Seminar 7
Recapitulare

Serii numerice

1. Decideți convergența seriilor cu termenul general dat de:

(a) $x_n = \frac{\sqrt{7n}}{n^2+3n+5}$ (C, comparație);

(b) $x_n = \frac{2^{\frac{1}{n}}}{n^2}$; (C, comparație sau integral);

(c) $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}\right)$; (C, comparație);

(d) $x_n = \frac{1}{n^a} \ln\left(1 + \frac{1}{n^b}\right), a, b \in \mathbb{R}$; (comparație, $a + b?1$);

(e) $x_n = \frac{\arctan n}{n^2+1}$; (C, comparație sau integral)

(f) $x_n = \frac{1}{n - \ln n}$; (D, comparație)

(g) $x_n = \left(\sqrt{n^2+1+an} - n\right)^n, a \geqslant 0$; (radical, $a?2$);

(h) $x_n = \frac{(-1)^n \ln n}{\sqrt{n}}$; (C, Leibniz)

(i) $x_n = \left(\frac{an+1}{bn+1}\right)^n, a, b > 0$. (radical, $a?b$).

2. Studiați convergența absolută și semiconvergența pentru seriile cu termenul general dat de:

(a) $x_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$; (D, amplifică cu conjugata)

(b) $x_n = \frac{1}{n^2} \sin n$; (AC, comparație)

(c) $x_n = \frac{a+(-1)^n\sqrt{n}}{n}, a \in \mathbb{R}$. ($a = 0$, SC [Leibniz], $a \neq 0$ desparte în două)

Șiruri de funcții

3. Studiați convergența simplă și convergența uniformă pentru șirurile de funcții:

(a) $f_n : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{e^{nx}-1}{e^{nx}+1}$;

(b) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = \arctan \frac{x}{1+n(n+1)x^2}$;

(c) $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}, f_n(x) = x^n e^{-nx}$;

4. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{n+x^5} dx$.

5. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \sin \frac{x}{n+1} - \sin x dx$.

6. Verificați dacă șirul de funcții

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{\sin nx}{n^2}$$

poate fi derivat termen cu termen.

Serii de funcții (Seria B)

7. Studiați convergența seriilor de funcții:

(a) $\sum \frac{nx}{1+n^5x^2}, x \in \mathbb{R}$; (Weierstrass);

(b) $\sum \arctan \frac{2x}{x^2+n^4}, x \in \mathbb{R}$; (Weierstrass);

(c) $\sum \frac{\sin nx}{2^n}, x \in \mathbb{R}$; (Weierstrass);

(d) $\sum \left(\sin \frac{x}{n+1} - \sin \frac{x}{n} \right)$; (șirul sumelor parțiale);

(e) $x + \sum \left(\frac{x}{1+nx} - \frac{x}{1+(n-1)x} \right), 0 \leqslant x \leqslant 1$; (șirul sumelor parțiale).

Spații metrice (Seria B)

8. Aproximați cu o eroare de maxim $\varepsilon = 10^{-2}$ soluția reală a ecuațiilor:

(a) $x^3 + 3x + 2 = 0$;

(b) $x^3 + 4x - 1 = 0$;

(c) $x^3 + 12x - 1 = 0$;

(d) $x^3 + x^2 - 6x + 1 = 0$.

Serii Taylor, serii de puteri (Seria A)

9. Găsiți dezvoltarea în serie Maclaurin și domeniul de convergență pentru funcțiile:

(a) $f(x) = \sin x$;

(b) $f(x) = \cos x$;

(c) $f(x) = \arctan x$;

(d) $f(x) = \ln(x+1)$;

(e) $f(x) = (x+1)^a, a \in \mathbb{R}$;

(f) $f(x) = \frac{1}{x+1}$;

(g) $f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}$;

(h) $f(x) = \int_0^x \frac{\arctan t}{t} dt$;

(i) $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$.

10. Calculați, cu o eroare de maxim $\varepsilon = 10^{-2}$ integralele:

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(x+1)}{x}$;

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{\sin x}{x}$;

(c) $\displaystyle\int_0^1 \cos t^2 dt$.

11. Găsiți raza și domeniul de convergență pentru seriile:

(a) $\sum x^n$;

(b) $\sum n^n x^n$;

(c) $\sum (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$;

(d) $\sum \frac{n^n x^n}{n!}$;

(e) $\sum \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2+2}{n+2}} x^n$;

(f) $\sum \frac{(x-1)^{2n}}{n \cdot 9^n}$;

(g) $\sum \frac{(x+3)^n}{n^2}$;

(h) $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-2)^{2n}$.

12. Găsiți mulțimea de convergență și suma seriei:

$$\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Indicație: $R = 1$ (raport), iar suma se află derivînd termen cu termen. Rezultă (prin derivare) seria geometrică de rază $-x^2$, cu suma $\frac{1}{1+x^2}$, pentru $|x| < 1$. Atunci $f(x) = \arctan x + c$ etc.

13. Să se arate că seria numerică $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{3n+1}$ este convergentă și să se afle suma ei, folosind serii de puteri.

Soluție: Seria satisface criteriul lui Leibniz pentru serii numerice alternate, deci este convergentă.
Pentru a găsi suma, considerăm seria de puteri $\sum (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$.
Raza de convergență este $R = 1$, deci intervalul de convergență este $(-1, 1)$.
Pentru $x = 1$, avem seria dată. Fie f suma acestei serii de puteri în intervalul $(-1, 1)$.
Derivăm termen cu termen și obținem:

$$f'(x) = \sum (-1)^n x^{3n} = \frac{1}{1+x^3},$$

pentru $|x| < 1$, ca suma unei serii geometrice alternate.

Rezultă:

$$f(x) = \int \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c,$$

pentru $|x| < 1$. Pentru $x = 0$, găsim $c = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$. Rezultă:

$$f(x) = \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}},$$

pentru $|x| < 1$.

Așadar, seria inițială este $f(1) = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

14. Să se afle suma seriilor:

(a) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{(n+1)^2}{n!}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{n^2(3^n - 2^n)}{6^n}$

Indicații: (a) Folosiți seria pentru e^x, din care obțineți seria pentru $(x + x^2)e^x$, pe care apoi o derivați termen cu termen.

Pentru $x = 1$ se obține seria cerută, cu suma $5e$.

(b) Descompunem seria în două, apoi folosim seria de puteri $\sum n^2 x^n$, pe care o derivăm termen cu termen, pentru a obține seria pentru nx^{n-1}, apoi seria pentru nx^n.

15. Folosind seriile Taylor, calculați, cu o eroare de maxim $\varepsilon = 10^{-3}$, numerele:

(a) $\sin 2$;

(b) $\sqrt[5]{7}$;

(c) $\arctan 4$;

(d) $\ln 3$;

Mulțimi numărabile (seria A)

16. Care din următoarele mulțimi sînt numărabile?

(a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists t \in \mathbb{Q}, x^2 = t\}$;

(b) $B = \{z \in \mathbb{C} \mid z^{10} = 1\}$;

(c) $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$;

(d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists t \in \mathbb{Q}, x = \ln t\}$;

(e) $E = \{x \in [0, 2\pi] \mid \sin x = \frac{\sqrt{3}}{3}\}$;

(f) $F = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x = \frac{\sqrt{3}}{3}\}$.