Seminar 9bis
Teorema reziduurilor (supliment)

Principalele metode de a calcula reziduurile unei funcții sînt redate în teorema următoare.

Teoremă 1 (Calculul reziduurilor)**:** *(1)* $\text{Rez}(f, a) = c_{-1}$, *unde* c_{-1} *este coeficientului lui* $\frac{1}{z-a}$ *din dezvoltarea în serie Laurent a funcției* f *în vecinătatea singularității* $z = a$*;*

(2) Dacă $z = a$ *este pol de ordinul* $p \geqslant 2$ *pentru* f*, atunci:*

$$\text{Rez}(f, a) = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \to a} \Big[(z-a)^p f(z)\Big]^{(p-1)};$$

(3) Dacă $z = a$ *este pol simplu pentru* f*, atunci, particularizînd formula de mai sus, avem:*

$$\text{Rez}(f, a) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z);$$

(4) Dacă f *se poate scrie ca un cît de două funcții* A, B*, olomorfe în jurul punctului* a *și dacă* a *este pol simplu pentru* f*, adică* $B(a) = 0$*, atunci:*

$$\text{Rez}(f, a) = \lim_{z \to a} \frac{A(z)}{B'(z)}.$$

1. Să se calculeze următoarele integrale:

(a) $I = \displaystyle\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 - 1};$

(b) $I = \displaystyle\int_{\gamma} \frac{dz}{z^4 + 1}, \gamma : x^2 + y^2 - 2x = 0;$

(c) $I = \displaystyle\int_{|z|=3} \frac{z^2 + 1}{(z-1)^2(z+2)} dz.$

Soluție: (a) Punctele $z = \pm 1$ sînt poli de ordinul 1 pentru funcția $f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}$. Ele sînt situate în interiorul discului pe care integrăm, cu $|z| = 2$, deci putem aplica teorema reziduurilor:

$$I = 2\pi i \cdot \Big(\text{Rez}(f, z_1) + \text{Rez}(f, z_2)\Big).$$

Calculăm separat reziduurile:

$$\text{Rez}(f, z_1) = \lim_{z \to 1} (z-1) \cdot \frac{1}{z^2 - 1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Rez}(f, z_2) = \lim_{z \to -1} (z+1) \cdot \frac{1}{z^2 - 1} = -\frac{1}{2}.$$

Rezultă:

$$I = \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2-1} = 2\pi i \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

(b) Curba γ este un cerc centrat în $(1,0)$ și cu raza 1. Căutăm polii funcției $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$ care se află în interiorul lui γ.

Avem succesiv:

$$\begin{aligned} z^4+1=0 &\Rightarrow z^4 = -1 = \cos\pi + i\sin\pi \Rightarrow \\ z &= \sqrt[4]{\cos\pi + i\sin\pi} \Rightarrow \\ z_k &= \cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}, k = 0,1,2,3. \end{aligned}$$

Doar punctele z_0, z_3 se află în interiorul discului delimitat de γ și calculăm reziduurile în aceste puncte.

Putem aplica formula din Teorema 1 (4) și avem:

$$\begin{aligned} \mathrm{Rez}(f, z_0) &= \frac{A(z)}{B'(z)}\Big|_{z_0} = \frac{1}{4z^3}\Big|_{z_0} = -\frac{1}{4}e^{\frac{\pi i}{4}} \\ \mathrm{Rez}(f, z_3) &= \frac{A(z)}{B'(z)}\Big|_{z_3} = \frac{1}{4z^3}\Big|_{z_3} = -\frac{1}{4}e^{\frac{7\pi i}{4}}. \end{aligned}$$

Rezultă:

$$I = \int_\gamma \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i\Big(-\frac{1}{4}e^{\frac{\pi i}{4}} - \frac{1}{4}e^{\frac{7\pi i}{4}}\Big) = -\frac{\pi\sqrt{2}i}{2}.$$

(c) Avem doi poli, $z = 1, z = -2$ în interiorul conturului. Se vede că $z_1 = 1$ este pol de ordinul 2, iar $z_2 = -2$ este pol de ordinul 1. Calculăm reziduurile:

$$\begin{aligned} \mathrm{Rez}(f, z_1) &= \frac{1}{2!}\lim_{z\to 1}\left[(z-1)^2\frac{z^2+1}{(z-1)^2(z+2)}\right] \\ &= \frac{1}{2!}\lim_{z\to 1}\frac{z^2+4z-1}{(z+2)^2} \\ &= \frac{2}{9} \\ \mathrm{Rez}(f, z_2) &= \lim_{z\to -2}(z+2)\frac{z^2+1}{(z-1)^2(z+2)} = \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

Rezultă:

$$I = \int_{|z|=3} \frac{z^2+1}{(z-1)^2(z+2)}dz = \frac{14}{9}\pi i.$$

2. Să se calculeze integralele:

(a) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{dz}{\sin z}$;

(b) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2} dz$;

(c) $\displaystyle\int_{|z|=5} ze^{\frac{3}{z}} dz$;

(d) $\displaystyle\int_{|z-1|=1} \frac{dz}{(z+1)(z-1)^3}$;

(e) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^4} dz$.

Indicații: (a) $z = 0$ este singurul pol din interiorul domeniului;

(b), (c) Dezvoltăm în serie Laurent și identificăm reziduurile folosind Teorema 1 (1).

(d) Avem $z = 1$ pol de ordin 3 și $z = -1$ pol simplu. Doar $z = 1$ se află în interiorul domeniului și dezvoltăm în serie Laurent după puterile lui $z - 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z+1} &= \frac{1}{2 - (-(z-1))} \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \left(-\frac{z-1}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^n} \\
&= \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}},
\end{aligned}$$

pentru $|z - 1| < 2$.

Rezultă:

$$\frac{1}{(z+1)(z-1)^3} = \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \frac{(z-1)^{n-3}}{2^{n+1}} = \frac{1}{2(z-1)^3} - \frac{1}{4(z-1)^2} + \frac{1}{8(z-1)} - \frac{1}{16} + \dots,$$

deci $\mathrm{Rez}(f, 1) = \frac{1}{8}$.

(e) Avem $z = 0$ pol de ordinul 3. Putem calcula reziduul folosind dezvoltarea în serie Laurent sau cu formula din Teorema 1(2).

Aplicații ale teoremei reziduurilor

Putem folosi teorema reziduurilor pentru a calcula integrale trigonometrice de forma:

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta,$$

unde R este o funcție rațională.

Facem schimbarea de variabilă $z = e^{i\theta}$ și atunci, pentru $\theta \in [0, 2\pi]$, z descrie cercul $|z| = 1$, o dată, în sens direct.

Folosim formulele lui Euler:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}\Big(z+\frac{1}{z}\Big)$$
$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i}\Big(z-\frac{1}{z}\Big).$$

Atunci, dacă $z = e^{i\theta}$, rezultă $dz = ie^{i\theta}\,d\theta = izd\theta$, iar integrala devine:

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta = \oint_{|z|=1} R_1(z)dz,$$

unde:

$$R_1(z) = \frac{1}{iz}R\Big(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\Big).$$

Această funcție poate avea poli și deci putem folosi teorema reziduurilor. Dacă $a_1, \dots, a_n$ sînt polii din interiorul cercului unitate, avem:

$$I_1 = 2\pi i \sum_{k\geqslant 1} \text{Rez}(R_1, a_k).$$

Să vedem cîteva exemple:

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}$;

(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+3\cos^2\theta}$;

(c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{1+i\sin\theta}\,d\theta$;

(d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+a\sin\theta}, |a| < 1, a \in \mathbb{R}$.

Soluție:

(a) Notăm $z = e^{i\theta}$, cu $\theta \in [0, 2\pi]$. Atunci avem succesiv:

$$dz = ie^{i\theta}d\theta = izdz \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$$
$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}\Big(z+\frac{1}{z}\Big)$$
$$\frac{1}{2+\cos\theta} = \frac{2z}{z^2+4z+1}$$
$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta} = \oint_{|z|=1}\frac{2z}{z^2+4z+1}\frac{dz}{iz}$$
$$= -2i\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+4z+1}.$$

Acum folosim teorema reziduurilor. Singularitățile funcției $f(z) = \frac{1}{z^2+4z+1}$ sînt $z = -2 \pm \sqrt{3}$, care sînt poli simpli. Numai $z = -2+\sqrt{3}$ se află în interiorul cercului $|z| = 1$ și calculăm reziduul folosind Teorema 1(2).