Seminar 6
Mulțimi numărabile și nenumărabile

1 Aspecte teoretice

Din punct de vedere al cardinalului (numărului de elemente), mulțimile pot fi *finite* sau *infinite*. Mulțimile infinite, la rîndul lor, se împart în mulțimi *numărabile* și mulțimi *nenumărabile*.

Definiţie 1.1: Intuitiv, o mulțime se numește *numărabilă* dacă elementele sale pot fi enumerate.

Formal, o mulțime X se numește *numărabilă* dacă există o bijecție $f : X \to \mathbb{N}$, unde $\mathbb{N}$ este mulțimea numerelor naturale.

O mulțime se numește *cel mult numărabilă* dacă este finită sau numărabilă.

Pentru o mulțime infinită (numărabilă sau nu), se poate demonstra următorul rezultat:

Teoremă 1.1: *O mulțime este infinită dacă și numai dacă există o bijecție între ea și o submulțime proprie a ei.*

De exemplu, între $\mathbb{N}$ și mulțimea numerelor naturale pare există bijecția $f(x) = 2x$, ceea ce ne arată că $\mathbb{N}$ este infinită.

Vom nota cardinalul mulțimii numerelor naturale cu $\aleph_0$ (*alef* zero).

Se poate arăta că: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$, dar $|\mathbb{R}| \neq \aleph_0$.

Mai mult, folosind *argumentul diagonal al lui Cantor* (v. cursul sau alte resurse), putem arăta că $\mathbb{R}$ este *nenumărabilă*. Și mai mult, chiar se poate arăta (ceva mai greu) că $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$.

Următorul rezultat ne arată cum putem decide dacă o mulțime este numărabilă sau nu:

Teoremă 1.2: *Fie* X *și* Y *două mulțimi nevide și fie funcția* $f : X \to Y$.

(a) Dacă X *și* Y *sînt numărabile, atunci* $X \cup Y$ *este numărabilă;*

(b) Mai general, o reuniune numărabilă de mulțimi numărabile este numărabilă;

(c) Dacă f *este injectivă, iar* Y *este numărabilă, atunci* X *este numărabilă;*

(d) Mai general, dacă f *este injectivă, atunci* $|X| \leqslant |Y|$;

(e) Dacă f *este surjectivă, iar* X *este numărabilă, atunci* Y *este numărabilă;*

(f) Mai general, dacă f *este surjectivă, atunci* $|X| \geqslant |Y|$;

(g) Dacă f *este bijectivă, atunci* $|X| = |Y|$.

(h) Produsul cartezian $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *este numărabil;*

(i) Mai general, un produs cartezian finit *de mulțimi numărabile este numărabil;*

(j) Un produs cartezian infinit de mulțimi (cel mult) numărabile este nenumărabil *(v. argumentul lui Cantor, varianta cu* $\{0, 1\}$*).*

Așadar, pentru a verifica dacă o mulțime este numărabilă, trebuie să judecăm cu ajutorul funcțiilor.

2 Exerciții

Decideți care din următoarele mulțimi sînt numărabile:

(a) $A = \{\frac{m^2+n^2}{2} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$;

(b) $B = \{\frac{x^2+i\sqrt{x}}{2} \mid x \in [0,\infty) \cap \mathbb{Q}\}$;

(c) $C = \{f : \mathbb{N} \to \{0,1\}\}$;

(d) $D = \{f : \{0,1,\dots,9\} \to \mathbb{Q}\}$;

(e) $E = \{(b_0, b_1, \dots) \mid b_i \in \{x, y, z\}, \forall i\}$;

(f) $F = \{it \mid t \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}\}$.

(g) $G = \{\frac{n+\sqrt{n^2+1}}{2} \mid n \in \mathbb{Q} \cap [0,\infty)\}$;

(h) $H = \{\frac{1-i\sqrt{n}}{2} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$;

(i) $I = \{\frac{m^2+\sqrt{n}}{2} \mid m, n \in \mathbb{Q}_+\}$;

(j) $J = \{n \in \mathbb{Z} \mid 5 \nmid n, 7 \mid n\}$;

(k) $K = \{\frac{m^2+i\sqrt{3}}{n^2+1} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$;