Seminar 5
Spații metrice. Serii de funcții

1 Spații metrice

Definiţie 1.1: Fie X o mulțime nevidă. O aplicație $d : X \times X \to \mathbb{R}$ se numește *distanță* (metrică) pe X dacă:

(a) $d(x, y) \geqslant 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$;

(b) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(c) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$;

(d) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (*inegalitatea triunghiului*).

În acest context, perechea (X, d) se numește *spațiu metric*.

Această noțiune vine să generalizeze calculul distanțelor cu ajutorul modulului, cum se procedează în cazul mulțimii numerelor reale, de exemplu. În consecință, avem și următoarele *mulțimi remarcabile în spații metrice* (X, d):

- *bila deschisă de centru* a *și rază* r, definită pentru $a, r \in \mathbb{R}$ prin:

$$B(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) < r\};$$

- *sfera de centru* a *și rază* r, definită prin:

$$S(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) = r\};$$

- *bila închisă de centru* a *și rază* r, definită prin:

$$\overline{B(a, r)} = B(a, r) \cup S(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) \leqslant r\}.$$

Aceste mulțimi generalizează *intervalele de numere reale*. Mai general, avem:

Definiţie 1.2: Fie X un spațiu metric. O submulțime $D \subseteq X$ se numește *deschisă* dacă $\forall a \in D, \exists r > 0$ astfel încît $B(a, r) \subseteq D$. Cu alte cuvinte, mulțimea conține o bilă deschisă, centrată în orice punct al său.

O mulțime se numește *închisă* dacă complementara ei, relativ la spațiul total, este o mulțime deschisă.

Adaptînd noțiunile specifice pentru analiza matematică, precum convergență, limită ș.a.m.d. folosindu-ne de funcția distanță, putem defini construcțiile și conceptele uzuale. În particular, au sens noțiuni precum *șiruri convergente* și *șiruri Cauchy*, definite ca în cazul mulțimii numerelor reale, doar cu ajutorul funcției generale distanță. În plus, avem și următoarea noțiune:

Definiţie 1.3: Un spațiu metric (X, d) se numește *complet* dacă noțiunile de „șir Cauchy“ și „șir convergent“ coincid pentru X.

2 Principiul contracției. Metoda aproximațiilor succesive

Definiţie 2.1: Fie (X, d) un spațiu metric și fie $f : X \to X$ o funcție.

Aplicația f se numește *contracție pe* X dacă există $k \in [0, 1)$ astfel încît:

$$d(f(x), f(y)) \leqslant k \cdot d(x, y), \forall x, y \in X.$$

Numărul k se numește *factor de contracție*.

Un rezultat important este următorul:

Teoremă 2.1 (Banach)**:** *Fie* (X, d) *un spațiu metric complet și fie* $f : X \to X$ *o contracție de factor* k*. Atunci există un unic punct* $\xi \in X$*, astfel încît* $f(\xi) = \xi$*.*

În acest context, ξ *se numește* punct fix *pentru* f*.*

Pentru a găsi punctul fix al unei aplicații, se folosește *metoda aproximațiilor succesive*. Se construiește un șir recurent astfel.

Fie $x_0 \in X$, arbitrar și definim șirul recurent $x_{n+1} = f(x_n)$. Se poate demonstra că șirul x_n este convergent, iar limita sa este punctul fix căutat. În plus, eroarea aproximației cu acest șir este dată de:

$$d(x_n, \xi) \leqslant \frac{k^n}{1-k} \cdot d(x_0, x_1), \forall n \in \mathbb{N}.$$

3 Exemplu rezolvat

Aplicațiile interesante pentru această temă sînt date de calculul aproximativ al soluțiilor unor ecuații, definite în spații metrice.

1. Să se aproximeze cu o eroare mai mică decît 10^{-3} soluția reală a ecuației $x^3 + 4x - 1 = 0$.

Soluție: Folosind, eventual, metode de analiză (șirul lui Rolle), se poate arăta că ecuația are o singură soluție reală $\xi \in (0, 1)$. Folosim metoda aproximațiilor succesive pentru a o găsi.

Fie $X = [0, 1]$ și $f : X \to X, f(x) = \frac{1}{x^2+4}$. Pînă la o translație, ecuația dată este echivalentă cu $f(x) = x$, adică a găsi un punct fix pentru funcția f.

Spațiul metric X este complet. Mai demonstrăm că f este contracție pe X. Derivata este $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+4)^2}$, și avem:

$$\sup_{x \in X} |f'(x)| = -f'(1) = \frac{2}{25} < 1,$$

deci f este o contracție, de factor $k = \frac{2}{25}$.

Șirul aproximațiilor succesive este dat de:

$$x_0 = 0, \quad x_{n+1} = f(x_n) = \frac{1}{x_n^2 + 4}.$$

Evaluarea erorii:

$$|x_n - \xi| < \frac{k^n}{1-k}|x_0 - x_1| = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{25}\right)^n,$$

de unde rezultă că putem lua $\xi \simeq x_3 = f\left(\frac{16}{65}\right) \simeq 0,235$.

Observaţie 3.1: Alternativ, puteam lucra cu $g(x) = \frac{1}{4}(1 - x^3)$, cu $x \in [0, 1]$. Se arată că și g este o contracție, de factor $k = \frac{3}{4}$. În acest caz, șirul aproximațiilor succesive converge mai încet și avem $\xi \simeq x_6$.

Similar, puteți rezolva următoarele ecuații, cu eroarea ε:

(a) $x^3 + 12x - 1 = 0, \quad \varepsilon = 10^{-3}$;

(b) $x^5 + x - 15 = 0, \quad \varepsilon = 10^{-3}$;

(c) $3x + e^{-x} = 1, \quad \varepsilon = 10^{-3}$;

(d) $x^3 - x + 5 = 0, \quad \varepsilon = 10^{-2}$;

(e) $x^5 + 3x - 2 = 0, \quad \varepsilon = 10^{-3}$.

4 Șiruri de funcții

Definiţie 4.1: Fie $(f_n)_n$ un șir de funcții, cu fiecare $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ și fie o funcție $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Spunem că șirul (f_n) *converge punctual* pe $[a, b]$ către f pentru $n \to \infty$, scris $f_n \xrightarrow{PC} f$ dacă avem $f_n(x_0) \to f(x_0)$, pentru orice $x \in [a, b]$.

Spunem că șirul (f_n) *converge uniform* pe $[a, b]$ către f, scris $f_n \xrightarrow{UC} f$, dacă:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \forall n \geqslant N_\varepsilon, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in [a, b].$$

În calcule, va fi de folos următorul rezultat:

Teoremă 4.1: *Un șir (f_n) de funcții mărginite $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ este uniform convergent către o funcție f dacă și numai dacă $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$.*

De asemenea, avem și:

Teoremă 4.2: *Orice șir de funcții $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ uniform convergent pe $[a, b]$ este punctual convergent pe $[a, b]$.*

Reciproca acestui rezultat este falsă: fie $[a, b] = [0, 1]$ și $f_n(x) = x^n, n \geqslant 1$.

Pentru orice $x \in [a, b]$, avem:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Rezultă că $f_n \xrightarrow{PC} f$, unde funcția f este definită de limita de mai sus. Dar:

$$\begin{aligned} \|f_n - f\| &= \sup_{x\in[0,1)} |f_n(x) - f(x)| \\ &= \max\big(\sup_{x\in[0,1)} (|f_n(x) - f(x)|, |f_n(1) - f(1)|)\big) \\ &= \max\big(\sup_{x\in[0,1)} (x^n, 0)\big) \\ &= 1, \end{aligned}$$

de unde obținem $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 1 \neq 0$. Rezultă că (f_n) este punctual convergent, nu uniform convergent pe $[0, 1)$.

Pentru caracterizarea convergenței, avem la dispoziție mai multe rezultate, printre care și *criteriul fundamental, al lui Cauchy*. Vom enunța, însă, rezultatele care vor fi utile în special în rezolvarea exercițiilor:

Teoremă 4.3 (Integrare termen cu termen)**:** *Fie* (f_n) *un șir uniform convergent de funcții continue,* $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Atunci limita $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ *este o funcție continuă pe* $[a, b]$ *și avem:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Cu alte cuvinte, în cazul convergenței uniforme, limita comută cu integrala.

Pentru derivabilitate, avem:

Teoremă 4.4 (Derivare termen cu termen)**:** *Fie* (f_n) *un șir de funcții din* $C^1([a, b])$ *și* f, g *funcții mărginite, cu* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$*. Dacă* $f_n \xrightarrow{PC} f$ *și* $f'_n \xrightarrow{UC} g$ *pe* $[a, b]$*, atunci* f *este derivabilă pe* $[a, b]$ *și* $f' = g$.

Pentru cazul șirurilor monotone de funcții continue, rezultatul următor arată o legătură simplă între convergența punctuală și cea uniformă:

Teoremă 4.5 (U. Dini)**:** *Fie* (f_n) *un șir monoton de funcții continue,* $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$*, astfel încît* $f_n \xrightarrow{PC} f$*. Atunci* $f_n \xrightarrow{UC} f$.

Următorul rezultat va fi de folos în special în capitolul privitor la serii de puteri:

Teoremă 4.6 (Stone—Weierstrass)**:** *Pentru orice funcție continuă* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*, există un șir* (f_n) de polinoame*, cu* $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$*, astfel încît* $f_n \xrightarrow{UC} f$.

5 Serii de funcții

Trecem acum la studiul seriilor de funcții, făcînd legături similare cu trecerea de la șiruri de numere la serii de numere.

Începem cu o noțiune fundamentală:

Definiţie 5.1: Mulțimea valorilor lui x pentru care seria de funcții $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ este convergentă se numește *mulțimea de convergență* a seriei, iar funcția $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, cu $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$, unde $S_n(x)$ este șirul sumelor parțiale pentru seria de funcții, se numește *suma seriei*.

Seria $\sum f_n$ se numește *simplu (punctual) convergentă* către funcția f dacă șirul sumelor parțiale $(S_n(x))_n$ este punctual convergent către f.

Similar, seria se numește *uniform convergentă* către funcția f dacă șirul sumelor parțiale este uniform convergent către f.

Seria se numește *absolut convergentă* dacă seria $\sum |f_n(x)|$ este simplu convergentă.

Regăsim acum, atît noțiunile privitoare la șirurile de funcții, cît și criteriile de convergență pentru serii de numere.

Teoremă 5.1: *Fie* $\sum f_n$ *o serie uniform convergentă de funcții continue, cu* $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ *și fie* s *suma acestei serii. Atunci* s *este o funcție continuă pe* $[a, b]$ *și:*

$$\int_a^b s(x)dx = \sum_{n\geqslant 1} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Avem rezultatul corespunzător și pentru derivate:

Teoremă 5.2: *Fie* $\sum f_n$ *o serie punctual convergentă de funcții din* $C^1([a, b])$*, cu suma* s *pe* $[a, b]$ *și astfel încît seria derivatelor* $\sum f'_n$ *să fie uniform convergentă. Atunci funcția* s *este derivabilă pe* $[a, b]$ *și în plus:*

$$s'(x) = \sum_{n\geqslant 1} f'_n(x).$$

Teoremă 5.3 (Weierstrass)**:** *Fie* $\sum f_n$ *o serie de funcții, cu* $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ *și fie* $\sum a_n$ *o serie convergentă de numere reale pozitive.*

Dacă $|f_n(x)| \leqslant a_n$*, pentru orice* $x \in [a, b]$ *și* $n \geqslant N$*, cu* N *fixat, atunci seria de funcții* $\sum f_n$ *este uniform convergentă pe* $[a, b]$.

Teoremă 5.4 (Criteriul lui Abel)**:** *Dacă seria de funcții* $\sum f_n$ *se poate scrie* $\sum \alpha_n \nu_n$*, astfel încît seria de funcții* $\sum \nu_n$ *să fie uniform convergentă, iar* (α_n) *să fie un șir monoton de funcții egal mărginite (i.e. mărginite de aceeași constantă), atunci seria inițială este uniform convergentă.*

O alternativă:

Teoremă 5.5 (Criteriul lui Dirichlet)**:** *Dacă seria de funcții* $\sum f_n$ *se poate scrie sub forma* $\sum \alpha_n \nu_n$*, astfel încît șirul sumelor parțiale al seriei* $\sum \nu_n$ *să fie un șir de funcții egal mărginite, iar șirul* (α_n) *să fie un șir monoton de funcții, ce converge uniform către 0, atunci ea este uniform convergentă.*

6 Formula lui Taylor

Putem asocia oricărei funcții cu anumite proprietăți „bune" un polinom care o aproximează. Este vorba despre *polinomul Taylor*, definit astfel.

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval deschis și fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă $C^m(I)$. Pentru orice $a \in I$, definim *polinomul Taylor* de gradul $n \leqslant m$ asociat funcției f în punctul a:

$$T_{n,f,a} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Restul (eroarea aproximării) se definește prin:

$$R_{n,f,a}(x) = f(x) - T_{n,f,a}(x).$$

Următorul rezultat ne arată că polinomul de mai sus poate fi transformat într-o formulă mai exactă:

Teoremă 6.1 (Formula lui Taylor cu resturi Lagrange)**:** *Fie* $f : I \to \mathbb{R}$ *o funcție de clasă* $C^{n+1}(I)$ *și* $a \in I$. *Atunci, pentru orice* $x \in I$*, există* $\xi \in (a, x)$ *(sau* (x, a)*, după caz), astfel încît:*

$$f(x) = T_{n,f,a}(x) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi).$$

Privitor la restul rezultat din această formulă, avem următoarele:

- *forma Peano*: $\exists \omega : I \to \mathbb{R}$, cu $\lim\limits_{x \to a} \omega(x) = \omega(a) = 0$:

$$R_{n,f,a}(x) = \frac{(x-a)^n}{n!}\omega(x).$$

- *forma integrală*:

$$R_{n,f,a}(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{R_{n,f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$

7 Exerciții

1. Să se studieze convergența simplă și uniformă a șirurilor de funcții:

(a) $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$;

(b) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = x^n(1-x^n)$;

(c) $f_n : (-1,1) \to \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$;

(d) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$;

(e) $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x+n}{x+n+1}$;

(f) $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$;

(g) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = \arctan(nx)$;

(h) $f_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, f_n(x) = n \sin^n x \cos x$.

2. Să se arate că șirul $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x}{x+n}$ nu converge uniform pe $[0,\infty)$, dar converge uniform pe orice interval $[a,b]$, cu $0 < a < b$.

3. Să se arate că șirul de funcții (f_n), unde:

$$f_n : (1,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sqrt{(n^2+1)\sin^2\frac{\pi}{n} + nx} - \sqrt{nx}$$

este uniform convergent (la 0).

4. Să se arate că șirul de funcții (f_n), cu:

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{n}\arctan x^n$$

converge uniform pe $\mathbb{R}$, dar:

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)'_{x=1} \neq \lim_{n\to\infty} f'_n(1).$$

Rezultatele diferă deoarece șirul derivatelor nu converge uniform pe $\mathbb{R}$.

5. Să se arate că șirul de funcții (f_n), cu:

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = nxe^{-nx^2}$$

converge, dar:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

Rezultatul se explică prin faptul că șirul nu este uniform convergent. De exemplu, pentru $x_n = \frac{1}{n} \in [0,1]$, avem $f_n(x_n) \to 1$, dar în general, $f_n(x) \to 0$.

6. Studiați convergența simplă și uniformă a șirului de funcții:

$$f_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = n\sin^n x\cos x.$$