Seminar 6
Șiruri și serii de funcții

1. Să se arate că șirul de funcții (f_n), unde:

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{n} \arctan x^n$$

converge uniform pe $\mathbb{R}$, dar:

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)'_{x=1} \neq \lim_{n\to\infty} f'_n(1).$$

Rezultatele diferă deoarece șirul derivatelor nu converge uniform pe $\mathbb{R}$.

2. Să se studieze convergența punctuală și uniformă a șirului de funcții (f_n), cu

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = nxe^{-nx^2}.$$

Să se arate că:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

Rezultatul se explică prin faptul că șirul nu este uniform convergent.

De exemplu, pentru $x_n = \frac{1}{n} \in [0,1]$, avem $f_n(x_n) \to 1$, dar în general $f_n(x) \to 0$ (simplu).

1 Convergența seriilor de funcții

Definiţie 1.1: Seria $\sum f_n$ este *simplu (punctual) convergentă către funcția* f dacă șirul sumelor parțiale $(S_n(x))_n$ este simplu (punctual) convergent către f.

Seria este *uniform convergentă către funcția* f dacă șirul sumelor parțiale $(S_n(x))_n$ este uniform convergent către f.

Seria $\sum f_n$ este *absolut convergentă* dacă seria $\sum |f_n|$ este simplu convergentă.

Avem următoarele teoreme de derivare și integrare termen cu termen:

Teoremă 1.1: *Fie $\sum f_n$ o serie uniform convergentă de funcții continue $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ și fie s suma acestei serii. Atunci s este o funcție continuă pe $[a,b]$.*

În plus, avem:

$$\int_a^b s(x)dx = \sum_{n\geqslant 1} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Teoremă 1.2: *Fie $\sum f_n$ o serie punctual convergentă de funcții de clasă $C^1([a,b])$, cu suma s pe $[a,b]$ și astfel încît seria derivatelor $\sum f'_n$ să fie uniform convergentă.*

Atunci funcția s este derivabilă pe $[a,b]$ și:

$$s'(x) = \sum_{n\geqslant 1} f'_n(x), \forall x \in [a,b].$$

Criteriile de convergență pentru serii de funcții:

Teoremă 1.3 (Weierstrass)**:** *Fie $\sum f_n$, cu $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ o serie de funcții și fie $\sum a_n$ o serie convergentă de numere reale pozitive.*

Dacă $|f_n(x)| \leqslant a_n, \forall x \in [a,b]$ și pentru orice $n \geqslant N$, cu N fixat, atunci seria de funcții este uniform convergentă pe $[a,b]$.

Definiţie 1.2: Funcțiile f_n se numesc *egal mărginite* dacă există $M \in \mathbb{R}$, astfel încît $f_n \leqslant M, \forall n \in \mathbb{N}$.

Evident, dacă fiecare funcție f_i este mărginită de m_i, putem lua $M = \max_i(m_i)$ și avem egal mărginirea.

Teoremă 1.4 (Abel)**:** *Dacă seria de funcții $\sum f_n$ se poate scrie sub forma $\sum a_n v_n$, astfel încît seria de funcții $\sum v_n$ este uniform convergentă, iar (a_n) este un șir monoton de funcții egal mărginite, atunci ea este uniform convergentă.*

Teoremă 1.5 (Dirichlet)**:** *Dacă seria de funcții $\sum f_n$ se poate scrie sub forma $\sum a_n v_n$ astfel încît șirul sumelor parțiale al seriei $\sum v_n$ să fie un șir de funcții egal mărginite, iar $(a_n)_n$ să fie un șir monoton ce converge uniform către 0, atunci ea este uniform convergentă.*

1.1 Exerciții

3. Să se precizeze convergența seriilor de funcții:

(a) $\sum \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n}), x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$;

(b) $\sum \frac{nx}{1+n^5x^2}, x \in \mathbb{R}$;

(c) $\sum \cancel{\arctan \frac{2x}{x^2+n^4}, x \in \mathbb{R};}$

(d) $\sum \left[e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right] \cdot \frac{\cos nx}{n+1}$;

(e) $\sum \frac{1}{2^n} \cos(3^n x), x \in \mathbb{R}$;

(f) $\sum x^n(1-x), x \in [0,1]$;

(g) $\sum \frac{(x+n)^2}{n^4}, x \in [a,b], 0 < a < b$;

(h) $\sum \frac{\ln(1+nx)}{nx^n}, x > 0$;

Indicații:

(a) $\frac{1}{2^n} \leqslant x^n \leqslant 2^n$, deci seria este $\leqslant \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(2^n + 2^n)$. Arătăm acum (cu criteriul raportului) că seria numerică rezultată este convergentă;

(b) Găsim maximul funcției (care este în $\sqrt{\frac{1}{n^5}}$), deci seria va fi uniform și absolut convergentă, fiind mai mică decît seria convergentă $\sum \frac{1}{2n\sqrt{n}}$;

(c) Similar cu raționamentul anterior;

(d)
$$\left|\left[e - (1 + \frac{1}{n})^n\right]\frac{\cos nx}{n+1}\right| \leqslant \left[(1+\frac{1}{n})^{n+1} - (1+\frac{1}{n})^n\right] \cdot \frac{1}{n+1} < \frac{3}{n(n+1)}.$$

Seria numerică rezultată este acum convergentă, putînd fi comparată cu o serie armonică.

4. Să se studieze convergența seriilor de funcții și să se decidă dacă se pot deriva termen cu termen (indicație: Weierstrass, comparație cu seria armonică):

(a) $\sum n^{-x}, x \in \mathbb{R}$;

(b) $\sum \frac{\sin nx}{2^n}, x \in \mathbb{R}$;

(c) $\sum \frac{\sin nx}{n(n+1)}, x \in \mathbb{R}$;

(d) $\sum(-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}, x \in \mathbb{R}$;

5. Fie seria $\sum \frac{nx^n+x}{n^2+1}$.

(a) Pentru ce valori ale lui $x \in \mathbb{R}$ seria converge?

(b) Să se studieze convergența uniformă.

(c) Se poate deriva seria termen cu termen?

6. Să se stabilească natura seriei $\sum(f_n - f_{n-1})$, dacă:

(a) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = nx(1-x)^n, \forall n \in \mathbb{N}$;

(b) $f_n : (0,1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{e^{nx}}{1+e^{nx}}, \forall n \in \mathbb{N}$.

7. Să se determine mulțimea de convergență pentru următoarele serii de funcții:

(a) $\sum \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^n, x \neq \frac{1}{2}$; (rădăcină pentru seria valorilor absolute)

(b) $\sum(-1)^n \frac{1}{\ln n}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n, x \in \mathbb{R}$; (raport)

(c) $\sum 2^n \sin \frac{x}{3^n}, x \in \mathbb{R}$; (comparație cu $\left(\frac{2}{3}\right)^n$)

(d) $\sum \frac{\ln(1+a^n)}{n^x}, a \geqslant 0$; ($0 < a < 1$ raport, $a = 1$ C, $a > 1$ descompunem în două serii, $a = 0$ C)

(e) $\sum \frac{\sin^n x}{n^a}, a \in \mathbb{R}$. (radical)