Seminar 4
Ecuații și sisteme autonome.
Stabilitate. Integrale prime

1 Ecuații autonome (nu conțin pe x)

În cazul acestor ecuații, putem micșora ordinul cu o unitate dacă notăm $y' = p$ și luăm pe y variabilă independentă.

Observaţie 1.1: Există posibilitatea să pierdem soluții de forma $y = c$ prin această metodă, deci trebuie verificat ulterior dacă a fost cazul.

Exemplu 1: $1 + y'^2 = 2yy''$.
Soluție: Luăm $y' = p$ drept funcție și pe y drept variabilă independentă. Obținem:

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = p\frac{dp}{dy}.$$

Atunci ecuația devine $\frac{2p\,dp}{1+p^2} = \frac{dy}{y}$, ce are drept soluție $y = c_1(1 + p^2)$.

Acum trebuie să obținem pe x ca funcție de p și c_1. Deoarece $dx = \frac{1}{p}dy$, iar $dy = 2c_1p\,dp$, rezultă $dx = 2c_1 dp$. Așadar, $x = 2c_1p + c_2$, iar soluția generală este $x(p) = 2c_1p + c_2$. Cum $y(p) = c_1(1 + p^2)$, rezultă:

$$y = c_1 + \frac{(x - c_2)^2}{4c_1}.$$

Exemplu 2: $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$.
Soluție: Notăm $y' = p$ și luăm ca necunoscută $p = p(y)$, de unde obținem:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = p'p \Rightarrow p'p + p^2 = 2e^{-y}.$$

Dacă notăm $p^2 = z$, obținem o ecuație liniară neomogenă:

$$z' + 2z = 4e^{-y},$$

ce are ca soluție generală $z(y) = c_1e^{-2y} + 4e^{-y}$. Revenind la y, avem:

$$z = p^2 = y'^2 \Rightarrow y' = \pm\sqrt{c_1e^{-2y} + 4e^{-y}},$$

adică ecuația:

$$\frac{dy}{\pm\sqrt{c_1e^{2y} + 4e^{-y}}} = dx,$$

ce are ca soluție: $x + c_2 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{c_1 + 4e^y}$. Echivalent, în forma implicită:

$$e^y + \frac{c_1}{4} = (x + c_2)^2.$$

Similar putem proceda și în cazul:

$$y''' + y'' = \sin x.$$

Indicație: Putem nota $y'' = z$ și atunci ecuația devine:

$$z' + z = \sin x,$$

care este o ecuație liniară neomogenă, cu soluția:

$$z(x) = e^{-x}(c_1 + \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)).$$

Mai departe, integrăm succesiv:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \int z(x)dx + c_2 = -c_1 e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x + c_2 \\ y(x) &= \int y'(x)dx + c_3 = c_1 e^{-x} - \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x + c_2 x + c_3. \end{aligned}$$

2 Sisteme diferențiale autonome. Integrale prime

Definiţie 2.1: Un sistem diferențial de forma:

$$x_j' = v_j(x_1, \ldots, x_n), \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

unde $v = (v_1, \ldots, v_n) : U \to \mathbb{R}^n$ este un cîmp de vectori de clasă $\mathcal{C}^r, r \geqslant 1$, definit într-un domeniu $U \subseteq \mathbb{R}^n$ se numește *sistem diferențial autonom*.

Sistemul de mai sus poate fi scris și într-o *formă simetrică*:

$$\frac{dx_1}{v_1} = \cdots = \frac{dx_n}{v_n}.$$

Dacă $f : U \to \mathbb{R}$ este o funcție de clasă $\mathcal{C}^1(U)$, atunci pentru orice $x \in U$ se poate considera *derivata lui* f *în* x *și în direcția vectorului* $v(x)$, notată $\frac{df}{dv}(x)$, definită prin formula cunoscută:

$$\frac{df}{dv}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} v_i(x).$$

Definiţie 2.2: Fie $v : U \to \mathbb{R}^n$ un cîmp de vectori și $f : U \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă $\mathcal{C}^1(U)$. Funcția se numește o *integrală primă* a sistemului diferențial autonom $x' = v(x), x \in U$ dacă derivata sa în direcția cîmpului de vectori v este nulă în fiecare punct din U, adică $\frac{df}{dv} = 0$.

Echivalent, putem formula definiția astfel: $f : U \to \mathbb{R}$ este o integrală primă pentru sistemul diferențial autonom $x' = v(x)$ dacă și numai dacă oricare ar fi soluția $x = \varphi(t), \varphi : I \to U$, funcția $f \circ \varphi$ este constantă pe I. Uneori, mai putem scrie pe scurt $f(x_1, \ldots, x_n) = c$, constant. De aceea, putem spune că integralele prime reprezintă *legi de conservare*.

Tehnic, pentru a găsi integralele prime asociate unui sistem autonom, se scrie sistemul în forma simetrică, iar apoi, folosind proprietățile rapoartelor egale, se ajunge la un raport de forma $\frac{df}{0}$, egal cu rapoartele precedente. Atunci f va fi integrală primă, deoarece va rezulta $df = 0$, adică f constantă în lungul curbelor integrale.

Exemplu: Să se găsească integralele prime ale sistemului simetric:

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x}.$$

Soluție: Folosind proprietățile proporțiilor, putem scrie sistemul:

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x} = \frac{dx+dy+dz}{z-x+x-z+y-x} = \frac{dx+dy+dz}{0}$$

De asemenea, mai putem obține o integrală primă astfel:

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x} = \frac{xdx + ydy + zdz}{x(z-x) + y(x-z) + z(y-x)} = \frac{xdx + ydy + zdz}{0}.$$

Așadar, avem:

$$dx + dy + dz = 0$$
$$xdx + ydy + zdz = 0,$$

de unde obținem două integrale prime:

$$x + y + z = c_1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = c_2.$$

Observaţie 2.1: Dacă avem un sistem diferențial neautonom, adică $x' = v(x,t)$, cu $t \in \mathbb{R}$ și $x \in U$, atunci o integrală primă a sistemului va fi o funcție $f : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diferențiabilă și *dependentă de timp*. Ea se obține din sistemul anterior, adăugînd ecuația $t' = 1$.

3 Stabilitatea soluțiilor sistemelor diferențiale

Considerăm un sistem diferențial $x' = v(t,x)$. Presupunem că sînt îndeplinite condițiile teoremei fundamentale de existență și unicitate a soluției problemei Cauchy pentru $t \in [t_0, \infty)$ și $x \in U, U \subseteq \mathbb{R}^n$ este un deschis. Așadar, pentru orice $x_0 \in U$, există și este unică o soluție $x = \varphi(t)$, cu $\varphi : [t_0, \infty) \to U$, astfel încît $\varphi(t_0) = x_0$.

Definiţie 3.1: O soluție $x = \varphi(t), \varphi : [t_0, \infty) \to U$ se numește *stabilă spre ∞ în sens Poincaré-Liapunov* sau, echivalent, $x_0 = \varphi(t_0)$ se numește *poziție de echilibru* dacă la variații mici ale lui x_0 obținem variații mici ale soluției. Formal, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît pentru $\widetilde{x_0} \in \mathbb{R}^n$ cu $\|\widetilde{x}_0 - x_0\| < \delta(\varepsilon)$, soluțiile $\widetilde{\varphi}(t)$ și $\varphi(t)$ satisfac inegalitatea $|\widetilde{\varphi}(t) - \varphi(t)| < \varepsilon$, pentru orice $t \in [t_0, \infty)$.

Definiţie 3.2: Poziția de echilibru $x = 0$ se numește *stabilă în sens Poincaré-Liapunov* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$, care depinde doar de ε astfel încît pentru orice $x_0 \in U$ pentru care $\|x_0\| < \delta$, soluția φ a sistemului cu condiția inițială $\varphi(0) = x_0$ se prelungește pe întreaga semiaxă $t > 0$ și satisface inegalitatea $\|\varphi(t)\| < \varepsilon$ pentru orice $t > 0$.

Definiţie 3.3: Poziția de echilibru $x = 0$ a sistemului diferențial autonom se numește *asimptotic stabilă* dacă este stabilă și, în plus, pentru soluția $\varphi(t)$ din definiția de mai sus, avem:

$$\lim_{t \to \infty} \varphi(t) = 0.$$

În cazul sistemelor diferențiale liniare și omogene, de forma:

$$x' = Ax, \quad A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n$$

presupunem că A este izomorfism (echivalent, matricea A este inversabilă). Atunci $x = 0$ este singurul punct singular al cîmpului $v(x) = Ax$, deci $x = 0$ este singura poziție de echilibru a sistemului.

În exerciții, stabilitatea se va studia folosind următoarea:

Teoremă 3.1 (Poincaré-Liapunov)**:** *Păstrînd contextul și notațiile de mai sus, dacă toate valorile proprii ale matricei A au partea reală negativă, atunci poziția de echilibru $x = 0$ este asimptotic stabilă.*

Dacă există $\lambda \in \sigma(A)$ cu $\mathrm{Re}\lambda > 0$, atunci $x = 0$ este instabilă.

4 Exerciții

1. Studiați stabilitatea poziției de echilibru $x = 0$ pentru sistemele diferențiale:

(a) $\begin{cases} x' &= -4x + y \\ y' &= -x - 2y \end{cases};$

(b) $\begin{cases} x' &= -x + z \\ y' &= -2y - z; \\ z' &= y - z \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x' &= 2y \\ y' &= x + a \end{cases}, a \in \mathbb{R}.$

2. Să se afle pentru ce valori ale lui $a \in \mathbb{R}$ soluția nulă a sistemului de mai jos este asimptotic stabilă:

$$\begin{cases} x' &= ax + y + z^2 \\ y' &= (2 + a)x + ay + \cos y - 1 \\ z' &= x + y - z \end{cases},$$

unde derivatele sînt considerate în raport cu variabila t.

Indicație: Considerăm sistemul liniarizat:

$$\begin{cases} x' &= ax + y \\ y' &= (2 + a)x + ay \\ z' &= x + y - z \end{cases}$$

3. Să se determine liniile de cîmp pentru cîmpurile vectoriale de pe $\mathbb{R}^3$:

(a) $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + xyz\vec{k};$

(b) $\vec{v} = (2z - 3y)\vec{i} + (6x - 2z)\vec{j} + (3y - 6x)\vec{k};$

(c) $\vec{v} = (xz + y)\vec{i} + (x + yz)\vec{j} + (1 - z^2)\vec{k};$

(d) $\vec{v} = (x^2 + y^2)\vec{i} + 2xy\vec{j} - z^2\vec{k}.$

Indicație (a): Scriem sistemul autonom asociat cîmpului vectorial $\vec{v}$ sub forma:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{xyz}.$$

Din prima egalitate, rezultă $x = c_1 y$, deci a doua egalitate devine:

$$c_1 y \, dy = \frac{dz}{z} \Rightarrow c_1 \frac{y^2}{2} = \ln|z| + c_2.$$

Așadar, obținem $\frac{x}{y} \cdot \frac{y^2}{2} = \ln|z| + c_2$.

Rezultă că liniile de cîmp pentru $\vec{v}$ sînt curbele:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} &= c_1 \\ xy - \ln|z| &= c_2. \end{cases}$$

(b) Sistemul poate fi scris sub forma:

$$\frac{dx}{2z-3y} = \frac{dy}{6x-2z} = \frac{dz}{3y-6x} = \frac{dx+dy+dz}{0}.$$

Așadar, $dx + dy + dz = 0$, deci $x + y + z = c_1$.

Din forma inițială obținem și:

$$\frac{3x dx}{3x(2z-3y)} = \frac{\frac{3}{2}y dy}{\frac{3}{2}y(3x-z)} = \frac{z dz}{z(y-2x)} = \frac{3x dx + \frac{3}{2}y dy + z dz}{0},$$

deci $3x dx + \frac{3}{2}y dy + z dz = 0$, adică $3\frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}y^2 + \frac{z^2}{22} = c_2$.

(c) Obținem:

$$\frac{dx+dy}{(x+y)(z+1)} = \frac{dz}{1-z^2} \Rightarrow \frac{d(x+y)}{x+y} = -\frac{dz}{z-1}.$$

Rezultă $\ln|x+y| + \ln|z-1| = \ln c_1$, adică $(x+y)(z-1) = c_1$.

Apoi:

$$\frac{dy-dx}{x+zy-xz-y} = \frac{dy-dx}{(x-y)(1-z)} = \frac{dz}{1-z^2}.$$

Rezultă $-\frac{d(x-y)}{x-y} = \frac{dz}{z+1}$, de unde $(x-y)(z+1) = c_2$.

Așadar, liniile de cîmp sînt curbele:

$$\begin{cases} (x+y)(z-1) & = c_1 \\ (x-y)(z+1) & = c_2 \end{cases}$$

(d) Sistemul simetric rezultat este:

$$\frac{dx}{x^2+y^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{-z^2}.$$

Prin adunarea primelor două rapoarte, obținem:

$$\frac{d(x+y)}{(x+y)^2} = \frac{dz}{-z^2},$$

adică $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{z} = c_1$.

Prin scădere, avem $\frac{d(x-y)}{(x-y)^2} = \frac{dz}{-z^2}$, deci $\frac{1}{x-y} + \frac{1}{z} = c_2$.

Liniile de cîmp se obțin:

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} + \frac{1}{z} & = c_1 \\ \frac{1}{x-y} + \frac{1}{z} & = c_2 \end{cases}$$