**Seminar 2**
**Ecuații și sisteme diferențiale**
**Exerciții suplimentare**

1. Determinați soluția generală pentru următoarele ecuații diferențiale:

(a) $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$;

(b) $xy' = 2y$;

(c) $y' = e^{x+y}$;

(d) $y' = \frac{2x}{3y^2+1}$;

(e) $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xy\,dy = 0$;

(f) $(x^3 - 3xy^2 + 2)dx - (3x^2y - y^2)dy = 0$;

(g) $y^2dx + (3^x - 2y)dy = 0$;

(h) $(x + y^2)dx - 2xy\,dy = 0$;

(i) $xy' + y = x^3$;

(j) $x^2y' + (1 - 2x)y = x^2$;

2. Găsiți soluția generală pentru următoarele sisteme diferențiale:

(a) $\begin{cases} y' &= 2y + z \\ z' &= y + 2z \end{cases}, \quad y = y(x), z = z(x)$;

(b) $\begin{cases} y' &= -3y - 4z \\ z' &= y + 2z \end{cases}, \quad y = y(x), z = z(x)$;

(c) $\begin{cases} y_1' &= -2y_1 - y_2 + y_3 \\ y_2' &= 5y_1 - y_2 + 4y_3 \\ y_3' &= 5y_1 + y_2 + 2y_3 \end{cases}, \quad y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), y_3 = y_3(x)$;

(d) $\begin{cases} x' &= x + 3y \\ y' &= -x + 5y - 2e^t \end{cases}$, pentru funcțiile $x = x(t), y = y(t)$, cu condițiile $x(0) = 3, y(0) = 1$.

3. Determinați soluția generală pentru următoarele ecuații diferențiale:

(a) $y^{(3)} + 4y^{(2)} + 3y' = 0$;

(b) $y^{(2)} + 4y' + 4y = 0$;

(c) $y^{(3)} + y = 0$;

(d) $y^{(4)} + 4y^{(2)} = 0$.

4. Determinați soluția generală pentru următoarele ecuații neomogene:

(a) $y^{(2)} - 2y' + y = \frac{1}{x}e^x$;

(b) $y^{(2)} + y = \frac{1}{\cos x}$;

(c) $y^{(3)} + y' = \tan x$;

(d) $y^{(3)} + 2y^{(2)} = x + 2$;

5. Determinați soluția sistemului diferențial liniar neomogen:

$$\begin{cases} x' &= 2x - y \\ y' &= -x + 2y + e^t z \\ z' &= -y + 2z \end{cases}$$

știind că satisface condițiile inițiale $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

**Ecuații Euler**

O ecuație diferențială liniară de ordinul $n$ de forma:

$$L[y] = a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = f(x)$$

cu $a_i$ constante și $f \in \mathcal{C}^1(I)$ se numește *ecuație Euler*.

Ecuațiile Euler se pot transforma în ecuații cu coeficienți constanți prin schimbarea de variabilă $|x| = e^t$. De remarcat că, deoarece funcția necunoscută este $y = y(x)$, pentru a obține $y'$ trebuie să aplicăm regula de derivare a funcțiilor compuse. Fie $z(t) = y(e^t)$. Atunci avem, de exemplu, primele două derivate:

$$\begin{aligned} z'(t) &= y'(e^t)e^t \Rightarrow y'(e^t) = e^{-t} z'(t) \\ z''(t) &= y''(e^t)e^{2t} + y'(e^t)e^t = y''(e^t)e^{2t} + z'(t) \end{aligned}$$

Exemplu: $x^2 y^{(2)} + xy' + y = x$.

Facem substituția $|x| = e^t$ și obținem:

$$e^{2t} \cdot e^{-2t}(y^{(2)} - y'(t)) - e^t \cdot y'(t) \cdot e^{-t} + y(t) = e^t.$$

Echivalent:

$$y^{(2)}(t) - 2y'(t) + y(t) = e^t.$$

Aceasta este o ecuație liniară de ordinul al doilea, neomogenă. Asociem ecuația algebrică $f(r) = r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 = 0$, deci soluția generală a ecuației omogene este:

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t.$$

Folosind apoi metoda variației constantelor, obținem succesiv:

$$\begin{aligned} y(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + \frac{t^2 e^t}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow y(x) = c_1 x + c_2 x \ln x + \frac{x \ln^2 x}{2}. \end{aligned}$$

6. Să se rezolve ecuațiile Euler:

(a) $x^2 y^{(2)} - 3xy' + 4y = 5x, \quad x > 0$;

(b) $x^2 y^{(2)} - xy' + y = x + \ln x, \quad x > 0$;

(c) $4(x+1)^2 y^{(2)} + y = 0, \quad x > -1$.