Seminar 3
Serii de numere reale

Exerciții suplimentare

1. Să se stabilească natura seriilor următoare:

(a) $\sum_n \frac{1}{\sqrt[n+1]{\ln(n+1)}}$ (D, necesar [Stolz + $a^b = e^{b \ln a}$]);

(b) $\sum_n \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}$ (D, necesar + raport);

(c) $\sum_n \sqrt{n^4 + 2n + 1} - n^2$ (D, comparație 3 cu $\sum \frac{1}{n}$);

(d) $\sum_n \frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}$ (D, comparație 3 cu $\sum \frac{1}{n}$ [Stolz]);

(e) $\sum_n \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$ (D, comparație cu $\sum \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$);

(f) $\sum_n \frac{a^n}{\sqrt[n]{n!}}, a > 0$ (comparație [$a = 1$] cu $\sum a^n$, raport pentru $a > 1$ și $\sum \frac{a^n}{n!}$, apoi comparație);

(g) $\sum_n a^{\ln n}, a > 0$ ([$a = \frac{1}{e}$], Raabe);

(h) $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n \ln n}$ (D, integral);

(i) $\sum_n (-1)^n \frac{\log_a n}{n}, a > 1$ (C, Leibniz: $f(x) = \frac{\log_a x}{x}$ crescătoare pentru $x > e$);

(j) $\sum_n \frac{(-1)^n \sqrt{n}+1}{n}$ (D, spargem în două $\sum \frac{1}{n}$ D și restul C [Leibniz]);

(k) $\sum_n \frac{1}{n^p \ln^q n}, p, q > 0$ ($p > 1$ C $\forall q > 0$ [comparație 1], $p = 1$ integral [C ddacă $q > 1$], $p < 1$ condensare $\frac{1}{n^q 2^{n(p-1)}} \ln^q 2$, D [raport]);

(l) $\sum \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}, a > 0$ (Raabe: $a > 1$, C, $a < 1$, D, $a = 1$, D [direct]);

(m) $a + \sum_{n \geqslant 2} (2 - \sqrt{e})(2 - \sqrt[3]{e}) \cdots (2 - \sqrt[n]{e}) \cdot a^n, a > 0$ (raport: $a < 1$, C, $a > 1$, D, comparație pentru $a = 1$ cu s.a.);

(n) $\sum \frac{1}{n^a} \sin \frac{\pi}{n}, a \in \mathbb{R}$ (comparație la limită, $\sum \frac{1}{n^{a+1}}$);

(o) $\sum \frac{a^n (n!)^2}{(2n)!}, a > 0$ (raport $\Rightarrow \frac{a}{4}$, $a = 4 \Rightarrow$ Raabe, D);

(p) $\sum \frac{\cos n \cdot \cos \frac{1}{n}}{n}$ (Abel, $x_n = \frac{\cos n}{n}, y_n = \cos \frac{1}{n}$, C);

(q) $\sum n^2 e^{-\sqrt{n}}$ (C, logaritmic);

(r) $\sum n! \sin a \cdot \sin \frac{a}{2} \cdots \sin \frac{a}{n}$, $a \in (0, \pi)$. (raport, $a = 1$ Raabe + L'Hospital).

2. Arătați că seria $\sum_n (-1)^n \frac{2+(-1)^n}{n}$ este divergentă, dar șirul termenilor converge la 0.

3. Studiați convergența seriei: $\sum_n \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{\sqrt{n}}$ (Indicație: Abel pentru $\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \nu_n = \sin n \cdot \sin n^2$).

4. Studiați convergența absolută a seriilor:

(a) $\sum (-1)^n \sqrt[n]{n} \sin \frac{1}{n}$;

(b) $\sum(-1)^{n+1}\frac{2^n \sin^{2n} a}{n+1}$, $a \in \mathbb{R}$ (radical + Leibniz);

(c) $\sum \frac{\sin n \cdot a}{n}$, $a \in \mathbb{R}$ (comparație + Abel);

(d) $\sum_n x_n$, unde $x_{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}-1}$ și $x_{2n} = -\frac{1}{\sqrt{n+1}-1}$;

(e) $\sum_n x_n$, unde $x_{2n-1} = \frac{1}{5n-3}$ și $x_{2n} = -\frac{1}{5n-3}$;

5. Fie seria de termen general $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$. Arătați că ea este semiconvergentă. Studiați seria obținută prin ridicarea ei la pătrat. Deduceți faptul că este posibil ca produsul a două serii semiconvergente să fie o serie convergentă.

6. Considerați seriile:

$$S = 1 - \sum_n \left(\frac{3}{2}\right)^n, \quad T = 1 + \sum_n \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

Arătați că seriile sînt divergente, dar produsul lor este o serie absolut convergentă.