Seminar 7
Ecuații cu derivate parțiale
Metode de rezolvare

1 Ecuații cu coeficienți variabili

Ecuațiile cu derivate parțiale de ordinul al doilea, cu coeficienți variabili, se rezolvă similar celor cu coeficienți constanți. Vom prezenta două exemple.

Exemplu 1: Să se aducă la forma canonică ecuația:

$$(1+x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1+y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Soluție: Deoarece avem $AC - B^2 = (x^2+1)(y^2+1) > 0$, rezultă că ecuația este de tip eliptic.

Ecuația caracteristică este:

$$(1+x^2)dy^2 + (1+y^2)dx^2 = 0,$$

care înseamnă:

$$\sqrt{1+x^2}dy = \pm i\sqrt{1+y^2}dx.$$

Rezultă că familiile de curbe caracteristice sînt:

$$\begin{cases} \ln(y+\sqrt{1+y^2}) + i\ln(x+\sqrt{1+x^2}) & = c_1 \\ \ln(y+\sqrt{1+y^2}) - i\ln(x+\sqrt{1+x^2}) & = c_2 \end{cases}$$

În consecință, facem schimbarea de variabile:

$$\begin{cases} \tau & = \ln(y+\sqrt{1+y^2}) \\ \eta & = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) \end{cases}$$

Derivatele parțiale în funcție de noile variabile sînt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \cdot \frac{\partial u}{\partial \tau} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{1}{1+y^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \frac{y}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\partial u}{\partial \tau}. \end{aligned}$$

Rezultă că ecuația se reduce la forma canonică:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0.$$

Exemplu 2: Să se aducă la forma canonică și să se determine soluția generală a ecuației:

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Soluție: Deoarece $A = x^2, B = -xy, C = y^2$, avem $AC - B^2 = 0$, deci ecuația este de tip parabolic. Din ecuația caracteristică obținem:

$$x^2 \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2xy \cdot \frac{dy}{dx} + y^2 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow xy = c.$$

Facem schimbarea de variabile:

$$\begin{cases} \tau &= xy \\ \eta &= x \end{cases}$$

și noile derivate parțiale sînt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= y\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= x\frac{\partial u}{\partial \tau} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + 2y\frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \tau} + xy\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + x\frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial \eta}.
\end{aligned}$$

Atunci ecuația devine:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

Ea se poate rescrie și rezolva astfel:

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\eta \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0 \Rightarrow \eta \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} = f(\tau) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1}{\eta} f(\tau).$$

Integrăm în raport cu η și obținem, în final:

$$u(\tau, \eta) = f(\tau) \ln \eta + g(\tau) \Rightarrow u(x, y) = f(xy) \ln x + g(xy).$$

În unele cazuri, poate fi necesară o discuție după x, y pentru tipul ecuației:
Exemplu 3: Fie ecuația:

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (x+y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Deoarece $A = y, B = \frac{x+y}{2}, C = x$, avem

$$\delta = AC - B^2 = \frac{-(x-y)^2}{4}$$

și studiem separat pentru:

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \delta < 0\}, \quad D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \delta = 0\},$$

care corespund, respectiv, cazurilor: *hiperbolic*, pentru $y \neq x$ și *eliptic*, pentru $y = x$.

Mai departe, ecuația se rezolvă cu metodele cunoscute, corespunzătoare celor două cazuri.

2 Coarda infinită. Metoda lui d'Alembert

Pornim de la ecuația coardei infinite, care constă în determinarea funcției $u(x, t)$, definită pentru $x \in \mathbb{R}$ și $t \geqslant 0$, soluție a ecuației coardei vibrante:

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \forall x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

Presupunem că avem condiții inițiale, astfel că problema devine o problemă Cauchy:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), \forall x \in \mathbb{R},$$

cu φ și ψ funcții date.

Cum ecuația este deja în forma canonică, asociem ecuația caracteristică:

$$a^2 dt^2 - dx^2 = 0 \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \pm \frac{1}{a}.$$

Rezultă că familiile de curbe caracteristice sînt:

$$\begin{cases} x - at &= c_1 \\ x + at &= c_2 \end{cases}.$$

Facem schimbarea de variabile corespunzătoare:

$$\begin{cases} \tau &= x - at \\ \eta &= x + at \end{cases}$$

și rezultă ecuația în forma canonică, în noile variabile:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial \eta} = 0.$$

Putem să o rezolvăm astfel:

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \tau} = f(\tau).$$

Acum putem integra în raport cu τ și găsim:

$$u(\tau, \eta) = \int f(\tau) d\tau + \theta_2(\eta) \Leftrightarrow u(\tau, \eta) = \theta_1(\tau) + \theta_2(\eta).$$

Revenind la variabilele x, t, avem:

$$u(x, t) = \theta_1(x + at) + \theta_2(x - at)$$

și, folosind condițiile inițiale, avem:

$$\begin{cases} \theta_1(x) + \theta_2(x) &= \varphi(x) \\ a\theta_1'(x) - a\theta_2'(x) &= \psi(x) \end{cases}.$$

Integrăm a doua ecuație în raport cu x și obținem:

$$\begin{cases} \theta_1(x) + \theta_2(x) &= \varphi(x) \\ a\theta_1(x) - a\theta_2(x) = \int_0^x \psi(\alpha) d\alpha + c \end{cases}$$

Adunăm egalitățile și găsim:

$$\theta_1(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(\alpha) d\alpha + \frac{c}{2a},$$

iar prin scădere, găsim:

$$\theta_2(x) = \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(\alpha)d\alpha - \frac{c}{2a}.$$

Revenind la variabilele inițiale, avem:

$$\begin{cases} \theta_1(x+at) &= \frac{\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_0^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha + \frac{c}{2a} \\ \theta_2(x-at) &= \frac{\varphi(x-at)}{2} - \frac{1}{2a}\int_0^{x-at}\psi(\alpha)d\alpha - \frac{c}{2a} \end{cases}.$$

Putem asambla soluția finală în forma:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)\big] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha, \tag{1}$$

care se numește **formula lui d'Alembert**.

Observaţie 2.1: Soluția problemei Cauchy asociată coardei vibrante există și este unică.

3 Coarda finită. Metoda separării variabilelor (*)

Pentru cazul lungimii finite a unei coarde, se folosește o metodă care este atribuită lui Fourier și utilizează dezvoltări în serie. Această metodă se numește *metoda separării variabilelor*.

Pornim cu o problemă Cauchy similară, doar că lungimea coardei este conținută într-un interval finit. Căutăm, deci, funcția $u(x,t)$, definită pentru $0 \leqslant x \leqslant l$ și $t \geqslant 0$, care satisface următoarele condiții:

$$\begin{cases} a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ u(x,0) &= \varphi(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= \psi(x) \\ u(0,t) &= u(l,t) = 0 \text{ (condiții la limită)} \end{cases}.$$

Metoda de separare a variabilelor constă în găsirea unui șir infinit de soluții de formă particulară, iar apoi, cu ajutorul acestora, formăm o serie ai cărei coeficienți se determină în ipoteza ca suma seriei să dea soluția problemei tratate.

Soluțiile particulare se caută în forma:

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

și cerem să satisfacă condițiile la limită:

$$\begin{cases} u(0,t) &= X(0)T(t) = 0 \\ u(l,t) &= X(l)T(t) = 0 \end{cases}$$

Rezultă că vrem $X(0) = X(l) = 0$. Altfel, am avea $T(t) = 0$, ceea ce ar conduce la soluția banală $u(x,t) = 0$.

Înlocuind în ecuația inițială, avem:

$$XT'' = a^2X''T \Rightarrow \frac{1}{a^2}\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X}.$$

Să remarcăm că în membrul stîng, funcția depinde doar de variabila t, iar în membrul drept, doar de variabila x. Așadar, egalitatea nu poate avea loc decît dacă ambele funcții sînt egale cu o constantă. Pentru conveniență, o vom nota cu $-\lambda$. Obținem ecuațiile:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X &= 0 \\ T'' + a^2\lambda T &= 0 \end{cases}$$

Prima dintre aceste ecuații este liniară, de ordinul al doilea, cu coeficienți constanți. Soluția se obține:

- Dacă $\lambda < 0$, atunci
$$X(x) = c_1 e^{-\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x},$$
iar ținînd seama de condițiile la limită, avem:
$$\begin{cases} c_1 + c_2 & = 0 \\ c_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} & = 0 \end{cases},$$
care se scrie echivalent:
$$\begin{cases} c_1 + c_2 & = 0 \\ c_1 e^{2\sqrt{-\lambda}l} + c_2 & = 0 \end{cases}$$
Determinantul matricei sistemului este nenul, deci el admite doar soluția banală.

- Dacă $\lambda = 0$, atunci $X(x) = c_1 x + c_2$ și, ținînd seama de condițiile la limită, obținem din nou soluția banală.

- Dacă $\lambda > 0$, soluția generală se scrie:
$$X(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}x.$$
Din condițiile la limită, găsim:
$$\begin{cases} X(0) & = c_1 = 0 \\ X(l) & = c_2 \sin \sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases}$$
Din a doua ecuație, deducem că $c_2 = 0$, care conduce la soluția banală, sau $\sin \sqrt{\lambda}l = 0$, care înseamnă $\lambda = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$. Putem scrie, atunci, soluția corespunzătoare acestei serii de valori în forma:
$$X_n = c_n \sin \frac{n\pi}{l}x, \quad c_n \in \mathbb{R}.$$

Înlocuim și integrăm acum ecuația după t:
$$T'' + a^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T = 0,$$
care are soluția generală:
$$T_n(t) = \alpha_n \cos \frac{n\pi}{l}at + \beta_n \sin \frac{n\pi}{l}at.$$

Punînd laolaltă soluția după x și pe cea după t, obținem:
$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l}at + b_n \sin \frac{n\pi}{l}at\right) \cdot \sin \frac{n\pi}{l}x, \tag{2}$$
unde a_n, b_n, c_n sînt constante ce provin din α_n, β_n, c_n.

Pentru a doua etapă a soluției, considerăm seria $\sum u_n(x,t)$, adică:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l}at + b_n \sin \frac{n\pi}{l}at\right) \cdot \sin \frac{n\pi}{l}x.$$

Presupunem că există $u(x,t)$ suma seriei de mai sus, care este și soluția problemei Cauchy, deci satisface și condițiile la limită, adică:
$$\begin{cases} u(x,0) & = \sum_{n \geqslant 1} a_n \sin \frac{n\pi}{l}x = \varphi(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) & = \frac{n\pi}{l}ab_n \sin \frac{n\pi}{l}x = \psi(x) \end{cases}.$$

Putem privi aceste egalități ca dezvoltarea funcțiilor φ și ψ în serie Fourier de sinusuri. Rezultă că putem afla coeficienții:
$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l}x dx \tag{3}$$
$$b_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi}{l}x dx. \tag{4}$$

Observaţie 3.1: Calculele de mai sus, împreună cu rezultate din teoria seriilor Fourier, ne asigură că funcția $u(x,t)$ găsită este soluția problemei Cauchy.

4 Exerciții

1. Determinați soluția ecuației:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

care satisface condițiile:

$$\begin{cases} u(x,0) & = 3x^2 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) & = \cos x \end{cases}.$$

Soluție: Cum $AC - B^2 = -4 < 0$, ecuația este de tip hiperbolic. Din ecuația caracteristică, obținem schimbarea de variabile:

$$\begin{cases} \tau & = -3x + y \\ \eta & = x + y \end{cases},$$

iar forma canonică este $\frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial \eta} = 0$, care are soluția:

$$u(\tau, \eta) = f(\tau) + g(\eta),$$

cu f, g funcții de clasă $\mathcal{C}^2$, arbitrare. Revenind la variabilele inițiale, avem:

$$u(x,y) = f(-3x + y) + g(x + y).$$

Ținînd seama de condițiile inițiale din problema Cauchy, obținem sistemul:

$$\begin{cases} f(-3x) + g(x) & = 3x^2 \\ f'(-3x) + g'(x) & = \cos x \end{cases}$$

Integrăm a doua ecuație și avem:

$$\begin{cases} f(-3x) + g(x) & = 3x^2 \\ -\frac{1}{3}f(-3x) + g(x) & = \sin x + c \end{cases}$$

și prin schimbarea semnului primei ecuații și adunîndu-le, obținem:

$$\begin{cases} f(-3x) & = \frac{9}{4}x^2 - \frac{3}{4}\sin x - \frac{3c}{4} \\ g(x) & = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}\sin x + \frac{3c}{4} \end{cases}.$$

Dacă notăm $-3x = t$, atunci $x = -\frac{t}{3}$ și găsim:

$$f(t) = \frac{t^2}{4} + \frac{3}{4}\sin\frac{t}{3} - \frac{3c}{4}.$$

Așadar, soluția finală este:

$$\begin{cases} f(-3x + y) & = \frac{1}{4}(-3x + y)^2 + \frac{3}{4}\sin\frac{-3x+y}{3} - \frac{3c}{4} \\ g(x + y) & = \frac{3}{4}(x + y)^2 + \frac{3}{4}\sin(x + y) + \frac{3c}{4} \end{cases}.$$

Rezultă că soluția problemei Cauchy este:

$$u(x,y) = \frac{1}{4}(-3x + y)^2 + \frac{3}{4}\sin\frac{-3x + y}{3} + \frac{3}{4}(x + y)^2 + \frac{3}{4}\sin(x + y).$$

2. Rezolvați ecuația:

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 7\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

cu condițiile:

$$\begin{cases} u(x,0) & = x^3 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) & = 2x^2 \end{cases}.$$

Soluție: Ecuația este de tip hiperbolic, iar schimbarea de variabilă este:

$$\begin{cases} \tau & = 2x - y \\ \eta & = x - 3y \end{cases},$$

care conduce la forma canonică $\frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial \eta} = 0$, de unde rezultă soluția generală:

$$u(x,y) = \varphi(2x - y) + \psi(x - 3y).$$

Din condițiile problemei Cauchy, obținem:

$$\begin{cases} \varphi(2x) + \psi(x) & = x^3 \\ -\varphi'(2x) - 3\psi'(x) & = 2x^2 \end{cases}.$$

Integrăm a doua relație și obținem:

$$-\frac{1}{2}\varphi(2x) - 3\psi(x) = \frac{2}{3}x^3 + k.$$

Atunci:

$$\begin{cases} \varphi(2x) & = \frac{19}{96}(2x)^3 + c_1 \\ \psi(x) & = -\frac{7}{12}x^3 - c_1 \end{cases},$$

de unde rezultă că soluția problemei Cauchy este:

$$u(x,y) = \frac{19}{96}(2x-y)^3 - \frac{7}{12}(x-3y)^3.$$

3. Rezolvați ecuația coardei vibrante infinite:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

cu condițiile inițiale:

$$\begin{cases} u(x,0) & = \frac{x}{1+x^2} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) & = \sin x \end{cases}.$$

Soluție: Putem aplica direct formula lui d'Alembert (1):

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\Big[\frac{x-t}{1+(x-t)^2} + \frac{x+t}{1+(x+t)^2}\Big] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \sin y \, dy \\ &= \frac{1}{2}\Big[\frac{x-t}{1+(x-t)^2} + \frac{x+t}{1+(x+t)^2}\Big] - \frac{1}{2}[\cos(x+t) - \cos(x-t)] \\ &= \frac{1}{2}\Big[\frac{x-t}{1+(x-t)^2} + \frac{x+t}{1+(x+t)^2}\Big] - \frac{1}{2}\Big[-2\sin\frac{x+t+x-t}{2}\sin\frac{x+t-x+t}{2}\Big] \\ &= \Big[\frac{x-t}{1+(x-t)^2} + \frac{x+t}{1+(x+t)^2}\Big] + \sin x \sin t. \end{aligned}$$

4(*). Determinați vibrațiile unei coarde de lungime l, avînd capetele fixate, dacă forma inițială a coardei este dată de funcția:

$$\varphi(x) = 4\left(x - \frac{x^2}{l}\right),$$

iar viteza inițială este 0.

Soluție: Aplicînd direct formula pentru coeficienții Fourier (3), avem $b_n = 0$, iar

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l 4\left(x - \frac{x^2}{l}\right)\sin\frac{n\pi}{l}x dx = \frac{8}{l}\int_0^l x\sin\frac{n\pi}{l}x dx - \frac{8}{l^2}\int_0^l x^2\sin\frac{n\pi}{l}x dx.$$

Calculăm:

$$\begin{aligned}
\int_0^l x\sin\frac{n\pi}{l}x dx &= -\frac{l}{n\pi}x\cos\frac{n\pi}{l}x\Big|_0^l + \frac{l}{n\pi}\int_0^l \cos\frac{n\pi}{l}x dx \\
&= -\frac{l^2}{n\pi}(-1)^n + \frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{l}x\Big|_0^l \\
&= (-1)^{n+1}\frac{l^2}{n\pi}. \\
\int_0^l x^2\sin\frac{n\pi}{l}x dx &= -\frac{l}{n\pi}x^2\cos\frac{n\pi}{l}x\Big|_0^l + \frac{2l}{n\pi}\int_0^l x\cos\frac{n\pi}{l}x dx \\
&= (-1)^{n+1}\frac{l^3}{n\pi} + \frac{2l}{n\pi}\left[\frac{l}{n\pi}x\sin\frac{n\pi}{l}x\Big|_0^l - \frac{l}{n\pi}\int_0^l \sin\frac{n\pi}{l}x dx\right] \\
&= (-1)^{n+1}\frac{l^3}{n\pi} + \frac{2l}{n^3\pi^3}\cos\frac{n\pi}{l}x\Big|_0^l \\
&= (-1)^{n+1}\frac{l^3}{n\pi} + \frac{2l}{n^3\pi^3}[(-1)^n + 1].
\end{aligned}$$

Așadar:

$$a_n = (-1)^{n+1}\frac{8l}{n\pi} - (-1)^{n+1}\frac{8l}{n\pi} - \frac{16}{n^3\pi^3}[(-1)^n - 1],$$

de unde obținem $a_{2n} = 0, a_{2n+1} = \frac{32l}{(2n+1)^3\pi^3}$.

Punem laolaltă coeficienții și obținem soluția:

$$u(x,t) = \frac{32l}{\pi^3}\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(2n+1)^3}\cos\frac{(2n+1)\pi}{l}t \cdot \sin\frac{(2n+1)\pi}{l}x.$$

5(*). Rezolvați problema Cauchy asupra coardei vibrante finite:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, t > 0,$$

cu condițiile inițiale și la limită:

$$\begin{cases} u(x,0) &= \sin 3x - 4\sin 10x \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= 2\sin 4x + \sin 6x, 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, t \geqslant 0 \end{cases}.$$

Soluție: Determinăm coeficienții din seria Fourier:

$$u(x,0) = \sin 3x - 4\sin 10x \Rightarrow \sum a_n \sin nx = \sin 3x - 4\sin 10x.$$

Egalînd coeficienții, obținem $a_3 = 1$, $a_{10} = -4$, $a_n = 0$ în rest.

Mai departe:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 2\sin 4x + \sin 6x \Rightarrow \sum 2nb_n \sin nx = 2\sin 4x + \sin 6x.$$

Egalînd coeficienții, avem: $b_4 = \frac{1}{4}$, $b_6 = \frac{1}{12}$, $b_n = 0$ în rest.

Rezultă:

$$u(x, t) = \cos 6t \sin 3x - 4\cos 20t \sin 10x + \frac{1}{4}\sin 8t \sin 4x + \frac{1}{12}\sin 12t \sin 6x.$$

6(*). Aceeași cerință pentru:

(a)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, t \geqslant 0,$$

cu condițiile inițiale și la limită:

$$\begin{cases} u(x, 0) & = \sin x \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) & = \sin x \\ u(0, t) & = u(\pi, t) = 0 \end{cases}.$$

(b)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, t \geqslant 0$$

cu condițiile inițiale și la limită:

$$\begin{cases} u(x, 0) & = x(1 - x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) & = 0 \\ u(0, t) & = u(1, t) = 0 \end{cases}.$$

(c)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, 0 \leqslant x \leqslant \pi, t \geqslant 0$$

cu condițiile inițiale și la limită:

$$\begin{cases} u(x, 0) & = \sin 3x - 4\sin 10x \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) & = 2\sin 4x + \sin 6x \\ u(0, t) & = u(\pi, t) = 0 \end{cases}.$$