

## Seminar 11

### Extremele funcțiilor de mai multe variabile

#### Metoda celor mai mici pătrate.

### 1 Extreme în mai multe dimensiuni

Pornim cu următoarea:

**Definiție 1.1:** Fie  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , cu  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ .

Un punct  $a \in A$  se numește *punct critic* pentru  $f$  dacă  $f$  este diferențiabilă în  $a$  și  $df(a) = 0$ , adică  $\frac{\partial f}{\partial x_k} = 0$ , pentru orice  $k = 1, \dots, n$ .

Rezultă de aici că punctele de extrem local ale lui  $f$  sînt printre soluțiile sistemului:

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_n) = 0 \right\}_k.$$

În studiul naturii punctelor critice pentru o funcție  $f$ , pașii de urmat sînt:

- (1) Se determină punctele critice, din anularea derivatelor parțiale;
- (2) Fie  $a$  un punct critic. Se calculează matricea hessiană corespunzătoare, adică  $H_f(a) = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{i,j}$ ;
- (3) Se calculează valorile proprii ale lui  $H$ :
  - (a) Dacă toate valorile proprii sînt pozitive,  $a$  este un minim local;
  - (b) Dacă toate sînt negative,  $a$  este un maxim local;
  - (c) Dacă valorile proprii nu au semn uniform,  $a$  nu este de extrem;
  - (d) Dacă 0 este valoare proprie, nu se poate decide. Astfel, se dezvoltă în serie Taylor a lui  $f$  în jurul lui  $a$ , de unde se calculează semnul diferenței  $f(x) - f(a)$ .

Pentru cazul bidimensional ( $n = 2$ ), avem o metodă simplificată:

- (1) Se determină punctele de extrem din sistemul:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0;$$

- (2) Fie  $a = (a_1, a_2)$  un asemenea punct critic. Calculăm numerele:

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a_1, a_2) \\ s_0 &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a_1, a_2) \\ t_0 &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a_1, a_2). \end{aligned}$$

Observăm că avem:

$$d^2f(a_1, a_2) = r_0 dx^2 + 2s_0 dx dy + t_0 dy^2.$$

- (a) Dacă  $r_0 > 0$  și  $r_0 t_0 - s_0^2 > 0$ , atunci  $a$  e punct de minim local;
- (b) Dacă  $r_0 < 0$  și  $r_0 t_0 - s_0^2 > 0$ , atunci  $a$  e punct de maxim local;

(c) Dacă  $r_0 t_0 < 0$ , atunci  $a$  nu este punct de extrem local;

(d) Dacă  $r_0 t_0 - s_0^2$ , atunci studiem semnul  $f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2)$  prin dezvoltare în serie Taylor.

**Dezvoltarea în serie Taylor pentru o funcție de două variabile reale în jurul punctului  $a = (x_0, y_0)$  este dată de formula:**

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(a) + \frac{1}{1!} \left[ (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(a) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right] \\ & + \frac{1}{2!} \left[ (x - x_0)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) + 2(x - x_0)(y - y_0) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) + (y - y_0)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \right] + \\ & + \frac{1}{3!} \left[ (x - x_0)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a) + 3(x - x_0)^2(y - y_0) \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(a) + 3(x - x_0)(y - y_0)^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(a) + (y - y_0)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a) \right] \\ & + \dots \end{aligned}$$

**Observație 1.1:** În cazul în care se impun constrângeri pentru domeniul de definiție a funcției, se studiază separat problema punctelor de extrem în interiorul domeniului, precum și pe frontieră.

## 2 (\*) Regresia liniară

Regresia liniară se adresează unor probleme de tip statistic, atunci când avem la dispoziție o serie de date experimentale, pe care trebuie să le corelăm cu un model teoretic *liniar*.

Așadar, date o serie de perechi de puncte de forma  $(x_i, y_i)$ , care reprezintă datele colectate într-un experiment care verifică o teorie bazată pe ecuații liniare, ne punem problema găsirii celei mai potrivite drepte care să prezinte o abatere minimă față de punctele colectate (eng. "best fit").

Fie, așadar, dreapta  $y = f(x) = ax + b$  modelul teoretic pe care îl studiem. Dacă  $(x_i, y_i)$  reprezintă colecția de puncte experimentale, atunci vom minimiza abaterea lor de la funcția  $f$  prin intermediul *metodei celor mai mici pătrate*. Vom impune, așadar, ca suma pătratelor distanțelor de la punctele colectate la dreapta teoretică să fie minimă.

În expresia  $f(x) = ax + b$ , necunoscutele sînt  $a$  și  $b$ , deoarece ele determină dreapta experimentală pe care o căutăm. Așadar, putem privi  $f$  ca pe o funcție de variabilele  $a$  și  $b$ . Scriem, deci, expresia corespunzătoare celor mai mici pătrate:

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^n [f(x_i) - y_i]^2.$$

Această funcție se dorește minimizată, așadar problema revine la găsirea punctelor de minim pentru ea.

Se studiază punctele critice cu metoda din secțiunea de mai sus, apoi se găsesc punctele  $(a, b)$  care să fie de minim.

În fine, *dreapta de regresie* este  $y = ax + b$ .

Se poate face și *calculul erorilor*, folosind variabilele:

$$\begin{aligned} S_r &= \sum_i (y_i - b - ax_i)^2 \\ S_t &= \sum_i (y_i - \bar{y})^2, \end{aligned}$$

unde  $\bar{y}$  este media (aritmetică) a valorilor  $y_i$  experimentale.

În fine, se pot calcula *eroarea standard* a estimării și, respectiv, abaterea medie pătratică:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{S_r}{n-2}}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{S_t}{n-1}}.$$

### 3 Exerciții

1. Fie funcția:

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 10 \ln y + 3.$$

Determinați punctele de extrem și calculați valorile funcției în aceste puncte.

2. Fie  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy$ .

(a) Pentru  $D = \mathbb{R}^2$ , determinați punctele de extrem și calculați valorile funcției în aceste puncte;

(b) Pentru  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \geq 5\}$ , determinați valoarea minimă și maximă a funcției.

Indicație (b): Considerați funcțiile  $g_1(x) = f(x, 0)$ ,  $g_2 = f(0, y)$  și apoi funcția  $g_3 = f(x, 5 - x)$ , cărora le găsiți punctele de extrem.

3. Fie  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = 3xy^2 - x^3 - 15x - 36y + 9$ .

(a) Pentru  $D = \mathbb{R}^2$ , determinați punctele de extrem și calculați valorile funcției în aceste puncte;

(b) Pentru  $D = [-4, 4] \times [-3, 3]$  determinați valoarea minimă și valoarea maximă a funcției.

Indicație (b): Considerați funcțiile  $f(x, -3)$ ,  $f(4, y)$ ,  $f(x, 3)$ ,  $f(-4, y)$ .

4. Fie  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$ .

(a) Pentru  $D = \mathbb{R}^2$ , determinați punctele de extrem și calculați valorile funcției în aceste puncte;

(b) Pentru  $D = [-1, 2] \times [0, 2]$ , determinați valoarea minimă și maximă a funcției.

5. Fie  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^3 + 3x^2y - 15x - 12y$ .

(a) Pentru  $D = \mathbb{R}^2$ , determinați punctele de extrem și calculați valorile funcției în aceste puncte;

(b) Pentru  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, 3y + x \leq 3\}$  determinați valoarea minimă și valoarea maximă a funcției.

6. Determinați valorile extreme pentru funcțiile  $f$ , definite pe domeniile  $D$ , unde:

(a)  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy, D = \mathbb{R}^2$ ;

(b)  $f(x, y) = xy(1 - x - y), D = [0, 1] \times [0, 1]$ ;

(c)  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2, D = (-\infty, 0) \times (0, \infty)$ ;

(d)  $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 2xy, D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0, y + 2x \leq 2\}$ ;

(e)  $f(x, y) = x^4 + y^3 - 4x^3 - 3y^2 + 3y, D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}$ .

7. Să se determine dreapta de regresie care mediază printre punctele  $M_1(1, 2)$ ,  $M_2(2, 0)$ ,  $M_3(3, 1)$ .

8\*. Dintre toate paralelipedele dreptunghice cu volum constant 1, determinați pe cel cu aria totală minimă.