Seminar 5
Ecuații cu derivate parțiale de ordinul întîi

1 Ecuații cu derivate parțiale, omogene și cvasiomogene

Definiţie 1.1: Fie $v : U \to \mathbb{R}^n$ un cîmp de vectori de clasă $\mathcal{C}^r(U)$, cu $r \geqslant 2$ și $v_1, \dots, v_n : U \to \mathbb{R}$ componentele sale.

Se numește *ecuație cu derivate parțiale de ordinul întîi, liniară și omogenă* pentru funcția necunoscută $u : U \to \mathbb{R}$, de clasă $\mathcal{C}^1$ egalitatea:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = 0, \tag{1}$$

unde $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$.

Funcția $u : U \to \mathbb{R}$ de clasă $\mathcal{C}^1$ care verifică relația de mai sus pentru orice $x \in U$ se numește *soluție* a ecuației pe domeniul U.

Relevanța integralelor prime pentru ecuațiile cu derivate parțiale rezultă din următoarea.

Teoremă 1.1: *Orice integrală primă pe U a sistemului autonom $x' = v(x)$ este soluție pe U a ecuației (1) și, reciproc, orice soluție pe U a ecuației este integrală primă pe U a sistemului $x' = v(x)$.*

În contextul și cu notațiile de mai sus, sistemul diferențial autonom:

$$\frac{dx_1}{v_1(x_1, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{v_2(x_1, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{v_n(x_1, \dots, x_n)}$$

se numește *sistemul caracteristic* asociat ecuației (1).

De **exemplu**, să considerăm ecuația:

$$xy\frac{\partial u}{\partial x} - y\sqrt{1-y^2}\frac{\partial u}{\partial y} + (z\sqrt{1-y^2} - axy)\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Soluție: Sistemul autonom caracteristic este:

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{-y\sqrt{1-y^2}} = \frac{dz}{z\sqrt{1-y^2} - axy}.$$

Lucrînd cu primele două rapoarte, obținem:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-\sqrt{1-y^2}} \Rightarrow \ln|x| + \arcsin y = c \Rightarrow xe^{\arcsin y} = c_1.$$

Lucrînd cu ultimele două egalități și folosind soluția pentru x, avem:

$$\frac{dy}{-y\sqrt{1-y^2}} = \frac{dz}{z\sqrt{1-y^2} - axy} \Rightarrow \frac{dz}{dy} - \frac{z}{y} = ac_1\frac{e^{-\arcsin y}}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Aceasta este o ecuație diferențială liniară privind funcția $z = z(y)$, deci o putem rezolva cu metoda specifică și găsim soluția generală:

$$z = \frac{c_2}{y} \cdot \frac{ac_1 e^{-\arcsin y}}{2y}(y + \sqrt{1-y^2}) \Leftrightarrow 2yz + ax(y + \sqrt{1-y^2}) = 2c_2.$$

Soluția generală se alcătuiește, atunci:

$$u(x,y,z) = \Phi(xe^{\arcsin y}, 2yz + ax(y + \sqrt{1-y^2})), \quad \Phi \in \mathcal{C}^1(U).$$

Un alt caz de interes este:

Definiţie 1.2: Se numește *ecuație cu derivate parțiale de ordinul întîi cvasiliniară* egalitatea:

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = g(x_1, \dots, x_n, u), \tag{2}$$

unde $g_i, g : D \to \mathbb{R}$ sînt funcții de clasă $\mathcal{C}^1(D \subseteq \mathbb{R}^{n+1})$.

Definiţie 1.3: Se numește *soluție* a ecuației (2) orice funcție de clasă $\mathcal{C}^1$ definită pe un domeniu $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $u : U \to \mathbb{R}$, astfel încît $\forall x \in U$ să avem $(x, u(x)) \in D$ și:

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(x, u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = g(x, u(x)), \forall x \in U.$$

Pentru rezolvarea ecuației (2) procedăm astfel: căutăm soluția u sub formă implicită, $F(x_1, \dots, x_n, u) = 0$, unde $F : D \to \mathbb{R}$ este o funcție de clasă $\mathcal{C}^1$ și $\frac{\partial F}{\partial u} \neq 0$ pe D. Atunci obținem:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial f}{\partial u}},$$

pentru orice $i = 1, \dots n$, iar ecuația (2) devine:

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{x_i}(x_1, \dots, x_n, u) + g(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial F}{\partial u}(x_1, \dots x_n, u) = 0,$$

care este o ecuație cu derivate parțiale de ordinul întîi, liniară și omogenă, așadar redusă la cazul anterior.

De **exemplu**:

$$(1 + \sqrt{z - x - y}) \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2.$$

Soluție: Scriem sistemul caracteristic:

$$\frac{dx}{1 - \sqrt{z - x - y}} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{2}.$$

Din ultimele două rapoarte, obținem o integrală primă de forma $z - 2y = c_1$.

De asemenea, prelucrînd rapoartele, obținem:

$$dy = \frac{dz - dx - dy}{-\sqrt{z - x - y}},$$

de unde rezultă că $y + 2\sqrt{z - x - y} = c_2$, care este o altă integrală primă.

Așadar, soluția generală se poate scrie sub forma:

$$u(x,y,z) = \Phi(z - 2y, y + 2\sqrt{z - x - y}) = 0.$$

2 Linii și suprafețe de cîmp

Putem acum să descriem noțiuni precum liniile de cîmp și liniile de forță, în contextul ecuațiilor cu derivate parțiale.

Definiţie 2.1: Fie $U \subseteq \mathbb{R}^3$ un domeniu și $\vec{v} : U \to \mathbb{R}$ un cîmp de clasă $\mathcal{C}^1$ fără puncte singulare pe U, adică $\vec{v}$ nu se anulează pe U), unde:

$$\vec{v} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Integralele prime (orbitele) care rezultă din sistemul diferențial autonom:

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}, \quad (x, y, z) \in U \tag{3}$$

se numesc *linii de cîmp* pentru $\vec{v}$.

Liniile de cîmp pentru un cîmp vectorial $\vec{v}$ sînt suporturi de curbe $\gamma : x = x(t), t \in I$, în lungul cărora vectorul tangent în fiecare punct t coincide cu $\vec{v}(x(t))$.

Dacă lucrăm cu aplicații fizice concrete, de exemplu, cazul cîmpului electromagnetic, liniile de cîmp se mai numesc și *linii de forță*.

De **exemplu**, să determinăm liniile de cîmp pentru cîmpul vectorial:

$$\vec{v} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 z}\vec{i} - \frac{2y}{xz}\vec{j} + \frac{-x^2 + y^2 - z^2}{xz^2}.$$

Soluție: Scriem sistemul simetric asociat:

$$\frac{x^2 z dx}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{xz dy}{-2y} = \frac{xz^2 dz}{-x^2 + y^2 - z^2},$$

pe care îl putem scrie și:

$$\frac{2x dx}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{2y dy}{-2y^2} = \frac{2z dz}{-x^2 + y^2 - z^2} = \frac{2x dx + 2y dy + 2z dz}{x^2 + y^2 + z^2 - 2x - x^2 + y^2 - z^2} = \frac{2x dx + 2y dy + 2z dz}{0}$$

Rezultă că avem o integrală primă de forma $x^2 + y^2 + z^2 = c_1$.

Introducînd această integrală primă în primul raport, obținem, împreună cu al doilea:

$$\frac{2x dx}{c_1} = -\frac{dy}{y} \Rightarrow y = c_2 e^{-\frac{x^2}{c_1^2}}.$$

Obținem liniile de cîmp:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 &= c_1 \\ y &= c_2 e^{-\frac{x^2}{c_1^2}} \end{cases}$$

Trecem acum în dimensiune superioară, introducînd *suprafețele de cîmp*.

Definiţie 2.2: O suprafață $S \subseteq U$ de clasă $\mathcal{C}^1$, fără puncte singulare se numește *suprafață de cîmp* pentru vectorul $\vec{v}$ dacă în orice punct $P \in S$, vectorul $\vec{v}(M)$ este tangent la suprafață.

Pentru a obține ecuația suprafețelor de cîmp procedăm astfel. Presupunem că avem o suprafață S cu ecuația $F(x, y, z) = 0$ în U, unde $F : U \to \mathbb{R}$ este o funcție de clasă $\mathcal{C}^1$. Deoarece S nu are puncte singulare, admite tangentă și normală în orice punct $M \in S$, iar un vector director al normalei în P este dat de ecuația:

$$\nabla_M F = \frac{\partial F}{\partial x}(M)\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}(M)\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}(M)\vec{k} \neq 0.$$

Rezultă că $\vec{v}(M)$ este tangent la S dacă și numai dacă $\vec{v}(M)$ este perpendicular pe vectorul $\nabla_M F$, adică:

$$\vec{v}(M) \cdot \nabla_M F = P \cdot F_x + Q \cdot F_y + R \cdot F_z = 0, \tag{4}$$

pentru orice punct $M = (x, y, z)$. Rezultă că S este o suprafață de cîmp pentru $\vec{v}$ dacă și numai dacă este dată de o ecuație de forma $F(x, y, z) = 0$, unde funcția $F : U \to \mathbb{R}$ este de clasă $\mathcal{C}^1$, are $\nabla F \neq 0$ și satisface ecuația (4), care se numește *ecuația suprafețelor de cîmp* ale lui $\vec{v}$. Sistemul diferențial autonom și simetric (3) se numește *sistem caracteristic* ale ecuației (4), iar liniile de cîmp se mai numesc *curbe caracteristice*.

Determinarea unei suprafețe de cîmp care trece printr-o curbă dată este, de fapt, o problemă Cauchy pentru ecuația (4).

Exemplu: Determinăm soluția ecuației:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z,$$

care trece prin curba $x^2 + y^2 = 1, z = 2$.

Soluție: Sistemul caracteristic asociat este simplu:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

Integralele prime se obțin egalînd primele două și ultimele două rapoarte, ca fiind:

$$\frac{x}{y} = c_1, \quad \frac{x}{z} = c_2.$$

Folosindu-le, împreună cu curbele date, avem:

$$\begin{cases} x & = c_1 y \\ x & = c_2 z \\ x^2 + y^2 & = 1 \\ z & = 2 \end{cases} \Rightarrow c_1^2 c_2^2 + c_2^2 = \frac{c_1^2}{4} \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{z^2}{4},$$

care este un con cu vîrful în origine.

Exemplu 2: Fie cîmpul vectorial:

$$\vec{v} = (x + y)\vec{i} + (y - x)\vec{j} - 2z\vec{k}.$$

Să se determine:

(a) liniile de cîmp;

(b) linia de cîmp ce conține punctul $M(1, 0, 1)$;

(c) suprafața de cîmp;

(d) suprafața de cîmp ce conține dreapta $z = 1, y - x\sqrt{3} = 0$.

Soluție: (a) Sistemul caracteristic asociat este:

$$\frac{dx}{x + y} = \frac{dy}{y - x} = \frac{dz}{-2z} \Rightarrow \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} = \frac{dz}{-2z}.$$

Obținem de aici:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = -\frac{1}{2}\frac{dz}{z} \Rightarrow (x^2+y^2)z = c_1.$$

Din primele două rapoarte, obținem: $\frac{dx}{dy} = \frac{x+y}{y-x}$, care este o ecuație diferențială omogenă, pentru care facem substituția $y = tx$. Rezultă:

$$x\frac{dt}{dx} + t = \frac{t-1}{t+1} \Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{t+1}{t^2+1}dt,$$

care are soluția $\ln(x^2+y^2) + 2\arctan\frac{y}{x} = c_2$, care este cea de-a doua integrală primă.

Așadar, liniile de cîmp sînt:

$$\begin{cases} (x^2+y^2)z & = c_1 \\ \ln(x^2+y^2) + 2\arctan\frac{y}{x} & = c_2 \end{cases}$$

(b) Cum $M(1,0,1)$ aparține liniei de cîmp, putem afla constantele din sistemul de mai sus. Găsim $c_1 = c_2 = 0$.

(c) Ecuația suprafeței de cîmp se obține folosind liniile de cîmp:

$$\Phi\big((x^2+y^2)z, \ln(x^2+y^2) + 2\arctan\frac{y}{x}\big) = 0.$$

(d) Suprafața de cîmp ce conține dreapta dată rezultă cu metoda substituției din sistemul:

$$\begin{cases} (x^2+y^2)z & = c_1 \\ \ln(x^2+y^2) + 2\arctan\frac{y}{x} & = c_2 \\ z & = 1 \\ y - x\sqrt{3} & = 0 \end{cases}$$

Obținem:

$$\ln c_1 + 2\arctan\sqrt{3} = c_2 \Rightarrow z = e^{\arctan\frac{y}{x} - \frac{\pi}{3}},$$

care este ecuația suprafeței de cîmp ce trece prin dreapta dată.

3 Exerciții

1. Rezolvați ecuațiile:

(a) $(z-y)^2\frac{\partial z}{\partial x} + xz\frac{\partial z}{\partial y} = xy$;

(b) $x(y^3 - 2x^3)\frac{\partial z}{\partial x} + y(2y^3 - x^3)\frac{\partial z}{\partial y} = 9z(x^3 - y^3)$;

(c) $2xu\frac{\partial u}{\partial x} + 2yu\frac{\partial u}{\partial y} = u^2 - x^2 - y^2$.

2. Determinați suprafețele de cîmp pentru cîmpurile vectoriale:

(a) $\vec{v} = (x+y+z)\vec{i} + (x-y)\vec{j} + (y-x)\vec{k}$;

(b) $\vec{v} = (x-y)\vec{i} + (x+y)\vec{j} + \vec{k}$;

(c) $\vec{v} = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j} + z(x^2+y^2)\vec{k}$.

3. Determinați suprafața de cîmp a cîmpului vectorial:

$$\vec{v} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k},$$

care trece prin curba de ecuație $x^2 + y^2 = 4, y = 0$.

4. Determinați suprafața de cîmp a cîmpului vectorial:

$$\vec{v} = 2zx\vec{i} + 2zy\vec{j} + (z^2 - x^2 - y^2)\vec{k},$$

care conține cercul de ecuații:

$$\begin{cases} z & = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x & = 0. \end{cases}$$