Seminar 8.1
Recapitulare parțial

Ecuații diferențiale de ordin superior

1. Să se integreze următoarele ecuații diferențiale:

(a) $y''' = \sin x + \cos x$;

(b) $y \cdot y'' - 2y'^2 = 0$ (omogenă, $y' = z$);

(c) $y'' + y'^2 = \frac{2}{e^y}$ (autonomă, $y' = p = p(y)$);

(d) $yy'' - y'^2 = 0$ (autonomă);

(e) $(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 0$ $(x > 0)$, știind că are o soluție particulară de forma $y_p(x) = ax + b$;

(f) $y^{(4)} - 3y^{(3)} + 3y^{(2)} - y' = 0$;

(g) $y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y^{(2)} - 2y' + y = 0$;

(h) $y^{(2)} + 10y' + 25y = 4e^{-5x}$;

(i) $y^{(3)} - y^{(2)} + y' - y = \cos x$;

(j) $y^{(2)} - y = 4e^x$;

(k) $x^2y^{(2)} + 3xy' + 4y = 5x, x > 0$ (Euler);

(l) $x^2y^{(2)} - xy' + y = x + \ln x, x > 0$ (Euler);

(m) $4(x+1)^2y^{(2)} + y = 0, x > -1$ (Euler).

Sisteme diferențiale

1. Să se determine soluția generală $X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ a sistemelor diferențiale:

(a) $\begin{cases} x'(t) &= x + 2y \\ y'(t) &= 2x + 4y \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x'(t) &= 2x + y \\ y'(t) &= 3x + 4y \end{cases}$

Teoria stabilității

1. Scriind ecuațiile diferențiale sub forma unor sisteme, să se studieze stabilitatea soluțiilor:

(a) $x'' + 3x' + 5 = f(t)$, cu f continuă pe $[0, \infty)$;

(b) $x'' + 9x = 0$;

(c) $x'' + x'^2 + x' + x = 0$;

(d) $x''' + 10x''^2 + 4x' - 8x^3 = 0$.

Indicație: Notînd $x = x_1$ și $x' = x_2$, putem rescrie ecuațiile sub forma unor sisteme, pe care le interpretăm matriceal.

2. Să se studieze stabilitatea spre ∞ a soluțiilor sistemelor:

(a) $\begin{cases} x' &= -x + z \\ y' &= -2y - z \\ z' &= y - z \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x' &= x + 2y - 2z + t^2 \\ y' &= 2x + y + 2z + t \\ z' &= -2x + 2y + z \end{cases}$

3. Să se studieze stabilitatea soluției nule a sistemului:

$$\begin{cases} x' &= x + y^2 - \cos x + 1 + 4y \\ y' &= \sin y + (x+1)^2 - \cos x \end{cases}.$$

Linii și suprafețe de cîmp

1. Determinați liniile de cîmp pentru cîmpurile vectoriale:

(a) $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + xyz\vec{k}$;

(b) $\vec{v} = (xz + y)\vec{i} + (x + yz)\vec{j} + (1 - z^2)\vec{k}$;

(c) $\vec{v} = (x^2 + y^2)\vec{i} + 2xy\vec{j} - z^2\vec{k}$.

2. Scriind sistemele diferențiale autonome asociate, să se determine soluția ecuațiilor liniare cu derivate parțiale de ordinul întîi:

(a) $(y - z)\frac{\partial u}{\partial x} + (z - x)\frac{\partial u}{\partial y} + (x - y)\frac{\partial u}{\partial z} = 0$;

(b) $z(x - y)\frac{\partial u}{\partial x} + z(x + y)\frac{\partial u}{\partial y} + (x^2 + y^2)\frac{\partial u}{\partial z} = 0$;

(c) $(4z - 5y)\frac{\partial u}{\partial x} + (5x - 3z)\frac{\partial u}{\partial y} + (3y - 4x)\frac{\partial u}{\partial z} = 0$.

Ecuații cu derivate parțiale

1. Să se determine soluțiile ecuațiilor cvasiliniare de ordinul întîi:

(a) $(z - y)^2\frac{\partial z}{\partial x} + xz\frac{\partial z}{\partial y} = xy$;

(b) $x(y^3 - 2x^3)\frac{\partial z}{\partial x} + y(2y^3 - x^3)\frac{\partial z}{\partial y} = 9z(x^3 - y^3)$;

(c) $2xu\frac{\partial u}{\partial x} + 2yu\frac{\partial u}{\partial y} = u^2 - x^2 - y^2$.

2. Să se determine suprafața de cîmp a cîmpului vectorial

$$\vec{v} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k},$$

care trece prin curba de ecuație:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 & = 4 \\ y & = 0 \end{cases}.$$

3. Să se determine suprafața de cîmp a cîmpului vectorial:

$$\vec{v} = 2xz\vec{i} + 2yz\vec{j} + (z^2 - x^2 - y^2)\vec{k},$$

care conține cercul de ecuații:

$$\begin{cases} z & = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x & = 0 \end{cases}.$$

Ecuații cu derivate parțiale de ordinul al doilea

1. Să se aducă următoarele ecuații la forma canonică, precizînd natura lor:

(a) $u_{xx} + u_{xy} - 12u_{yy} = 0$; [1]

(b) $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} = 0$;

(c) $u_{xx} + 4u_{xy} + 13u_{yy} = 0$.

2. Rezolvați ecuațiile următoare, cu condițiile inițiale date:

(a) $$\begin{cases} u_{xx} - 4x^2 u_{yy} - \frac{1}{x} u_x & = 0, x > 0 \\ u(1, y) & = y^2 + 1 \\ u_x(1, y) & = 4 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} x u_{xx} - u_{yy} + \frac{1}{2} u_x & = 0, x > 0 \\ u(x, 0) & = x \\ u_y(x, 0) & = 0 \end{cases}$$

[1] Am folosit notația prescurtată, $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ etc.