**Seminar 10**
**Extreme cu legături (condiționate)**

## 1 Extreme condiționate

Atunci cînd domeniul de definiție al unei funcții de mai multe variabile conține, la rîndul său anumite ecuații (numite, generic, *legături*, problemele de extrem se studiază folosind **metoda multiplicatorilor Lagrange**. Ea se bazează pe următoarele concepte:

**Definiţie 1.1:** Fie $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, cu $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, iar $f : U \to \mathbb{R}$ o funcție de $n + m$ variabile reale, cu valori reale, de clasă $\mathcal{C}^1$ pe un deschis $U \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$.

Ea se numește *funcție-scop (obiectiv)*. Presupunem că există $m$ legături între variabilele $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, adică $m$ relații de forma:

$$g_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \dots, g_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \quad g_i : U \to \mathbb{R},$$

fiecare legătură fiind o funcție de clasă $\mathcal{C}^1(U)$.

Fie $M = \{(x, y) \in U \mid g_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, 1 \leqslant i \leqslant m\}$ mulțimea punctelor din $U$ care verifică legăturile.

Se numește *punct de extrem local al funcției* $f$ *cu legăturile* $g_i$ orice punct $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in M$, pentru care există o vecinătate $W \subseteq U$, astfel încît diferența $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ să aibă semn constant pentru orice $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in M \cap W$.

Teorema pe care se bazează metoda multiplicatorilor lui Lagrange este:

**Teoremă 1.1** (J. L. Lagrange)**:** *Cu notațiile și contextul de mai sus, presupunem că* $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ *este un punct de extrem local al lui* $f$*, cu legăturile de mai sus și că*

$$\det J_g(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \xlongequal{\text{not.}} \frac{D(g_1, \dots, g_m)}{D(y_1, \dots, y_m)}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0.$$

*Atunci există* $m$ *numere reale* $\lambda_1, \dots, \lambda_m$*, numite* multiplicatori Lagrange *astfel încît, dacă definim funcția:*

$$F = f + \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_m g_m,$$

*punctul* $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ *să verifice în mod necesar sistemul de* $n + 2m$ *ecuații:*

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial F}{\partial y_k} = 0, g_l = 0, \quad \forall 1 \leqslant j \leqslant n, 1 \leqslant k \leqslant m, 1 \leqslant l \leqslant m,$$

*cu* $n + 2m$ *necunoscute,* $\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x}, \mathbf{y}$.

**Exemplu:** Să se determine extremele locale ale funcției $f(x, y, z) = xyz$, cu legătura $x + y + z = 1$.
*Soluție:* Folosim metoda multiplicatorilor Lagrange. Definim funcțiile:

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &= x + y + z - 1 \\ F(x, y, z) &= f + \lambda g = xyz + \lambda(x + y + z - 1). \end{aligned}$$

Extremele cerute verifică sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= 0 \\ g &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} yz + \lambda &= 0 \\ xz + \lambda &= 0 \\ xy + \lambda &= 0 \\ x + y + z - 1 &= 0 \end{cases}$$

Soluția sistemului este dată de:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{9} \Rightarrow (x_1, y_1, z_1) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$$

$$\lambda_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} (x_2, y_2, z_2) & = (1, 0, 0) \\ (x_3, y_3, z_3) & = (0, 1, 0) \\ (x_4, y_4, z_4) & = (0, 0, 1) \end{cases}$$

În continuare, studiem natura punctelor de extrem pentru funcția $F$, fie cu matricea hessiană, fie cu diferențiala totală de ordin 2.

Găsim că $(x_1, y_1, z_1)$ este maxim local, iar celelalte puncte nu sînt de extrem.

## 2 Exerciții

1. Să se determine extremele funcțiilor $f$, cu legătura $g$ în cazurile:

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1, g(x, y) = x + y - 2;$

(b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1, g(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1;$

(c) $f(x, y) = 3x + 4y, g(x, y) = x^2 + y^2 + 25.$

2. Să se găsească punctul din planul $2x + y - z = 5$, situat la distanță minimă față de origine.

3. Să se determine punctele cele mai depărtate de origine care se află pe suprafața de ecuație $4x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 4y + 4 = 0$.

4. Să se determine valorile extreme ale funcției:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2,$$

pe mulțimea $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

5. Să se determine valorile extreme ale produsului $xy$, cînd $x$ și $y$ sînt coordonatele unui punct de pe elipsa de ecuație $x^2 + 2y^2 = 1$.