $f(x, y) = x^4 + y^3 - 4x^3 - 3y^2 + 3y, D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}$.

7. Să se determine dreapta de regresie care mediază printre punctele $M_1(1,2), M_2(2,0), M_3(3,1)$.

8*. Dintre toate paralelipipedele dreptunghice cu volum constant 1, determinați pe cel cu aria totală minimă.