Seminar 13
Recapitulare

MODEL 1

1. Să se calculeze cu o eroare mai mică decît $\varepsilon = 10^{-3}$:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-\cos x^2}{x^2} dx.$$

2. Să se arate, folosind definiția, că funcția:

$$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0)$$

nu are limită în origine.

3. Să se verifice dacă funcția $f(x,y) = (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$ este armonică.

4. Să se calculeze, folosind definiția, derivatele parțiale ale funcției f în punctul $(-1,1)$, unde:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = 2x^3y - e^{x^2+y^2}.$$

5. Determinați valorile extreme pentru funcția f, definită pe domeniul D, unde:

$$f(x,y) = x^4 + y^3 - 4x^3 - 3y^2 + 3y, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 4\}.$$

MODEL 2

1. Fie funcția $f(x) = \sqrt[4]{x+1}$.

(a) Să se scrie polinoamele $T_1(x)$ și $T_2(x)$ în jurul punctului $a = 0$;

(b) Să se calculeze $\sqrt[4]{10004}$ cu 4 zecimale exacte.

2. Să se arate că funcția:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

este continuă în raport cu fiecare variabilă în parte, dar nu este continuă în raport cu ansamblul variabilelor.

3. Fie $f(x,y) = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y}$. Să se calculeze, folosind definiția, $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{4}, 0)$ și $\frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.

4. Fie seria de puteri:

$$\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

(a) Să se determine domeniul de convergență;

(b) Să se determine suma seriei.

5. Să se determine punctele de extrem și valorile extreme pentru funcția

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \sin x \sin y \sin(x + y).$$

MODEL 3

1. Să se determine aproximările liniare, pătratice și cubice ale funcției

$$f(x) = x \ln x,$$

în jurul punctului $a = 1$.

2. Fie funcția:

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Să se arate că $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

3. Fie funcția:

$$f(x, y, z) = g(xy, xyz + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}).$$

Să se arate că ea satisface ecuația:

$$-xy\frac{\partial f}{\partial x} + y^2\frac{\partial f}{\partial y} + x(1 + x^2)\frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

4. Să se determine punctele cele mai apropiate de origine care se găsesc pe suprafața de ecuație $4x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 4y + 4 = 0$.

5. Fie seria de puteri $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(x-1)^{2n}}{n \cdot 9^n}$.
Să se determine domeniul de convergență.

6. Să se determine suma seriei $\sum_{n\geqslant 1} nx^{-n}$.

PARȚIAL SERIA A

1. Fie seria de puteri $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}x^{2n}$. Să se determine domeniul de convergență și suma seriei.

2. Să se calculeze cu o eroare de cel mult $\varepsilon = 10^{-2}$:

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1-e^{-x}}{x}dx.$$

3. Fie funcția $f(x) = 1 + x\ln x$.

(a) Să se determine polinoamele Taylor T_1, T_2 în jurul lui 1;

(b) Aproximați $\ln \frac{11}{10}$, folosind T_2.

4. Considerăm seria de puteri:

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{2n}.$$

(a) Găsiți domeniul de convergență.

(b) Calculați suma seriei.

5. Calculați valoarea integralei, cu o eroare mai mică decît 10^{-2}:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-\cos x}{x^2}dx.$$

6. Fie funcția $f(x) = (x+1)e^x$.

(a) Scrieți T_1 și T_2 în jurul lui 0;

(b) Calculați cu aproximație $e^{-0,1}$, folosind expresia lui $T_2(x)$ și găsiți un majorant pentru eroare.