Seminar 8
Analiză complexă

Funcții complexe

Următoarele noțiuni sînt elementare și introduc conceptele de bază din studiul analizei complexe, începînd cu funcțiile de variabile complexe.

Definiţie 1: Fie $A \subseteq \mathbb{C}$. Se numește *funcție complexă* orice funcție de forma $f : A \to \mathbb{C}$.

Dată fiind scrierea algebrică a unui număr complex, putem separa părțile și pentru funcții. Astfel, dacă $w = f(z)$, iar $z = x + iy \in A, w = u + iv \in \mathbb{C}$, putem scrie $f = P + iQ$, cu $P = \text{Re}f$ și $Q = \text{Im}f$. Am pus în evidență două funcții $P, Q : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, iar egalitatea $w = f(z)$ devine echivalentă cu două egalități reale $u = P(x, y), v = Q(x, y)$, funcția în sine fiind echivalentă cu o transformare punctuală:

$$A \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (P(x, y), Q(x, y)).$$

De aceea, unele proprietăți le putem analiza pe componente:

Definiţie 2: Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ o mulțime deschisă și $f : A \to \mathbb{C}$ o funcție complexă.
Funcția este *continuă* în punctul $z_0 = x_0 + iy_0$ dacă și numai dacă P și Q sînt simultan continue în punctul (x_0, y_0).

Următoarea noțiune este legată de derivabilitate.

Definiţie 3: Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ o mulțime deschisă și $f : A \to \mathbb{C}$ o funcție complexă.
Funcția f se numește *olomorfă* în punctul $z_0 \in A$ (echivalent, $\mathbb{C}$-*derivabilă* sau *monogenă*) dacă există și este finită limita:

$$\ell = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

În caz afirmativ, $\ell = f'(z_0)$ se numește *derivata complexă* a lui f în z_0.

Similar cu cazul real, avem:

Observaţie 1: Dacă funcția $f : A \to \mathbb{C}$ este olomorfă în $z_0 \in A$, atunci ea este continuă în z_0.

Noțiunile se pot extinde pentru întreg deschisul în mod evident: funcția se numește *continuă* (respectiv *olomorfă*) pe A dacă are această proprietate în orice punct din A.
O condiție de derivabilitate care ține cont de descompunerea funcțiilor complexe este următoarea:

Teoremă 1: *Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ o mulțime deschisă.*
Funcția $f : A \to \mathbb{C}, f = P + iQ$ este olomorfă în $z_0 \in A$ dacă și numai dacă $P, Q : A \to \mathbb{R}$ sînt diferențiabile în $z_0 = (x_0, y_0)$, iar derivatele lor parțiale în (x_0, y_0) verifică condițiile Cauchy-Riemann, *adică:*

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} & = \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & = -\frac{\partial P}{\partial y} \end{cases}$$

Următoarea noțiune ne ajută să găsim o condiție echivalentă cu ecuațiile Cauchy-Riemann:

Definiţie 4: Dacă $f : A \to \mathbb{C}$ este o funcție complexă, definim:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \end{cases}$$

Dintre acestea, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ se numește *derivata areolară* a lui f.

Avem, atunci:

Corolar 1: *Relația* $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ *este echivalentă cu condițiile Cauchy-Riemann.*

Amintim din cazul funcțiilor reale:

Definiţie 5: Fie $u : A \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă $\mathcal{C}^2$ pe deschisul A. Funcția u se numește *armonică* dacă pentru orice punct $a \in A$ are loc:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(a) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(a) = 0,$$

adică $\Delta u = 0$ în orice punct $a \in A$.

Putem folosi această noțiune în următorul context, de exemplu:

Corolar 2: *Fie* $A \subseteq \mathbb{C}$ *o mulțime deschisă și* $f : A \to \mathbb{C}, f = P + iQ$*, cu* $P, Q \in \mathcal{C}^2(A)$.
Dacă f *este olomorfă pe* A*, atunci* P *și* Q *sînt armonice pe* A.

Pentru rezultatul reciproc, avem nevoie de:

Definiţie 6: O mulțime deschisă $D \subseteq \mathbb{C}$ se numește *conexă* dacă pentru orice două puncte $z_1, z_2 \in D$ există un drum $\gamma : [a, b] \to D$ care să unească cele două puncte, i.e. $\gamma(a) = z_1, \gamma(b) = z_2$.
Domeniul se numește *simplu conex* dacă frontiera lui este conexă.

Cu aceasta, avem:

Teoremă 2: *Fie* $D \subseteq \mathbb{R}^2$ *un domeniu simplu conex.*
Dacă funcția $P : D \to \mathbb{R}$ *este armonică pe* D*, atunci există funcția* $Q : D \to \mathbb{R}$ *armonică pe* D *astfel încît funcția complexă* $f : D \to \mathbb{C}, f = P + iQ$ *să fie olomorfă.*

Funcții particulare

În continuare, vom vedea cum funcții reale elementare, precum funcția exponențială, radical, funcții trigonometrice etc. pot fi extinse pentru a fi definite ca funcții complexe.

Definiţie 7: Se numește *exponențiala complexă* funcția $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definită prin:

$$\exp z = e^z = \sum_{n \geqslant 0} \frac{z^n}{n!}.$$

Ca în cazul real, se pot demonstra ușor proprietățile:

(a) $\exp(0) = 1$;

(b) $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2), \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;

(c) $\exp(iy) = \cos y + i \sin y, \forall y \in \mathbb{R}$ (Euler);

(d) Funcția exponențială este olomorfă și periodică de perioadă $T = 2\pi$.

Pentru funcția logaritmică, dacă vrem să rezolvăm ecuația $\exp(w) = z$, unde $w = u + iv \in \mathbb{C}$, putem scrie în formă polară $z = re^{i\theta}$ și atunci, ținînd cont și de periodicitatea funcției exponențiale, găsim că:

$$\begin{cases} u &= \ln|z| \\ v &= \operatorname{Arg} z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Astfel, avem:

Definiţie 8: Se numește *logaritmul numărului complex* $z \in \mathbb{C}^*$ mulțimea de numere complexe:

$$\operatorname{Ln} z = \{\ln|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Această funcție este *multiformă*, adică asociază unei valori z mai multe valori numerice (o infinitate de ramuri, de fapt). Iar pentru $k = 0$, obținem *valoarea principală* a logaritmului:

$$\ln z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z.$$

Putem acum defini și funcția putere și în particular, funcția radical:

Definiţie 9: Funcția putere de exponent complex:

$$z^m = \exp(m\operatorname{Ln} z) = \big\{ \exp(m(\ln|z| + i\operatorname{Arg} z + 2k\pi)) \mid k \in \mathbb{Z}\big\}, m \in \mathbb{C}.$$

Funcția radical, de indice complex:

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} &= \exp\big(\frac{1}{n}\operatorname{Ln} z\big) \\
&= \big\{ \exp\big(\frac{1}{n}(\ln|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi))\big) \mid k \in \mathbb{Z}\big\} \\
&= \Big\{ \exp\Big(\frac{1}{n}\ln|z|\Big) \cdot \exp\Big(i\frac{\theta + 2k\pi}{n}\Big) \mid k \in \mathbb{Z}\} \\
&= \Big\{ \sqrt[n]{r} \cdot \exp\Big(i\frac{\theta + 2k\pi}{n}\Big) \mid k \in \mathbb{N}\Big\}
\end{aligned}$$

Din funcția exponențială putem extrage și funcțiile trigonometrice complexe:

Definiţie 10: Pentru orice $z \in \mathbb{C}$, definim:

$$\begin{aligned}
\cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\
\sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} \\
\tan z &= -i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} \\
\cot z &= i\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}
\end{aligned}$$

Observaţie 2: Funcțiile trigonometrice complexe sînt *uniforme* (adică nu sînt multiforme), iar toate formulele din cazul real rămîn adevărate.

Avem, de asemenea, și funcții trigonometrice hiperbolice:

Definiţie 11:

$$\begin{aligned}
\sinh z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} \\
\cosh z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} \\
\tanh z &= \frac{\sinh z}{\cosh z}.
\end{aligned}$$

Remarcăm că au loc legăturile:

$$\sinh z = -i \sin(iz), \quad \cosh z = \cos(iz).$$

Rezolvarea unor ecuații trigonometrice ne conduce la introducerea funcțiilor trigonometrice inverse:

$$z = \sin w \Rightarrow z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \Leftrightarrow e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0,$$

pe care o rezolvăm ca pe o ecuația de gradul al doilea și obținem:

$$w = \text{Arcsinz} = i\text{Ln}(iz \pm \sqrt{1 - z^2}).$$

Similar, obținem și:

$$\text{Arccosz} = i\text{Ln}(z \pm \sqrt{z^2 - 1})$$
$$\text{Arctanz} = -\frac{i}{2}\text{Ln}\frac{i - z}{i + z}.$$

Exerciții

1. Arătați că funcția $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = |z|$ nu e olomorfă în niciun punct din $\mathbb{C}$.

Indicație: Pentru satisfacerea condițiilor Cauchy-Riemann, avem nevoie de $z = 0$, dar în $z = 0$, partea reală a lui f nu are derivate parțiale.

2. Arătați că funcția:

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \sqrt{|z - \bar{z}^2}$$

este continuă în $z = 0$, satisface condițiile Cauchy-Riemann în acest punct, dar nu este olomorfă.

Indicație: Partea reală a lui f nu este diferențiabilă în $z = 0$. Într-adevăr, ar trebui să avem:

$$P(x, y) - P(0, 0) = 0 \cdot (x - 0) + 0 \cdot (y - 0) + P_1(z)|z - 0|,$$

de unde $\lim\limits_{z \to 0} P_1(z) = 0$. Dar $P_1(z) = \frac{P(z)}{|z|}$ și luînd două șiruri $z = \frac{1}{n}, z' = \frac{1}{n} + i\frac{1}{n}$, ambele tinzînd la 0, avem $P_1(z_n) = 0$, dar $P_1(z'_n) = \sqrt{2}$, deci P_1 nu are limită în origine.

3. Să se determine funcția olomorfă $f = P + iQ$ pe $\mathbb{C}$, dacă $Q(x, y) = \varphi(x^2 - y^2)$, $\varphi \in \mathcal{C}^2$.

Soluție: Fie $\alpha = x^2 - y^2$. Atunci:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial x} &= 2x\varphi'(\alpha) \\
\frac{\partial Q}{\partial y} &= -2y\varphi'(\alpha) \\
\Rightarrow \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} &= 2\varphi'(\alpha) + 4x^2\varphi''(\alpha) \\
\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} &= -2\varphi'(\alpha) + 4y^2\varphi''(\alpha).
\end{aligned}$$

Deoarece Q trebuie să fie armonică, avem $\Delta Q = 0, \forall x, y$, de unde:

$$\varphi''(\alpha) = 0 \Rightarrow \varphi(\alpha) = c\alpha + c_1.$$

Din condițiile Cauchy-Riemann pentru P și Q, obținem acum:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} & = -2cy \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} & = -2cx \end{cases}$$

Integrăm a doua ecuație și înlocuim în prima, pentru a obține:

$$P(x, y) = -2cxy + k.$$

În fine:

$$f(z) = -2cxy + k + i(c(x^2 - y^2) + c_1) \Rightarrow f(z) = ciz^2 + d, c, d \in \mathbb{R}.$$

4. Fie $P(x, y) = e^{2x} \cos 2y + y^2 - x^2$. Să se determine funcția olomorfă $f = P + iQ$ pe $\mathbb{C}$ astfel încît $f(0) = 1$.

Soluție: Verificăm că P este armonică. Verificăm condițiile Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} &= 2e^{2x} \cos 2y - 2x \\ -\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} &= 2e^{2x} \sin 2y - 2y. \end{aligned}$$

Integrăm a doua ecuație în raport cu x, înlocuim în prima și obținem:

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{2x} \cos 2y + y^2 - x^2 + i(e^{2x} \sin 2y - 2xy + k) \\ &= e^{2x}(\cos 2y + i \sin 2y) - (x + iy)^2 + ki \\ \Rightarrow f(z) &= e^{2z} - z^2 + ki. \end{aligned}$$

Folosind condiția din enunț, găsim $k = 0$.

5. Determinați soluțiile $w \in \mathbb{C}$ ale ecuației $e^w = -2i$.

6. Rezolvați ecuația $z^3 + 2 - 2i = 0$.

7. Calculați:

(a) $\sin(1 + i)$;

(b) $\sinh(1 - i)$;

(c) $\tan\left(\frac{\pi}{4} - i \ln 3\right)$;

(d) $\tanh\left(\ln 2 + \frac{\pi i}{4}\right)$;

(e) $\mathrm{Arccos}(i\sqrt{3})$.

8. Rezolvați ecuația $\sin z = 2$.

9. Fie funcțiile:

(a) $f(z) = z\text{Re}z$;

(b) $f(z) = z^2 + z \cdot \overline{z} + 3z - 2\overline{z}$.

Determinați punctele în care f este derivabilă și să se calculeze $f'(z)$ în aceste puncte.

10. Să se studieze olomorfia funcțiilor:

(a) $f(z) = z$;

(b) $f(z) = \overline{z}$;

(c) $f(z) = \exp(z)$;

(d) $f(z) = \exp(\overline{z})$;

(e) $f(z) = |z|$;

(f) $f(z) = 2z + z^2$.

11. Să se determine funcția olomorfă $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ dacă:

(a) $u(x, y) = x^2 - y^2 - 2y$;

(b) $u(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$;

(c) $u(x, y) = (x \cos y - y \sin y)e^x$.