Seminar 11
Probleme de extrem cu forme pătratice

1 Forme pătratice. Aplicație

În afară de studiul semnului valorilor proprii ale matricei hessiene, mai putem decide natura punctelor de extrem pentru o funcție de mai multe variabile și altfel.

Pentru aceasta, vom utiliza o noțiune algebrică, aceea a *formelor pătratice*. Mai precis, vom folosi faptul că diferențiala a doua a unei funcții de mai multe variabile este o formă pătratică.

Din teoria formelor pătratice, ne este de folos următoarea:

Teoremă 1.1 (Sylvester): *Fie* $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \sum a_{ij}x_ix_j$ *o formă pătratică simetrică* ($a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$). *Fie matricea sa asociată* $A = (a_{ij})$.

Definim minorii principali ai matricei *prin:*

$$\Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \det A.$$

Atunci:

(a) φ *este* pozitiv definită *(i.e.* $\varphi(x) > 0, \forall x$ *nenul) dacă și numai dacă* $\Delta_i > 0, \forall i$;

(b) φ *este* negativ definită *(i.e.* $\varphi(x) < 0, \forall x$ *nenul) dacă și numai dacă* $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \dots, (-1)^n\Delta_n > 0$.

Pentru a aplica această teoremă la studiul problemelor de extrem, să remarcăm faptul că diferențiala a doua a unei funcții de mai multe variabile este o formă pătratică simetrică. În plus, matricea hessiană este matricea acestei forme pătratice. Așadar, avem:

Teoremă 1.2: *Fie* $a \in \mathbb{R}^n$ *un punct critic pentru funcția* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

(a) Dacă toți minorii principali ai matricei hessiene sînt strict pozitivi în a*, atunci* a *este punct de minim local pentru* f;

(b) Dacă minorii principali ai matricei hessiene au semnele alternate, începînd cu primul negativ, atunci a *este punct de maxim local;*

(c) Dacă toți minorii principali ai matricei hessiene sînt nenuli, dar semnele lor nu sînt ca în cazurile de mai sus, atunci a *nu este punct de extrem local;*

(d) Dacă cel puțin unul din minorii principali ai matricei hessiene este nul, nu se poate preciza natura punctului a*. În acest caz, se evaluează semnul diferenței* $f(x) - f(a)$*, folosind formula lui Taylor pentru funcții de mai multe variabile (pînă la termenul de ordin cel puțin 2).*

Dezvoltarea în serie Taylor pentru o funcție de două variabile reale în jurul punctului $a = (x_0, y_0)$ este dată de formula:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(a) + \frac{1}{1!}\Big[(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(a) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(a)\Big] \\ &+ \frac{1}{2!}\Big[(x-x_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) + 2(x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) + (y-y_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)\Big] + \\ &+ \frac{1}{3!}\Big[(x-x_0)^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a) + 3(x-x_0)^2(y-y_0)\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(a) + 3(x-x_0)(y-y_0)^3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(a) + (y-y_0)^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a) \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Exemplu: Fie funcția

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x, y, z) = (x - y)^2 + (y - 1)^3 + (z - 1)^2.$$

Găsim punctele critice.

Soluție: Rezolvăm sistemul dat de anularea derivatelor parțiale și obținem punctul $M(1, 1, 1)$. Matricea hessiană are $\Delta_2 = 0$, deci nu putem folosi teoria formelor pătratice. Folosim definiția.

$M(1, 1, 1)$ este punct de extrem local dacă și numai dacă există o sferă $S((1, 1, 1), r)$ în care diferența $f(x, y, z) - f(1, 1, 1)$ are semn constant (echivalent, într-o dimensiune, studiem semnul diferenței într-o *vecinătate* a punctului).

În particular, să observăm că $f(x, x, 1) = (x - 1)^3$, care nu are semn constant pentru $(x, x, 1)$ în orice vecinătate a punctului $(1, 1, 1)$. Deducem că punctul M nu este de extrem.

2 Exerciții

1. Să se arate că funcțiile următoare verifică ecuațiile indicate:

(a) $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 5xy$, $\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} - 5x\frac{\partial f}{\partial x} - 5y\frac{\partial f}{\partial y} + 9xy = 0$;

(b) $f(x, y) = xg(x^2 - y^2)$, $xy\frac{\partial f}{\partial x} + x^2\frac{\partial f}{\partial y} = yf$;

(c) $f(x, y, z) = g\big(xy, xyz + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\big)$, $-xy\frac{\partial f}{\partial x} + y^2\frac{\partial f}{\partial y} + x(1 + x^2)\frac{\partial f}{\partial z} = 0$;

(d) $f(x, y, z) = g(x - yz, y^2 + z^2)$, $(z^2 - y^2)\frac{\partial f}{\partial x} + z\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial z} = 0$;

(e) $f(x, y, z) = g(xyz, x + y + z)$, $x(y - z)\frac{\partial f}{\partial x} + y(z - x)\frac{\partial f}{\partial y} + z(x - y)\frac{\partial f}{\partial z} = 0$;

(f) $f(x, y, z) = g(xyz, yz + zx - xy)$, $x^2(y + z)\frac{\partial f}{\partial x} - y^2(z + x)\frac{\partial f}{\partial y} + z^2(y - x)\frac{\partial f}{\partial z} = 0$.

2. Să se determine punctele de extrem local pentru funcțiile:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = x^3 + 4xy - 2x^2 - 2y^2 - 22x + 10y$;

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = (x + y^2) \cdot e^{(x+2y)}$;

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = e^{(x^2-y)} + e^{x+y}$;

(d) $f : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}, f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$.

3. Să se determine punctele de extrem pentru funcțiile f definite pe mulțimile K:

(a) $f(x, y) = 5x^2 + 4xy + 8y^2$, $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$;

(b) $f(x, y) = xy^2(x + y - 2)$, $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leqslant 3, x, y \geqslant 0\}$;

(c) $f(x, y) = \frac{x+y}{1+xy}$, $K = [0, 1] \times [0, 1]$;

(d) $f(x, y) = 2x + 3y - \frac{x^2+y^2}{2}$, $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leqslant 4, 5x + 3y \geqslant 16, x, y \geqslant 0\}$;

(e) $f(x, y) = x^2 + y^2 + xz - yz$, $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1, x, y, z \geqslant 0\}$.