Seminar 12
Probleme de extrem

1. Să se calculeze extremele locale ale funcțiilor:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy$;

(b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, g(x, y) = x^3 + 8y^3 - 2xy$;

(c) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, h(x, y) = x^2 y e^{2x+3y}$;

(d) $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, k(x, y) = xy$;

Soluție (schiță) (c): Mulțimea punctelor critice este:

$$\{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \cup \{(-1, -\frac{1}{3})\}.$$

Punctul izolat este punct de minim. În punctele $(0, y)$, avem o valoare proprie nulă pentru hessiană. Se evaluează, atunci, semnul diferenței:

$$f(x, y) - f(0, y) = x^2 y e^{2x+3y},$$

care ar trebui să aibă semn constant. Remarcăm, însă, că pentru punctele situate deasupra axei OX, adică cu $y > 0$, există un disc de rază mică (de exemplu, $\frac{y}{2}$), pe are diferența $f(x, y) - f(0, y)$ este pozitivă, deci aceste puncte sînt minime locale. Analog, punctele de sub axa OX sînt maxime locale. Pentru $y = 0$, adică în origine, diferența $f(x, y)$ nu păstrează semn constant pe nicio vecinătate a lui $(0, 0)$, deci nu este punct de extrem.

2. Să se determine punctele de extrem ale funcției implicite $y = f(x)$, definite prin ecuația $F(x, y) = x^2 - 2xy + 5y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$.

3. Să se determine punctele de extrem și valorile extreme pentru funcțiile:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = (x + y^2) \cdot e^{x+2y}$;

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = e^{x^2-y} + e^{x+y}$;

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = \sin x \sin y \sin(x + y)$;

(d) $f : (\mathbb{R} - \{0\})^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = \frac{x^2}{2y} + y^2 + \frac{8}{x} + 5$.

4. Determinați valorile extreme pentru funcțiile f definite pe mulțimile K, în cazurile:

(a) $f(x, y) = 5x^2 + 4xy + 8y^2, K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$;

(b) $f(x, y) = x + y - 2xy, K_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, precum și $K_2 = [0, 1] \times [0, 1]$;

(c) $f(x, y) = xy(2x + 3y - 5), K = \{(x, y) \in RR^2 \mid 2x + 3y \leqslant 12, x, y \geqslant 0\}$;

(d) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + xz - yz, K : x + y + z = 1, x, y, z \geqslant 0$;

(e) $f(x, y, z) = \cos x + \cos y + \cos z, K : x + y + z = \pi, x, y, z \geqslant 0$;

(f) $f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2xz - 8x - 6y - 4z$, unde $K : x + y + z = 3, x, y, z \geqslant 0$;

(g) $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y, K : x + y = 1.$

5. Să se determine punctele cele mai depărtate de origine care se găsesc pe suprafața de ecuație $4x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 4y + +4 = 0$.

6. Să se determine valorile minime ale produsului xy, cînd x și y sînt coordonatele unui punct de pe elipsa de ecuație $x^2 + 2y^2 = 1$.