Seminar 2
Serii de numere reale

1 Serii — Noțiuni generale

Definiție 1.1: Fie $(x_n)_n$ un șir de numere reale și fie seria $\sum_n x_n$, definită de șirul sumelor parțiale $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

Seria se numește *convergentă* dacă șirul s_n este convergent, iar limita șirului se numește *suma seriei*. În caz contrar, seria se numește *divergentă*, adică șirul sumelor parțiale nu are limită sau aceasta este infinită.

Cîteva proprietăți, care ne ajută să lucrăm cu operații cu serii:

(1) Dacă într-o serie schimbăm ordinea unui număr finit de termeni, obținem o serie nouă, care are aceeași natură. Dacă există, suma seriei nu se schimbă.

(2) Dacă eliminăm un număr finit de termeni dintr-o serie, se obține o nouă serie cu aceeași natură. Suma, dacă există, poate să se schimbe.

(3) Fie seria $\sum_n x_n$ convergentă. Atunci pentru orice șir (k_n) crescător și divergent, cu numere naturale, seria obținută prin reordonare:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_{k_1}) + (x_{k_1+1} + \cdots + x_{k_2}) + \ldots$$

este de asemenea convergentă și are aceeași sumă. Dacă seria inițială are sumă infinită, atunci și seria de mai sus are sumă infinită.

Dacă există un șir (k_n) ca mai sus, care să facă astfel încît noua serie reordonată să devină divergentă, atunci și seria inițială este divergentă.

(4) Dacă o serie este convergentă, atunci ea are șirul sumelor parțiale mărginit.

(5) Fie $\sum_{n \geqslant 1} x_n$ o serie convergentă și $\sum_{n \geqslant p} x_n$ seria obținută prin eliminarea primilor p termeni. Suma seriei translatate se notează R_p și se numește *restul de ordin* p al seriei inițiale.

Se poate observa faptul că resturile unei serii convergente formează un șir convergent către zero.

(6) Seriile $\sum_n x_n$ și $\sum_n \alpha x_n$, cu $\alpha \in \mathbb{R}^*$ au aceeași natură.

(7) Dacă seria $\sum_n x_n$ este convergentă, atunci șirul (x_n) al termenilor săi este convergent către zero. Reciproca este falsă $\left(\sum_n \frac{1}{n} \right)$.

Proprietatea aceasta oferă, însă, **condiția necesară de convergență**, anume:

(8) Dacă șirul termenilor unei serii nu este convergent către zero, seria este divergentă.

2 Serii cu termeni pozitivi

Cîteva proprietăți simple care rezultă din particularizarea celor de mai sus:

(1) Șirul sumelor parțiale ale unei serii cu termeni pozitivi este strict crescător;

(2) O serie cu termeni pozitivi are întotdeauna sumă (finită sau nu);

(3) O serie cu termeni pozitivi este convergentă dacă și numai dacă șirul sumelor parțiale este mărginit;

(4) Dacă $\sum_n x_n$ este o serie cu termeni pozitivi, atunci ea are aceeași natură cu seria obținută prin reordonare după un șir de numere naturale (cf. proprietății (3) de mai sus).

Pentru a stabili natura unei serii cu termeni pozitivi, se pot folosi următoarele criterii:

(1) **Primul criteriu de comparație:** O serie care are termeni mai mari (doi cîte doi) decît o serie divergentă este divergentă. O serie care are termeni mai mici (doi cîte doi) decît o serie convergentă este convergentă.

(2) **Al doilea criteriu de comparație:** Fie $\sum_n x_n$ și $\sum_n y_n$ două serii cu termeni pozitivi. Presupunem că $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant \frac{y_{n+1}}{y_n}$. Atunci:

- Dacă seria $\sum_n y_n$ este convergentă, atunci și seria $\sum_n x_n$ este convergentă;
- Dacă seria $\sum_n x_n$ este divergentă, atunci și seria $\sum_n y_n$ este divergentă.

(3) **Al treilea criteriu de comparație:** Fie $\sum_n x_n$ și $\sum_n y_n$ serii cu termeni pozitivi, astfel încît $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \ell$.

- Dacă $0 < \ell < \infty$, atunci cele două serii au aceeași natură;
- Dacă $\ell = 0$, iar seria $\sum_n y_n$ este convergentă, atunci și seria $\sum_n x_n$ este convergentă;
- Dacă $\ell = +\infty$, iar seria $\sum_n y_n$ este divergentă, atunci seria $\sum_n x_n$ este divergentă.

(4) **Criteriul radical (Cauchy)**: Fie $\sum_n x_n$ o serie cu termeni pozitivi, astfel încît $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \ell$. Atunci:

- Dacă $\ell < 1$, seria este convergentă;
- Dacă $\ell > 1$, seria este divergentă;
- Dacă $\ell = 1$, criteriul nu decide.

(5) **Criteriul raportului (D'Alembert)**: Fie $\sum_n x_n$ o serie cu termeni pozitivi, astfel încît $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \ell$. Atunci:

- Dacă $\ell < 1$, seria este convergentă;
- Dacă $\ell > 1$, seria este divergentă;
- Dacă $\ell = 1$, criteriul nu decide.

(6) **Criteriul lui Raabe-Duhamel:** Fie $\sum_n x_n$ o serie cu termeni pozitivi și notăm:

$$\ell = \lim_{n\to\infty} n\Big(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\Big).$$

Atunci:

- Dacă $\ell < 1$, seria este divergentă;
- Dacă $\ell > 1$, seria este convergentă;
- Dacă $\ell = 1$, criteriul nu decide.

(7) **Criteriul logaritmic:** Fie $\sum_n x_n$ o serie cu termeni pozitivi și presupunem că există limita:

$$\ell \overset{\text{not.}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{x_n}}{\ln n}.$$

Atunci:

- Dacă $\ell < 1$, seria este divergentă;
- Dacă $\ell > 1$, seria este convergentă;
- Dacă $\ell = 1$, criteriul nu decide.

(8) **Criteriul integral:** Fie $f : (0, \infty) \to [0, \infty)$ o funcție crescătoare și șirul $a_n = \int_1^n f(t)dt$. Atunci seria $\sum_n f(n)$ este convergentă dacă și numai dacă șirul $(a_n)_n$ este convergent.

(9) **Criteriul condensării:** Fie $x_n \geqslant x_{n+1} \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Atunci seriile $\sum_n x_n$ și $\sum_n 2^n x_{2^n}$ au aceeași natură.

3 Convergență absolută și semiconvergență

Atunci cînd nu lucrăm cu serii care au doar termeni pozitivi, convergența trebuie studiată ceva mai atent. De fapt, ea se subdivide în cel puțin două tipuri, pe care le vom prezenta.

Însă, cel mai simplu exemplu de serie care nu are toți termenii pozitivi este *seria alternată:*

Definiţie 3.1: O serie $\sum_n x_n$ se numește *alternată* dacă produsul $x_n \cdot x_{n+1} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Pentru astfel de serii, avem **criteriul lui Leibniz** care ne arată convergența: Fie $\sum_n (-1)^{n+1} u_n$ o serie alternată. Dacă șirul $(u_n)_n$ este descrescător și converge către 0, atunci seria este convergentă.

Ajungem, în fine, la noțiunile anunțate.

Definiţie 3.2: O serie $\sum_n x_n$ se numește *absolut convergentă* dacă seria modulelor $\sum_n |x_n|$ este convergentă.

Următoarele proprietăți sînt evidente:

- Orice serie absolut convergentă este convergentă;
- Prin orice permutare a termenilor unei serii absolut convergente se obține una tot absolut convergentă și cu aceeași sumă.

Observaţie 3.1: Deoarece știm că pentru o serie absolut convergentă, proprietatea de convergență se păstrează și cînd trecem la module, putem să aplicăm pentru seriile absolut convergente criteriile din cazul seriilor cu termeni pozitivi.

Definiţie 3.3: O serie se numește *semiconvergentă* dacă are seria modulelor divergentă.

Așadar, dacă seria este absolut convergentă, ne putem reduce la cazul seriilor cu termeni pozitivi, prin aplicarea modulului. În caz contrar (cel de semiconvergență), avem la dispoziție următoarele criterii:

(1) **Criteriul general (Cauchy)**: O serie $\sum_n x_n$ este convergentă dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încît, pentru orice $n \geqslant N_\varepsilon$, are loc:

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+p}| < \varepsilon, \forall p \geqslant 1.$$

(2) **Criteriul lui Abel**: Dacă seria $\sum_n x_n$ se poate scrie sub forma $\sum_n \alpha_n y_n$, cu (α_n) un șir monoton și mărginit, iar seria $\sum_n y_n$ este convergentă, atunci și seria inițială este convergentă.

(3) **Criteriul lui Dirichlet**: Dacă seria $\sum_n x_n$ se poate scrie sub forma $\sum_n \alpha_n y_n$, în care (α_n) este un șir monoton care tinde către zero, iar șirul de termen general $V_n = v_1 + \cdots + v_n$ este mărginit, atunci seria inițială este convergentă.

Mai avem următoarea noțiune:

Definiţie 3.4: O serie convergentă $\sum_n x_n$ se numește *necondiționat convergentă* dacă pentru orice permutare $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, seria $\sum_n x_{\sigma(n)}$ este convergentă. În caz contrar, seria se numește *condiționat convergentă*.

Următorul rezultat este evident:

Teoremă 3.1 (Dirichlet)**:** *Orice serie absolut convergentă este necondiționat convergentă.*

În schimb, teorema care urmează poate fi surprinzătoare:

Teoremă 3.2 (Riemann)**:** *Fiind dată o serie convergentă, dar nu absolut convergentă și un număr real* S*, există o permutare a termenilor seriei astfel încît noua serie obținută să aibă suma exact* S.

4 Operații cu serii

În unele situații, dacă o serie este mai complicată, putem să o descompunem în două sau mai multe serii. Apoi, problema convergenței se reduce la studiul componentelor, iar rezultatul final se formulează ținînd seama de operațiile permise între serii (convergente).

Operațiile elementare cu serii sînt:

- *suma și diferența*, care se realizează termen cu termen, adică:

$$\sum_n x_n + \sum_n y_n = \sum_n (x_n + y_n);$$

- *produsul*, care se mai numește și *convoluție*, deoarece nu se realizează termen cu termen, ci avem:

$$\sum_n x_n \cdot \sum_n y_n = \sum_n \Big(\sum_j x_j y_{n-1-j} \Big).$$

Cu aceste operații, rezultatele principale care ne arată utilitatea lor sînt:

(1) Suma și diferența a două serii convergente este o serie convergentă. Suma seriei rezultate se calculează corespunzător, i.e. ca suma sau diferența sumelor seriilor implicate.

(2) **Abel:** Suma unei serii produs se calculează ca produsul sumelor seriilor-factori.

(3) **Mertens:** Dacă seriile $\sum_n u_n, \sum_n v_n$ sînt convergente și cel puțin una dintre ele este absolut convergentă, atunci seria produs $\sum_n w_n$ este convergentă și avem $U \cdot V = W$, unde am notat cu majuscule sumele seriilor corespunzătoare.

(4) **Cauchy:** Dacă seriile factori sînt absolut convergente, atunci și seria produs este absolut convergentă.

5 Aproximarea sumelor seriilor convergente

Putem calcula numeric sumele unor serii convergente, cu anumite aproximații, chiar dacă suma finală nu poate fi calculată în întregime (sau poate rezultatul exact nu este de interes). În acest sens, avem următoarele două rezultate:

Teoremă 5.1 (Aproximarea sumelor seriilor cu termeni pozitivi)**:** *Fie* $x_n \geqslant 0$ *și* $k \geqslant 0$*, astfel încît* $\frac{x_{n+1}}{x_n} < k < 1, \forall n \in \mathbb{N}$*. Dacă* S *este suma seriei convergente* $\sum_n x_n$*, iar* s_n *este suma primilor* $n+1$ *termeni, atunci avem următoarea aproximație:*

$$|S - s_n| < \frac{k}{1-k} x_n.$$

Teoremă 5.2 (Aproximarea sumelor seriilor alternate): *Fie $\sum_n (-1)^n x_n$ o serie alternată convergentă și fie S suma sa. Dacă S_n este suma primilor $n+1$ termeni, atunci avem:*

$$|S - S_n| \leqslant x_{n+1}.$$

În esență, ambele teoreme arată că *eroarea aproximației are ordinul de mărime al primului termen neglijat*.

6 Exemple și exerciții

Să studiem două serii care au fost deja întîlnite:

Seria geometrică: Fie $a \in \mathbb{R}$ și $q \in \mathbb{R}$, pe care îl numim *rație*. Considerăm seria geometrică $\sum_n aq^n$. După cum știm, suma parțială de rang n a seriei este:

$$s_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = \begin{cases} a \cdot \frac{1-q^n}{1-q} & q \neq 1 \\ na, & q = 1. \end{cases}$$

În ce privește convergența, rezultă că dacă $|q| < 1$, atunci avem:

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \frac{a}{1-q},$$

deci seria este convergentă și are suma chiar $\frac{a}{1-q}$.

În caz contrar, dacă $|q| \geqslant 1$, se poate verifica folosind criteriul necesar că seria geometrică este divergentă.

Un caz mai general îl constituie **seria armonică generalizată**, definită prin $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$, cu $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dacă $\alpha \leqslant 0$, atunci termenul general al seriei nu converge către zero, deci din criteriul necesar, obținem că seria este divergentă.

Dacă $\alpha > 0$, atunci termenii seriei formează un șir descrescător de numere pozitive. Se poate constata, în acest caz, că seria este convergentă pentru $\alpha > 1$ și divergentă pentru $\alpha \leqslant 1$.

Pentru $\alpha = 1$, seria se numește simplu *seria armonică*.

1. Studiați natura următoarelor serii cu termeni pozitivi, definite de șirul x_n:

(a) $x_n = \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n$ (D, necesar);

(b) $x_n = \frac{1}{n!}$ (C, comparație);

(c) $x_n = \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ (C, comparație);

(d) $x_n = \frac{n!}{n^{2n}}$ (C, D'Alembert);

(e) $x_n = n! \cdot \left(\frac{a}{n}\right)^n$, $a \in \mathbb{R}$ (discuție, raport);

(f) $x_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ (C, raport);

(g) $x_n = \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$, $a > -1$ (discuție, Raabe);

(h) $x_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}$ (D, Raabe);

(i) $x_n = \left(1 - \frac{3\ln n}{2n}\right)^n$ (C, logaritmic);

(j) $x_n = \left(\frac{n+1}{3n+1}\right)^n$ (C, rădăcină);

(k) $x_n = \left(\frac{an+1}{bn+1}\right)^n$, $a, b > 0$ (discuție, rădăcină);

(l) $x_n = \left(\frac{1}{\ln n}\right)^{\ln(\ln n)}$ (D, logaritmic);

(m) $x_n = \frac{1}{n\ln n}$ (D, integral);

(n) $x_n = \frac{1}{n\ln^2 n}$ (C, integral);

(o) $x_n = \frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}$ (D, necesar + rădăcină);

(p) $x_n = \frac{1}{7^n + 3^n}$ (C, comparație);

(q) $x_n = 3^n \sin\frac{\pi}{5^n}$ (C, comparație $\sin x < x$);

(r) $x_n = \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ (D, comparație $3 \sim \frac{1}{n}$);

(s) $x_n = a^{\ln n}$, $a > 0$ (discuție, Raabe).

2. Studiați natura următoarelor serii, definite de șirul x_n:

(a) $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ (C, Leibniz, nu AC);

(b) $x_n = (-1)^n$ (D, necesar);

(c) $x_n = \frac{1}{n+i}$ (D, descompune, una divergentă);

(d) $x_n = \frac{\cos n\alpha}{n^2}, \alpha \in \mathbb{R}$ (AC, comparație);

3. Dați exemplu de serii divergente a căror sumă este o serie convergentă. ($(-1)^n$ și $(-1)^{n+1}$).

4. Să se aproximeze cu o eroare mai mică decît ε sumele seriilor definite de șirul x_n:

(a) $x_n = \frac{(-1)^n}{n!}, \varepsilon = 10^{-3}$. ($x_n < \varepsilon \Rightarrow n = 7$, deci calculăm S_7);

(b) $x_n = \frac{(-1)^n}{n^3\sqrt{n}}, \varepsilon = 10^{-2}$ ($n = 4$);

(c) $x_n = \frac{1}{n!2^n}$ ($\frac{x_{n+1}}{x_n} < \frac{1}{6} = k, \forall n \geqslant 2$, deci $S - s_n \leqslant x_n \frac{k}{1-k}$, de unde $n = 5$);

(d) $x_n = \frac{1}{n^4(2n)!}, \varepsilon = 10^{-6}$.

Soluție 1.j): Aplicăm criteriul logaritmic:

$$\begin{aligned}
\ell &= \lim_{n\to\infty} \frac{-\ln x_n}{\ln n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{3\ln n}{2n}\right)^n}{\ln n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} \cdot \ln\left(1 - \frac{3\ln n}{2n}\right)^{-n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \ln\left(1 - \frac{3\ln n}{2n}\right)^{-\frac{n}{\ln n}}.
\end{aligned}$$

Limita comută cu logaritmul și putem calcula separat:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{3\ln n}{2n}\right)^{-\frac{n}{\ln n}} = \left(1 + \frac{-3\ln n}{2n}\right)^{-\frac{2n}{3\ln n}\cdot\frac{3\ln n}{-2n}\cdot\frac{-n}{\ln n}} = e^{\frac{3}{2}}.$$

Revenind, obținem $\ell = \frac{3}{2}$, deci seria este convergentă.